數學示例：k 向量與 k 餘向量

我們在《數學示例：向量與向量場》和《數學示例：餘向量與 1 形式》中分別介紹了「向量／向量場」和「餘向量／微分 1 形式」的概念，本文主旨是把這兩套概念分別推廣為「k 向量／ k 向量場」和「k 餘向量／微分 k 形式」(其中 k 是大於 1 的正整數)，並介紹這兩對概念的相互作用。在以下討論中，我們考慮的向量空間都是有限維向量空間。

根據上述網頁，向量 v 和餘向量 α 分別是 n 維向量空間 V 和餘向量空間 V^* 的成員，這些成員分別是 V 的有序基底 $B = (e_1, \ldots, e_n)$ 的線性組合和 V^* 的有序基底 $B^* = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ 的線性組合：

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i \qquad (1)$$

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \epsilon_i \qquad (2)$$

其中 v_i 和 α_i 都是實數，分別是 v 和 α 相對於有序基底成員 e_i 和 ϵ_i 的分量。從以上討論可見，只要確定一個向量空間的有序基底，便隨即確定該空間的所有成員。

k 向量(k-vector) 和k 餘向量(k-covector) 是向量和餘向量概念的推廣，它們分別是向量空間 $\bigwedge^k V$ 和 $\bigwedge^k V^*$ 的成員。為確定這些成員，只須確定這些空間的有序基底，而這些有序基底是由 B 和 B^* 的成員建構而成的，它們分別是

$$\bigwedge\nolimits^k B = (e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} : 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n) \qquad (3)$$

$$\bigwedge\nolimits^k B^* = (\epsilon_{i_1} \wedge \ldots \wedge \epsilon_{i_k} : 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n) \qquad (4)$$

以上有序基底的成員是從 e_1 至 e_n 以及從 ϵ_1 至 ϵ_n 中 (不重覆地) 抽取 k 個出來，然後按其下標從小到大把它們排列，並用 $\wedge$ 號連接起來[1]。以上抽

[1]在流形分析中，$\wedge$ 是代表「楔積」(wedge product) 的符號，因此這個符號有特殊意義，這一點要在我們介紹楔積後才能闡明。

取法的總數，即 $C(n,k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}$，就是以上有序基底的成員數目，也就是 $\bigwedge^k V$ 和 $\bigwedge^k V^*$ 的維度。$\bigwedge^k V$ 和 $\bigwedge^k V^*$ 的成員就是上述有序基底的線性組合，換句話說，$\bigwedge^k V$ 的成員 v 和 $\bigwedge^k V^*$ 的成員 α 分別具有以下形式：

$$v = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} v_{i_1\ldots i_k} e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_k} \qquad (5)$$

$$\alpha = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} \alpha_{i_1\ldots i_k} \epsilon_{i_1}\wedge\ldots\wedge \epsilon_{i_k} \qquad (6)$$

其中 $v_{i_1\ldots i_k}$ 和 $\alpha_{i_1\ldots i_k}$ 都是實數，分別是 v 和 α 相對於有序基底成員 $e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_k}$ 和 $\epsilon_{i_1}\wedge\ldots\wedge\epsilon_{i_k}$ 的分量。

舉例說，考慮 $\bigwedge^2\mathbb{R}^3$ 和 $\bigwedge^2(\mathbb{R}^3)^*$。根據 (3) 和 (4)，這兩個空間的有序基底應各有 $C(3,2)=3$ 個成員，即

$$(e_1\wedge e_2, e_1\wedge e_3, e_2\wedge e_3)$$

$$(\epsilon_1\wedge \epsilon_2, \epsilon_1\wedge \epsilon_3, \epsilon_2\wedge \epsilon_3)$$

因此 $\bigwedge^2\mathbb{R}^3$ 和 $\bigwedge^2(\mathbb{R}^3)^*$ 都是 3 維向量空間。$\bigwedge^2\mathbb{R}^3$ 的成員 v 和 $\bigwedge^2(\mathbb{R}^3)^*$ 的成員 α 分別具有以下形式：

$$v = v_{12}e_1\wedge e_2 + v_{13}e_1\wedge e_3 + v_{23}e_2\wedge e_3$$

$$\alpha = \alpha_{12}\epsilon_1\wedge \epsilon_2 + \alpha_{13}\epsilon_1\wedge \epsilon_3 + \alpha_{23}\epsilon_2\wedge \epsilon_3$$

例如

$$v_I = -4e_1\wedge e_2 + 5e_1\wedge e_3 - 6e_2\wedge e_3 \qquad (7)$$

便是 $\bigwedge^2\mathbb{R}^3$ 的一個成員；

$$\alpha_I = -4\epsilon_1\wedge \epsilon_2 + 5\epsilon_1\wedge \epsilon_3 - 6\epsilon_2\wedge \epsilon_3 \qquad (8)$$

則是 $\bigwedge^2(\mathbb{R}^3)^*$ 的一個成員。

根據我們在《數學示例：向量與向量場》和《數學示例：餘向量與 1 形式》的討論，向量和餘向量除了是向量空間的成員外，也是函數，其中餘向量是以向量為論元的線性實值函數；反過來，向量可被看成以餘向量為論元的線性實值函數。如要了解餘向量和向量的作用，只須了解 B^* 各個成員對 B 各個成員的作用以及 B 各個成員對 B^* 各個成員的作用。具體地說，我們有 (下面的 (9) 等於《數學示例：餘向量與 1 形式》中的 (7)，其中 δ_{ij} 是該網頁介紹的「克羅內克 δ 函數」(見該網頁的 (8))，下面的 (10) 則是根據向量和餘向量的相互對稱性質從 (9) 推得的)：

$$\epsilon_i(e_j) = \delta_{ij}\ \ (1\le i,j\le n) \qquad (9)$$

$$e_i(\epsilon_j) = \delta_{ij} \ \ (1 \le i, j \le n) \qquad (10)$$

類似地，k 向量和 k 餘向量除了是向量空間的成員外，也是函數，其中 k 餘向量是一種以 k 個向量組成的有序 k 元組為論元的多重線性實值函數。反過來，k 向量可被看成一種以 k 個餘向量組成的有序 k 元組為論元的多重線性實值函數。從形式上說，設 V 為向量空間，V^* 為相應的餘向量空間，則 k 餘向量就是一種具有 $\alpha : V^k \to \mathbb{R}$ 形式的多重線性函數 α，而 k 向量則是一種具有 $v : (V^*)^k \to \mathbb{R}$ 形式的多重線性函數 v。這裡「多重線性 (multilinear) 函數」是指對其每個論元都有線性性質的函數，具體地說，設 $\alpha \in \bigwedge^k V^*$，則對任何 $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_k \in V$，$c \in \mathbb{R}$，均有

$$\begin{array}{rcl} \alpha(v_1 + w_1, v_2, \ldots, v_k) & = & \alpha(v_1, v_2, \ldots, v_k) + \alpha(w_1, v_2, \ldots, v_k) \\ & \vdots & \\ \alpha(v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k + w_k) & = & \alpha(v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k) + \alpha(v_1, \ldots, v_{k-1}, w_k) \end{array} \qquad (11)$$

$$\begin{array}{rcl} \alpha(cv_1, v_2, \ldots, v_k) & = & c\alpha(v_1, v_2, \ldots, v_k) \\ & \vdots & \\ \alpha(v_1, \ldots, v_{k-1}, cv_k) & = & c\alpha(v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k) \end{array} \qquad (12)$$

類似地，設 $v \in \bigwedge^k V$，則對任何 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_k \in V^*$，$c \in \mathbb{R}$，均有

$$\begin{array}{rcl} v(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) & = & v(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) + \alpha(\beta_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \\ & \vdots & \\ v(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k + \beta_k) & = & v(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k) + v(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \beta_k) \end{array} \qquad (13)$$

$$\begin{array}{rcl} v(c\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) & = & cv(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \\ & \vdots & \\ v(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, c\alpha_k) & = & cv(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k) \end{array} \qquad (14)$$

k 餘向量和 k 向量除了具有作為函數的多重線性性質外，也具有作為向量空間成員的線性性質。具體地說，設 $\alpha, \beta \in \bigwedge^k V^*$，則對任何 $v_1, \ldots, v_k \in V$，$c \in \mathbb{R}$，均有

$$(\alpha + \beta)(v_1, \ldots, v_k) = \alpha(v_1, \ldots, v_k) + \beta(v_1, \ldots, v_k) \qquad (15)$$

$$(c\alpha)(v_1, \ldots, v_k) = c\alpha(v_1, \ldots, v_k) \qquad (16)$$

類似地，設 $v, w \in \bigwedge^k V$，則對任何 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V^*$，$c \in \mathbb{R}$，均有

$$(v + w)(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = v(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) + w(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \qquad (17)$$

$$(cv)(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = cv(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \qquad (18)$$

如要了解 k 餘向量和 k 向量的作用，只須了解 $\bigwedge^k B^*$ 各個成員對任意 k 個 B 成員的作用以及 $\bigwedge^k B$ 各個成員對任意 k 個 B^* 成員的作用。具體地說，我們有 (在下式中，$|\ |$ 代表行列式)：

$$\epsilon_{i_1} \wedge \ldots \wedge \epsilon_{i_k}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = \begin{vmatrix} \epsilon_{i_1}(e_{j_1}) & \ldots & \epsilon_{i_1}(e_{j_k}) \\ \vdots & & \\ \epsilon_{i_k}(e_{j_1}) & \ldots & \epsilon_{i_k}(e_{j_k}) \end{vmatrix} \tag{19}$$

$$e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}(\epsilon_{j_1}, \ldots, \epsilon_{j_k}) = \begin{vmatrix} e_{i_1}(\epsilon_{j_1}) & \ldots & e_{i_1}(\epsilon_{j_k}) \\ \vdots & & \\ e_{i_k}(\epsilon_{j_1}) & \ldots & e_{i_k}(\epsilon_{j_k}) \end{vmatrix} \tag{20}$$

把 k 餘向量和 k 向量分別表示成 (6) 和 (5) 的形式，以及把 k 個向量和 k 個餘向量分別表示成 (1) 和 (2) 的形式，並利用 k 餘向量和 k 向量作為函數的多重線性性質 (即 (11) － (14))、作為向量空間成員的線性性質 (即 (15) － (18)) 以及以上兩式，便可求得任意 k 餘向量對任意 k 個向量的作用以及任意 k 向量對任意 k 個餘向量的作用。

不過，如直接用以上方法進行計算，計算過程會頗為繁冗，因此以下先進行較簡單的計算，看看能否從中總結出一些規律。為此，以下首先按上段所述步驟求 $\epsilon_1 \wedge \epsilon_2([1, 0, -2]^T, [0, 3, 0]^T)$：

$$\begin{aligned}
& \epsilon_1 \wedge \epsilon_2([1, 0, -2]^T, [0, 3, 0]^T) \\
= \; & \epsilon_1 \wedge \epsilon_2(e_1 - 2e_3, 3e_2) \\
= \; & 3\epsilon_1 \wedge \epsilon_2(e_1, e_2) - 6\epsilon_1 \wedge \epsilon_2(e_3, e_2) \\
= \; & 3\begin{vmatrix} \epsilon_1(e_1) & \epsilon_1(e_2) \\ \epsilon_2(e_1) & \epsilon_2(e_2) \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} \epsilon_1(e_3) & \epsilon_1(e_2) \\ \epsilon_2(e_3) & \epsilon_2(e_2) \end{vmatrix} \\
= \; & 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
= \; & (3)(1) - (6)(0) \\
= \; & 3
\end{aligned}$$

不難把以上計算結果推廣到一般情況：

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 \wedge \epsilon_2([v_{11}, v_{12}, v_{13}]^T, [v_{21}, v_{22}, v_{23}]^T) &= v_{11}v_{22} - v_{12}v_{21} \\
&= \begin{vmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

此外，還有以下結果：

$$\epsilon_1 \wedge \epsilon_3([v_{11}, v_{12}, v_{13}]^T, [v_{21}, v_{22}, v_{23}]^T) = v_{11}v_{23} - v_{13}v_{21}$$

$$
\begin{aligned}
& = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{13} & v_{23} \end{vmatrix} \\
\epsilon_2 \wedge \epsilon_3([v_{11}, v_{12}, v_{13}]^T, [v_{21}, v_{22}, v_{23}]^T) & = v_{12}v_{23} - v_{13}v_{22} \\
& = \begin{vmatrix} v_{12} & v_{22} \\ v_{13} & v_{23} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

由此可見，把 $\bigwedge^2 V^*$ 中成員 $\epsilon_{i_1} \wedge \epsilon_{i_2}$ 作用於 V 中任意兩個向量，等於從該兩個向量取得第 i_1 和第 i_2 個分量並組成一個方陣，然後求這個方陣的行列式。由此還可進一步推斷，把 $\bigwedge^k V^*$ 中成員 $\epsilon_{i_1} \wedge \ldots \wedge \epsilon_{i_k}$ 作用於 V 中任意 k 個向量，等於從該 k 個向量取得第 i_1、...、第 i_k 個分量並組成一個方陣，然後求這個方陣的行列式。

總結出上述規律後，便可求一般 k 餘向量作用於 k 個一般向量的結果，例如以下是 $\alpha_I([1,0,-2]^T,[0,3,0]^T)$ 的計算步驟：

$$
\begin{aligned}
& \alpha_I([1,0,-2]^T,[0,3,0]^T) \\
= \ & (-4\epsilon_1 \wedge \epsilon_2 + 5\epsilon_1 \wedge \epsilon_3 - 6\epsilon_2 \wedge \epsilon_3)([1,0,-2]^T,[0,3,0]^T) \\
= \ & -4\epsilon_1 \wedge \epsilon_2([1,0,-2]^T,[0,3,0]^T) + 5\epsilon_1 \wedge \epsilon_3([1,0,-2]^T,[0,3,0]^T) \\
& -6\epsilon_2 \wedge \epsilon_3([1,0,-2]^T,[0,3,0]^T) \\
= \ & -4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\
= \ & (-4)(3) + (5)(0) - (6)(6) \\
= \ & -48
\end{aligned}
$$

根據 (19) 和 (20) 的相似性，可以推斷只須依循與上面相似的步驟，便可求得 k 向量作用於 k 個餘向量的結果，例如讀者可自行驗證以下結果：

$$v_I([1,0,-2],[0,3,0]) = -48$$

我們在前面指出，k 餘向量和 k 向量具有多重線性性質。但由於 (19) 和 (20) 涉及行列式的計算，k 餘向量和 k 向量還具有一種與行列式密切相關的性質－「交錯 (alternating) 性質」，又稱「反對稱 (skew symmetric) 性質」。根據線性代數，行列式的交錯性質是指，若把某 $k \times k$ 方陣的任意兩行或兩列對調位置，會使該方陣的行列式改變正負號。此一性質也可表述為，若某 $k \times k$ 方陣的任意兩行或兩列相同，則該方陣的行列式等於 0。

k 餘向量和 k 向量的交錯性質則是指，若把 k 餘向量 α 和 k 向量 v 的任意兩個不同論元對調位置，會使 α 和 v 的值改變正負號。從形式上說，設 $\alpha \in \bigwedge^k V^*$，$v \in \bigwedge^k V$，則對任何 $v_1, \ldots, v_k \in V$，$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V^*$，均有

$$\alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -\alpha(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k) \qquad (21)$$

$$v(\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_j,\ldots,\alpha_k) = -v(\alpha_1,\ldots,\alpha_j,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_k) \qquad (22)$$

上述性質也可表述為，若 k 餘向量 α 和 k 向量 v 的任意兩個不同論元有相同的值，則 α 和 v 的值等於 0。從形式上說，設 $\alpha \in \bigwedge^k V^*$，$v \in \bigwedge^k V$，則對任何 $v_1,\ldots,v_k \in V$，$\alpha_1,\ldots,\alpha_k \in V^*$，均有

$$\alpha(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_i,\ldots,v_k) = 0 \qquad (23)$$

$$v(\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_k) = 0 \qquad (24)$$

舉例說，讀者可自行計算以下結果：

$$\alpha_I([0,3,0]^T,[1,0,-2]^T) = 48$$

此一結果與前面算得的 $\alpha_I([1,0,-2]^T,[0,3,0]^T) = -48$ 相差一個正負號，由此驗證了 (21)。此外，讀者也可自行計算以下結果：

$$\alpha_I([1,0,-2]^T,[1,0,-2]^T) = 0$$

上述結果驗證了 (23)。

總上所述，k 餘向量和 k 向量是分別以 k 個向量和 k 個餘向量為論元，且具有多重線性和交錯性質的實值函數。事實上，任何具有上述性質的函數都屬於 $\bigwedge^k V^*$ 或 $\bigwedge^k V$，而且可以表示成 (6) 或 (5) 的線性組合形式。

以上是有關一般向量空間上的 k 向量和 k 餘向量的知識，但在流形分析中，我們並不研究所有 k 向量和 k 餘向量，而是集中研究由切向量和餘切向量構成的 k 向量和 k 餘向量，這些 k 向量和 k 餘向量可分別稱為k 切向量(k-tangent vector) 和k 餘切向量(k-cotangent vector)。事實上，給定 m 維流形 M，它的每一點 p 處不僅「寄生」著眾多切向量和餘切向量，而且對應每一個大於 1 的正整數 k，還「寄生」著眾多 k 切向量和 k 餘切向量，這些 k 切向量和 k 餘切向量構成兩個向量空間，分別稱為k 切空間(k-tangent space)(記作 $\bigwedge^k T_pM$) 和k 餘切空間(k-cotangent space)(記作 $\bigwedge^k T_p^*M$)。

由於 $\bigwedge^k T_pM$ 和 $\bigwedge^k T_p^*M$ 都是向量空間，它們各有其有序基底。當然我們可以把這兩類有序基底寫成前面 (3) 和 (4) 所示的標準有序基底形式，但在流形分析中，我們可以應用等式 $e_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ 和 $\epsilon_i = dx_i$ [2]，把 (3) 和 (4) 改寫成以下形式：

$$\bigwedge^k B_p = \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\right|_p \wedge \ldots \wedge \left.\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\right|_p : 1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m \right) \qquad (25)$$

[2]這兩個等式分別來自《數學示例：向量與向量場》中的 (5) 和《數學示例：餘向量與 1 形式》中的 (15)。

$$\bigwedge^k B_p^* = ((dx_{i_1})_p \wedge \ldots \wedge (dx_{i_k})_p : 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m) \qquad (26)$$

因此「寄生」於 p 點的 k 切向量和 k 餘切向量可以表示成以下線性組合 (以下兩式是 (5) 和 (6) 的改寫)：

$$v_p = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m} v_{i_1 \ldots i_k} \left.\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\right|_p \wedge \ldots \wedge \left.\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\right|_p \qquad (27)$$

$$\alpha_p = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m} \alpha_{i_1 \ldots i_k} (dx_{i_1})_p \wedge \ldots \wedge (dx_{i_k})_p \qquad (28)$$

「寄生」於 p 點的 k 切向量和 k 餘切向量除了是向量空間的成員外，也是具有多重線性和交錯性質的實值函數。如要了解這些函數的作用，可以運用以下兩式 (以下兩式是 (19) 和 (20) 的改寫)：

$$\begin{aligned} &(dx_{i_1})_p \wedge \ldots \wedge (dx_{i_k})_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_{j_k}}\right|_p \right) \\ &= \begin{vmatrix} (dx_{i_1})_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\right|_p \right) & \ldots & (dx_{i_1})_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_{j_k}}\right|_p \right) \\ \vdots & & \\ (dx_{i_k})_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\right|_p \right) & \ldots & (dx_{i_k})_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_{j_k}}\right|_p \right) \end{vmatrix} \end{aligned} \qquad (29)$$

$$\begin{aligned} &\left.\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\right|_p \wedge \ldots \wedge \left.\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\right|_p ((dx_{j_1})_p, \ldots, (dx_{j_k})_p) \\ &= \begin{vmatrix} \left.\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\right|_p ((dx_{j_1})_p) & \ldots & \left.\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\right|_p ((dx_{j_k})_p) \\ \vdots & & \\ \left.\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\right|_p ((dx_{j_1})_p) & \ldots & \left.\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\right|_p ((dx_{j_k})_p) \end{vmatrix} \end{aligned} \qquad (30)$$

在計算上述行列式時，要運用以下兩式 (以下兩式是 (9) 和 (10) 的改寫)：

$$(dx_i)_p \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p \right) = \delta_{ij} \ \ (1 \leq i, j \leq m) \qquad (31)$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p ((dx_j)_p) = \delta_{ij} \ \ (1 \leq i, j \leq m) \qquad (32)$$

接下來讓我們用一個實例說明上述概念，考慮三維流形 $\mathbb{R}^3$ 及其上的點 $(1,3,5)$ 處的 3 切空間 $\bigwedge^3 T_{(1,3,5)}\mathbb{R}^3$ 和 3 餘切空間 $\bigwedge^3 T^*_{(1,3,5)}\mathbb{R}^3$，這兩個空間的有序基底都只有 $C(3,3)=1$ 個成員，分別為：

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_{(1,3,5)} \wedge \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_{(1,3,5)} \wedge \left.\frac{\partial}{\partial x_3}\right|_{(1,3,5)}$$

$$(dx_1)_{(1,3,5)} \wedge (dx_2)_{(1,3,5)} \wedge (dx_3)_{(1,3,5)}$$

$\bigwedge^3 T_{(1,3,5)}\mathbb{R}^3$ 和 $\bigwedge^3 T^*_{(1,3,5)}\mathbb{R}^3$ 的任何成員可分別表示成上述有序基底成員的線性組合，例如

$$(v_{II})_{(1,3,5)} = 8 \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_{(1,3,5)} \wedge \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_{(1,3,5)} \wedge \left.\frac{\partial}{\partial x_3}\right|_{(1,3,5)} \tag{33}$$

便是 $\bigwedge^3 T_{(1,3,5)}\mathbb{R}^3$ 的一個成員；

$$(\alpha_{II})_{(1,3,5)} = 8(dx_1)_{(1,3,5)} \wedge (dx_2)_{(1,3,5)} \wedge (dx_3)_{(1,3,5)} \tag{34}$$

則是 $\bigwedge^3 T^*_{(1,3,5)}\mathbb{R}^3$ 的一個成員。

根據前面的討論，把 $(\alpha_{II})_{(1,3,5)}$ 作用於 $T_{(1,3,5)}\mathbb{R}^3$ 中的 3 個向量，或者把 $(v_{II})_{(1,3,5)}$ 作用於 $T^*_{(1,3,5)}\mathbb{R}^3$ 中的 3 個餘向量，可各得到一個實數。以下讓我們計算 $(\alpha_{II})_{(1,3,5)}([1,0,-2]^T_{(1,3,5)},[0,3,0]^T_{(1,3,5)},[2,-1,3]^T_{(1,3,5)})$：

$$\begin{aligned}
& (\alpha_{II})_{(1,3,5)}\left([1,0,-2]^T_{(1,3,5)},[0,3,0]^T_{(1,3,5)},[2,-1,3]^T_{(1,3,5)}\right) \\
= \ & 8(dx_1)_{(1,3,5)} \wedge (dx_2)_{(1,3,5)} \wedge (dx_3)_{(1,3,5)}\left([1,0,-2]^T_{(1,3,5)},[0,3,0]^T_{(1,3,5)},[2,-1,3]^T_{(1,3,5)}\right) \\
= \ & 8\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\
= \ & 8 \times 21 \\
= \ & 168
\end{aligned}$$

如前所述，對應每一個大於 1 的正整數和流形 M 的每一點 p，都有一個 k 切空間 $\bigwedge^k T_pM$ 和一個 k 餘切空間 $\bigwedge^k T^*_pM$。現在如果把所有點處的 k 切空間的所有成員組成一個集合，並把所有點處的 k 餘切空間的所有成員組成另一個集合，便可分別得到 M 的k 切叢(k-tangent bundle)，記作 $\bigwedge^k TM$ 和k 餘切叢(k-cotangent bundle)，記作 $\bigwedge^k T^*M$，即

$$\bigwedge^k TM = \{v_p \in \bigwedge^k T_pM : p \in M\} \tag{35}$$

$$\bigwedge^k T^*M = \{\alpha_p \in \bigwedge^k T_p^*M : p \in M\} \qquad (36)$$

從 k 切叢和 k 餘切叢可以進一步得到 k 向量場和微分 k 形式的概念。設 M 為流形，則 M 上的k 向量場(k-vector field) 是指以下函數：

$$v : M \to \bigwedge^k TM;\ \ v(x) \in \bigwedge^k T_xM \qquad (37)$$

而 M 上的微分 k 形式(differential k-form) 則是指以下函數：

$$\alpha : M \to \bigwedge^k T^*M;\ \ \alpha(x) \in \bigwedge^k T_x^*M \qquad (38)$$

以上兩式顯示，微分 k 形式與 k 餘切向量的關係類似 k 向量場與 k 向量的關係，因此微分 k 形式其實就是「k 餘切向量場」。此外，根據我們在《數學示例：向量與向量場》和《數學示例：餘向量與 1 形式》中有關「纖維叢」和「截面」的討論，可知 k 向量場和微分 k 形式分別是 k 切叢和 k 餘切叢的截面，因此可以沿用這兩個網頁的符號，把流形 M 上所有 k 向量場組成的集合記作 $\Gamma(\bigwedge^k TM)$，所有微分 k 形式組成的集合則記作 $\Gamma(\bigwedge^k T^*M)$。

根據以上定義，k 向量場和微分 k 形式可以表示成以下形式：

$$v(x) = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le m} v_{i_1\ldots i_k}(x) \left.\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\right|_x \wedge \ldots \wedge \left.\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\right|_x \qquad (39)$$

$$\alpha(x) = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le m} \alpha_{i_1\ldots i_k}(x)(dx_{i_1})_x \wedge \ldots \wedge (dx_{i_k})_x \qquad (40)$$

以上兩式跟 (27) 和 (28) 非常相似，所不同者僅在於以上兩式帶有可變論元 x，顯示這是函數 (即 k 向量場和微分 k 形式)，而 (27) 和 (28) 則帶有固定下標 p，顯示這是單個點上的 k 向量和 k 餘向量。

以下是 $\mathbb{R}^3$ 上微分 3 形式的例子：

$$\alpha_{III}(x_1, x_2, x_3) = ({x_2}^2 - x_1)(dx_1)_{(x_1,x_2,x_3)} \wedge (dx_2)_{(x_1,x_2,x_3)} \wedge (dx_3)_{(x_1,x_2,x_3)} \qquad (41)$$

如把上述函數作用於點 $(1, 3, 5)$，可得

$$\alpha_{III}(1, 3, 5) = 8(dx_1)_{(1,3,5)} \wedge (dx_2)_{(1,3,5)} \wedge (dx_3)_{(1,3,5)}$$

此即前面討論過的 $\bigwedge^3 T^*_{(1,3,5)}\mathbb{R}^3$ 中的 3 餘向量 $(\alpha_{II})_{(1,3,5)}$。如把上述函數作用於其他點，便可得到其他點處的 3 餘向量，例如

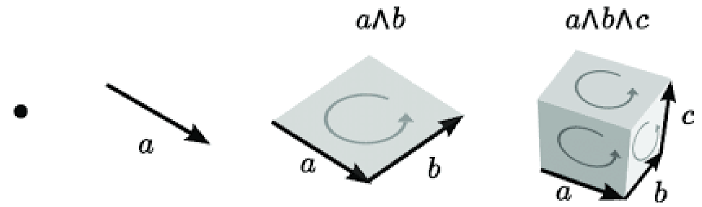
$$\alpha_{III}(-1, -3, -5) = 10(dx_1)_{(1,3,5)} \wedge (dx_2)_{(1,3,5)} \wedge (dx_3)_{(1,3,5)}$$

這是 $\bigwedge^3 T^*_{(-1,-3,-5)}\mathbb{R}^3$ 中的 3 餘向量。

在上述各個概念的定義中，k 被限制為大於 1 的正整數。但在某些情況下，為使用統一的名稱和符號，可以把上述各個概念推廣到 k 等於 1 的情況，從而討論「1 向量」、「1 餘向量」等，以及這些數學對象的集合，如 $\bigwedge^1 T_pM$、$\bigwedge^1 T_p^*M$ 等。容易看到，「1 向量」和「1 餘向量」分別就是《數學示例：向量與向量場》和《數學示例：餘向量與 1 形式》所介紹的「向量」和「餘向量」，由此可知對 M 的任何點 p，都有 $\bigwedge^1 T_pM = T_pM$ 和 $\bigwedge^1 T_p^*M = T_p^*M$。

再進一步，還可以把上述各個概念推廣到 k 等於 0 的情況。我們約定，「0 向量」和「0 餘向量」都是指純量 (即實數)[3]，因此 0 向量組成的集合和 0 餘向量組成的集合都是指實數集，即對 M 的任何點 p，都有 $\bigwedge^0 T_pM = \bigwedge^0 T_p^*M = \mathbb{R}$。這樣「0 向量場」和「微分 0 形式」都是指把 M 上的點映射為實數的函數，即 M 上的實值函數，由此我們有 $\Gamma(\bigwedge^0 TM) = \Gamma(\bigwedge^0 T^*M) = \mathbb{R}^M$ [4]。

在結束前，有必要指出雖然本文一直把 k 向量和 k 餘向量處理成互相對稱的數學對象，但兩者其實存在差異，一個重要差異是 k 向量有一種獨特的幾何解釋。我們知道一般的向量 (即 1 向量) 可以表示成一個箭頭，此一幾何解釋可以推廣到其他低維度 k 向量，請看下圖：



從上圖可以看到，0 向量可以表示成一個點，2 向量可以表示成由兩個箭頭形成的平行四邊形，3 向量則可以表示成由三個箭頭形成的平行六面體。正是上述差異 (以及其他差異) 使 k 向量和 k 餘向量各有不同的應用範圍。

連結至數學專題
連結至周家發網頁

[3]這裡的「0 向量」跟向量代數中的「零向量」是不同的概念，前者是「k 向量」概念的推廣，根據這裡的約定，是指任何實數；後者則是指向量空間中的「加法單位元」，是一個特定的向量。

[4]在集合論中，把以集合 A 為定義域並以集合 B 為對應域的函數組成的集合記作 B^A，因此 M 上的實值函數組成的集合可記作 $\mathbb{R}^M$。