廣義量詞單調性推理的拓展*

周家發

〔摘　要〕在經典的廣義量詞理論之下，<1,1>型廣義量詞被看成以兩個集合作爲論元的真值函項，而單調性則是關於把廣義量詞的論元換成其真母集或真子集後對廣義量詞真值條件的影響。本文把上述經典概念加以推廣，把<1,1>型廣義量詞重新理解爲由集合有序偶組成的集合，並發掘出新型的單調性推理，即「以廣義量詞作爲其他廣義量詞論元的單調性推理」，以及「以廣義量詞作爲命題聯結詞論元的單調性推理」，大大拓展了單調性推理的範圍。

〔關鍵詞〕廣義量詞；廣義量詞理論；單調性推理；三分結構；命題聯結詞

一、廣義量詞理論

傳統邏輯只研究兩個量詞(quantifier)－「全稱量詞」和「存在量詞」的邏輯性質，當代的「廣義量詞理論」(Generalized Quantifier Theory)則把研究範圍從傳統的「量詞」擴充爲「廣義量詞」(generalized quantifier)[1]，並且廣泛採用現代數學和數理邏輯的知識來研究廣義量詞[2]。此外，亦有一些學者把廣義量詞理論應用於自然語言語義和推理的研究[3]，我國學者亦把這套理論應用於漢語語義和推理的研究[4]。

廣義量詞可分爲多種類型，其中以<1,1>型廣義量詞最爲重要(例子如「所有」、「至少八成」、「大多數」等)。廣義量詞是以集合作爲「論元」(argument)的「真值函項」(truth function)(又可稱「算子」operator)。廣義量詞理論的學者設計了一種用數字表達廣義量詞類型的方法[5]，這種方法用數字「1」代表集合，那麼<1,1>型廣義量詞就

---

* 本文內容現載於本人的博士論文 *Inferential Patterns of Generalized Quantifiers and their Applications to Scalar Reasoning*，如欲引用本文內容，請註明出處。

[1] Mostowski, A., “On a generalization of quantifiers”, *Fundamenta Mathematicae*, Vol. 44, 1957, pp. 12 – 36.

[2] Keenan, E.L. and Westerstahl, D.,. “Generalized Quantifiers in Linguistics and Logic”, van Benthem, J. and ter Meulen, eds., *Handbook of Logic and Language*, Amsterdam: Elsevier Science, 1997, pp. 837-893.

[3] Barwise, J. and Cooper, R., “Generalized quantifiers and natural language”, *Linguistics and Philosophy* 4, 1981, pp. 159-219; van Benthem, J., “Quantifiers and Inference”, Krynicki, M. et al eds., *Quantifiers: Logic, Models and Computation*, Vol. II, 1995, pp. 1 – 20.

[4] 鄒崇理：《邏輯、語言和信息》，北京：人民出版社，2002 年；蔣嚴、潘海華：《形式語義學引論(第二版)》，北京：中國社會科學出版社，2005 年。

[5] Lindström, P., “First Order Predicate Logic with Generalized Quantifiers”, *Theoria*, 32, 1966, pp. 186 – 195.

是以兩個集合作爲論元的真值函項，這兩個論元可分別稱爲「左論元」和「右論元」。爲了突出<1,1>型廣義量詞的上述結構，以下把含有這類廣義量詞的句子寫成「三分結構」(tripartite structure) Q(A)(B)的形式，其中 Q、A 和 B 分別代表<1,1>型廣義量詞及其左、右論元。從語法學的角度看，Q、A 和 B 分別對應著「限定詞」(determiner)、主語(略去限定詞的部分)和謂語。廣義量詞理論把廣義量詞的語義表達爲「真值條件」(truth condition)，而真值條件可用論元之間的關係來表示。例如最常用的廣義量詞「所有」(以下記作 *every*)、「至少有一個」(在漢語中常被簡化爲「有」，以下記作 *some*)和「沒有一個」(以下記作 *no*)的真值條件就分別是

(1) $$every(A)(B) \Leftrightarrow A \subseteq B$$

(2) $$some(A)(B) \Leftrightarrow A \cap B \neq \varnothing$$

(3) $$no(A)(B) \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$$

以上三式的意思是 *every*(A)(B)是真的當且僅當 A 是 B 的子集；*some*(A)(B)是真的當且僅當 A 與 B 的交集非空，即有元素同時屬於 A 和 B；*no*(A)(B)是真的當且僅當 A 與 B 的交集爲空集，即沒有元素同時屬於 A 和 B。當我們把代表具體詞項的集合代入上式中的 A 和 B 後，便可得到相應的自然語言量化句的表達式及其真值條件，例如把代表「學生」的 STUDENT 和代表「唱歌」的 SING 分別代入(1)的 A 和 B 後，便有

(4) $$every(\mathrm{STUDENT})(\mathrm{SING}) \Leftrightarrow \mathrm{STUDENT} \subseteq \mathrm{SING}$$

用日常語言表達就是量化句「所有學生都唱歌」是真的當且僅當「學生」集合是「唱歌者」集合的子集，亦即每一名學生都是一名唱歌者，這顯然符合我們對上述量化句的直觀理解。

以上討論的量化句只包含一個廣義量詞，對於多重量化句(即包含多個廣義量詞的量化句)，它們的真值條件便較爲複雜，例如句子「沒有一個男孩愛每個女孩」的真值條件便要表達爲(在下式中，集合 BOY、GIRL 和二元關係 LOVE 分別代表「男孩」、「女孩」和「愛」)：

(5) $$\mathrm{BOY} \cap \{x: \mathrm{GIRL} \subseteq \{y: \mathrm{LOVE}(x, y)\}\} = \varnothing$$

上式的意思是說，BOY 中沒有一個元素是這樣的個體 x：x 所愛的個體 y 包含 GIRL 中的所有元素。爲簡便起見，以下把像(5)這樣的複雜

表達式簡記爲如下的「迭代三分結構」(iterated tripartite structure)：

(6) *no*[BOY][*every*(GIRL)(LOVE)]

上式包含兩層三分結構，其中內層三分結構 *every*(GIRL)(LOVE)處於外層三分結構 *no*[BOY][...]的右論元位置中。「迭代三分結構」的優點是可以清楚顯示多重量化句中各個謂詞處於哪個廣義量詞的哪個論元位置，例如在(6)中，GIRL 便同時處於 *every* 的左論元和 *no* 的右論元位置中。

二、單調性推理

廣義量詞理論除了研究廣義量詞的真值條件外，還研究廣義量詞的各種性質，其中以「單調性」(monotonicity)的研究最引人注目[6]。簡言之，單調性是關於把廣義量詞的論元換成其真母集(proper superset)或真子集(proper subset)後對廣義量詞真值條件的影響。由於<1,1>型廣義量詞有左、右兩個論元，而每一論元都可換成其真母集或真子集，相應地便有四種可能的單調性。利用前述的三分結構，容易定義<1,1>型廣義量詞的各種單調性，例如「左遞減(left decreasing)性」可以定義如下：設 Q 爲<1,1>型廣義量詞，A_1、A_2 和 B 爲集合，則 Q 是左遞減的當且僅當

(7) 若 $A_1 \subset A_2$，則 $Q(A_2)(B) \Rightarrow Q(A_1)(B)$

類似地，我們也可以定義「左遞增(left increasing)性」、「右遞減(right decreasing)性」和「右遞增(right increasing)性」。根據上述定義以及各個廣義量詞的真值條件，容易判斷這些廣義量詞的左、右論元的單調性，例如 *every* 是左遞減、右遞增，*some* 是左遞增、右遞增，而 *no* 則是左遞減、右遞減的。利用這些單調性，便可以推導出「單調性推理」，例如我們有以下推理關係(在以下推理中，STUDENT、MALE-STUDENT、JOG 和 DO-EXERCISE 分別代表由「學生」、「男生」、「跑步者」和「做運動者」組成的集合，其中 MALE-STUDENT ⊂STUDENT 和 JOG ⊂DO-EXERCISE)：

(8) *every*(STUDENT)(JOG) ⇒ *every*(MALE-STUDENT)(DO-EXERCISE)

[6] Peters, S. and Westerstahl, D., *Quantifiers in Language and Logic*. Oxford: Clarendon Press, 2006.

上述推理的理據是，由於 *every* 是左遞減、右遞增的，所以如果命題 *every*(STUDENT)(JOG)是真的，當我們把其左論元 STUDENT 換成其真子集 MALE-STUDENT，並把其右論元 JOG 換成其真母集 DO-EXERCISE 後，所得新命題 *every*(MALE-STUDENT)(DO-EXERCISE)也是真的。用日常語言來表達，這就是說

(9) 所有學生都在跑步。 ⇒ 所有男生都在做運動。

上述推理顯然是有效的。

對於多重量化句，我們可以利用前述的「迭代三分結構」進行單調性推理，關鍵是把遞增性和遞減性分別看作類似於肯定和否定運算，並應用「多重否定律」，即奇數次否定等於否定，偶數次(包括零次)否定等於肯定。以前述的(6)為例，由於 GIRL 同時處於 *every* 的左論元和 *no* 的右論元位置中，而 *every* 和 *no* 分別具有左遞減和右遞減性質，所以 GIRL 受到二重遞減性影響，故應具有遞增性。由此利用 GIRL $\subset$ FEMALE，便可推導出以下有效推理：

(10)
$$no[\text{BOY}][every(\text{GIRL})(\text{LOVE})]$$
$$\Rightarrow no[\text{BOY}][every(\text{FEMALE})(\text{LOVE})]$$

用日常語言來表達，這就是說

(11) 沒有一個男孩愛每個女孩。⇒ 沒有一個男孩愛每個女性。

三、把廣義量詞理解為集合

以上我們把廣義量詞處理成集合之間的「算子」，但其實也可以把廣義量詞看成「集合」。根據集合論，兩個集合的元素之間的關係可以表達為該兩個集合的元素的「有序偶」(ordered pair)組成的集合。由於<1,1>型廣義量詞表達兩個集合之間的關係，它們可以被看成「集合有序偶」的集合。比如說，*every* 和 *some* 便可以分別定義為以下集合：

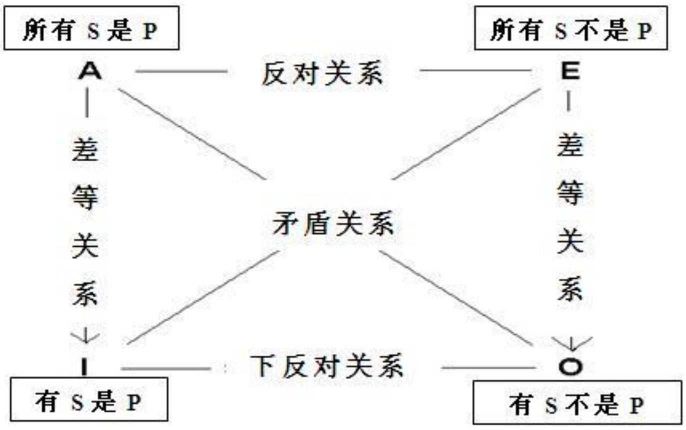
(12) $$every = \{\langle A, B\rangle: A \subseteq B\}$$
(13) $$some = \{\langle A, B\rangle: A \cap B \neq \varnothing\}$$

在上述定義中，A 和 B 爲集合，它們構成有序偶<A, B>中的兩個座標(ordinate)，以下分別稱爲「左座標」和「右座標」。在這個定義下，命題 Q(A)(B)可重新表述爲$\langle A, B\rangle \in Q$。舉例說，量化句「所有學生都唱歌」在經典廣義量詞理論中是表述爲 *every*(STUDENT)(SING)，但在上述新定義下則應表述爲

(14) $\langle \text{STUDENT, SING} \rangle \in \textit{every}$

從直觀上看，上式是說 STUDENT 和 SING 這一對集合滿足 *every* 的定義，即 STUDENT 是 SING 的子集。

利用上述概念，便可以從集合論的角度重新解釋傳統邏輯「對當方陣」(square of opposition)中的關係[7]。對當方陣是指由四個量化句(分別用代號 A、E、I 和 O 代表)排成的陣列，如下圖所示：



上圖顯示 A、E、I 和 O 之間的四種關係。利用(12)和(13)，可以把這四種關係重新理解爲集合 *every* 與 *some* 及其補集之間的關係。比如說，上圖左側 A 與 I 句之間的「差等(subalternate)關係」本來表達一種「單向蘊涵關係」，即

(15) 對所有非空集合 A 和集合 B 而言，

$$\textit{every}(A)(B) \Rightarrow \textit{some}(A)(B)$$

並且 $\textit{some}(A)(B) \neg\Rightarrow \textit{every}(A)(B)$[8]

在上述定義中，必須假設 A 不爲空集，否則上述差等關係不成立，

[7] 周家發：《對當方陣一般模式及其應用》，蔣嚴主編《走近形式語用學》，上海：上海教育出版社，2011 年，第 104-121 頁。

[8] 本文用「¬」代表邏輯學上的「非」以及集合論上的「補」運算。

這個假設稱爲「存在預設」(existential presupposition)。現在，利用(12)和(13)，可以把上式改寫爲

(16) 對所有非空集合 A 和集合 B 而言，

$$\langle A, B\rangle \in \mathit{every} \Rightarrow \langle A, B\rangle \in \mathit{some}$$

並且 $\langle A, B\rangle \in \mathit{some} \neg\Rightarrow \langle A, B\rangle \in \mathit{every}$

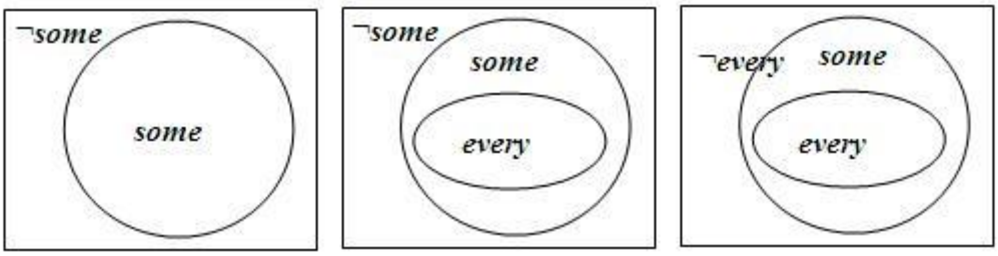
根據集合論，上式正是「真包含(proper inclusion)關係」的定義，即

(17) 在其元素的左座標不爲空集的情況下，

$$\mathit{every} \subset \mathit{some}$$

這樣我們便把廣義量詞之間的「差等關係」重新解釋爲集合之間的「真包含關係」。

對當方陣中的其他關係也可作類似解釋，只須把 E 和 O 句中的廣義量詞分別處理成 *every* 和 *some* 的補集便可，請看下圖：



上圖中的¬*some* 是 *some* 的補集，代表對當方陣中的 E 句；¬*every* 則是 *every* 的補集，代表對當方陣中的 O 句。上面最左圖顯示，*some* 與¬*some* 之間存在互補關係，這對應著對當方陣上 I 與 E 句之間的「矛盾(contradictory)關係」；中間圖顯示 *every* 與¬*some* 不相交且非互補，這對應著對當方陣上 A 與 E 句之間的「反對(contrary)關係」；最右圖顯示 *some* 與¬*every* 相交且合起來覆蓋整個論域，這對應著對當方陣上 I 與 O 句之間的「下反對(subcontrary)關係」。最後，根據集合論，集合 X 是集合 Y 的子集當且僅當¬Y 是¬X 的子集，由此從(17)可以推出¬*some* ⊂ ¬*every*，此即對當方陣上 E 與 O 句之間的「差等關係」。這樣我們便把傳統對當方陣上的各種關係重新理解爲集合之間的關係。

我們可以把以上 *every* 與 *some* 之間的關係推廣至其他廣義量詞，首先定義任意兩個<1,1>型廣義量詞之間的真包含關係：設 Q_1 和 Q_2 爲<1,1>型廣義量詞，則

(18) $Q_1 \subset Q_2 \Leftrightarrow$ 對所有滿足適當預設的集合 A 和 B 而言，

$$Q_1(A)(B) \Rightarrow Q_2(A)(B)$$

$$\text{並且 } Q_2(A)(B) \neg\Rightarrow Q_1(A)(B)$$

上述定義包含「滿足適當預設」這個條件，這是因爲廣義量詞之間的蘊涵關係往往須依賴於某些預設，例如前述的「存在預設」。

根據上述定義以及廣義量詞的真值條件，我們可以找到更多廣義量詞之間的真包含關係。比如說，如果用 *at-least-80%*、*most* 和 *at-least-20%*分別代表「至少八成」、「大多數」和「至少兩成」這三個廣義量詞，那麼我們有以下真包含關係：

(19) 在其元素的左座標不爲空集的情況下，

$$every \subset at\text{-}least\text{-}80\% \subset most \subset at\text{-}least\text{-}20\% \subset some$$

上式的理據是，如果所有 A 都是 B，那麼自然有至少八成 A 是 B，自然亦有大多數 A 是 B (這裡把「大多數」理解爲「至少一半」)，如此類推。

四、以廣義量詞作爲其他廣義量詞論元的單調性推理

廣義量詞作爲一種集合，也可作爲其他廣義量詞論元的一部分，因此我們可以像對待普通集合那樣，透過把某個廣義量詞換成其真母集或真子集，從而推導出新型的單調性推理。以下式爲例：

(20) $no[\text{BOY}][most(\text{GIRL})(\text{LOVE})]$

由於 *most* 處於 *no* 的右論元位置中，而 *no* 具有右遞減性，根據(19)，我們可以推導出以下有效推理：

(21) $no[\text{BOY}][most(\text{GIRL})(\text{LOVE})] \Rightarrow no[\text{BOY}][every(\text{GIRL})(\text{LOVE})]$

用日常語言來表達，這就是

(22) 沒有一個男孩愛大多數女孩。⇒ 沒有一個男孩愛每個女孩。

透過新型的單調性推理，我們可以把傳統對當方陣中的差等關係加以推廣。首先考慮下式：

(23) $every(A)[every(B)(C)]$

由於內層的 *every* 處於外層 *every* 的右論元位置中，內層 *every* 具有遞增性。至於外層的 *every*，由於它不受任何遞減性影響，它也具有遞增性。由此根據(19)，我們有

(24) 在 A 和 B 不為空集的情況下，

$$every(A)[every(B)(C)] \Rightarrow some(A)[some(B)(C)]$$

上式可以看作把傳統差等關係推廣到多重量化句上的一個例子。利用上述方法，我們還可以發掘出更多多重量化句上的差等關係，例如

(25) 在 A 和 B 不為空集的情況下，

$$every(A)[every(B)(C)] \Rightarrow most(A)[at\text{-}least\text{-}80\%(B)(C)]$$

五、以廣義量詞作為命題聯結詞論元的單調性推理

除了作為另一個廣義量詞論元的一部分外，廣義量詞也可作為「命題聯結詞」(propositional connective)的論元，這是因為在廣義量詞理論中，廣義量詞被視為命題的核心，作用於廣義量詞的算子也就是作用於命題的算子，而命題聯結詞正是作用於命題的算子。從這個角度看，命題聯結詞與廣義量詞的關係類似於廣義量詞與其論元(即普通集合)的關係，因此我們也可以討論命題聯結詞的單調性，從而發掘出新型的單調性推理。以下我們將集中討論一元命題聯結詞 *not* (即否定詞)和四個二元命題聯結詞 *if* (即表示充分條件的蘊涵詞)、*only-if* (即表示必要條件的逆蘊涵詞)、*and* (即合取詞)和 *or* (即析取詞)的單調性[9]。

首先考察 *not* 的單調性，以下讓我們證明 *not* 是遞減的。設 $Q_1 \subset Q_2$，並假設 A 和 B 為滿足適當預設的集合，那麼根據(18)，我們有以下關係：

(26) $Q_1(A)(B) \Rightarrow Q_2(A)(B)$

[9] 為顯示二元命題聯結詞與廣義量詞的相似性，以下將把這些二元命題聯結詞寫成「前置算子」，以區別於經典命題邏輯中的「中置算子」，例如我們將把「如果 p，則 q」寫成 *if*(p)(q)，這等價於 $p \Rightarrow q$。

把上式改寫爲與之等價的「逆否命題」(contraposition)，便可得到

(27) $not[Q_2(A)(B)] \Rightarrow not[Q_1(A)(B)]$

由此我們證明了

(28) 若 $Q_1 \subset Q_2$，則 $not[Q_2(A)(B)] \Rightarrow not[Q_1(A)(B)]$

上式符合「遞減性」的定義，由此證得 *not* 是遞減的。

接著考察二元命題聯結詞 *if* 的單調性，這個算子是左遞減、右遞增的，以下讓我們證明其左遞減性。設 $Q_1 \subset Q_2$ 和 $if[Q_2(A)(B)][Q_3(C)(D)]$真，其中 A、B、C、D 爲滿足適當預設的集合，那麼根據(18)和蘊涵詞的定義，我們分別有

(29) $Q_1(A)(B) \Rightarrow Q_2(A)(B)$

(30) $Q_2(A)(B) \Rightarrow Q_3(C)(D)$

根據命題邏輯中的「假言三段論」(hypothetical syllogism)，從(29)和(30)可以推得

(31) $Q_1(A)(B) \Rightarrow Q_3(C)(D)$

上式等同於

(32) $if[Q_1(A)(B)][Q_3(C)(D)]$

至此我們證明了 *if* 滿足

(33) 若 $Q_1 \subset Q_2$，
則 $if[Q_2(A)(B)][Q_3(C)(D)] \Rightarrow if[Q_1(A)(B)][Q_3(C)(D)]$

上式符合「左遞減性」的定義，由此證得 *if* 是左遞減的。類似地，也可以證明 *if* 是右遞增的，總括而言，*if* 是左遞減、右遞增的。基於相同原理，我們也可以證明 *only-if* 是左遞增、右遞減以及 *and* 和 *or* 是左遞增、右遞增的。

利用命題聯結詞的單調性以及廣義量詞之間的真包含關係，我們可以推導出一些新型的單調性推理。比如說，利用 *if* 的左遞減、右遞增性質以及(19)中的真包含關係，可以得到以下推理模式：

(34) 設 A 和 C 爲非空集合，B 和 D 爲集合，
則 *if*[*most*(A)(B)][*most*(C)(D)] ⇒
if[*at-least-80%*(A)(B)][*at-least-20%*(C)(D)]

以下是(34)的一個推理實例：

(35) 如果大多數代表投反對票，則大多數居民會感到失望。
⇒ 如果至少八成代表投反對票，則至少兩成居民會感到失望。

以上推理顯然是有效的。

本文透過把廣義量詞重新理解爲集合，把命題聯結詞的推理與廣義量詞的單調性推理有機地結合起來，從而拓展了單調性推理的範圍。本文的研究結果顯示，單調性推理是日常語言中一種很重要的推理形式。