數學示例：Z 變換

我們在《數學示例：拉普拉斯變換》中介紹了連續函數「拉普拉斯變換」的概念。有趣的是，離散函數也有相應的概念－「Z 變換」，而且有很多與拉普拉斯變換相似之處。Z 變換的一個重要用途是把差分／和分方程轉化成較易解的方程，因而是差分／和分方程理論中的重要課題。本文主旨是介紹 Z 變換的基本概念和結果，以及如何運用此概念求解某些線性差分／和分方程 (組)。

正如拉普拉斯變換以積分作為其定義，Z 變換以和分作為其定義。設 $f(x)$ 為以 x 為變項並在 $\{0, 1, 2\ldots\}$ 上有定義的離散函數，則 $f(x)$ 的Z 變換(Z-transform)，以下記作 $F(z)$ 或 $\mathcal{Z}\{f(x)\}$，是以 z 為變項並由下式定義的函數 (如果以下極限存在)[1]：

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(x)\} = \lim_{b\to\infty} \sum_{x=0}^{x=b} f(x) z^{-x} \qquad (1)$$

以下讓我們用上述定義以及「差和分基本定理」(見《數學示例：積分與和分》的 (13)) 求最簡單的常數函數 $f(x) = 1$ 的 Z 變換如下：

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{1\} &= \lim_{b\to\infty} \sum_{x=0}^{x=b} (1 \times z^{-x}) \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{z^{-x}}{z^{-1} - 1} \right]_{x=0}^{x=b+1} \end{aligned}$$

[1]在有關差分／和分方程的理論中，除了 Z 變換外，還有一個「母函數」(generating function) 概念。設 $f(x)$ 如上定義，則其母函數，以下記作 $\mathcal{G}\{f(x)\}$，是以 t 為變項並由下式定義的函數 (如果以下極限存在)：

$$\mathcal{G}\{f(x)\} = \lim_{b\to\infty} \sum_{x=0}^{x=b} f(x) t^x$$

比較上式與 (1)，可以看到「母函數」與「Z 變換」非常相似。容易看到，只要把 $z = \frac{1}{t}$ 代入 $\mathcal{Z}\{f(x)\}$，便可得到 $\mathcal{G}\{f(x)\}$。因此之故，以下將要介紹的很多有關「Z 變換」的概念和結果，都可移植到「母函數」。不過，母函數也有其自身的獨特內容，本文不擬作進一步介紹。

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{z^{-b}-z}{1-z}$$
$$= \frac{z}{z-1}, \quad 若|z|>1 \qquad (2)$$

請注意上述計算結果帶有「若 $|z|>1$」這個條件，因為若 $|z|\le 1$，上式中的極限不存在。

反過來，設 $F(z)$ 為以 z 為變項的函數，則 $F(z)$ 的逆 Z 變換(inverse Z-transform)，以下記作 $f(x)$ 或 $\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}$，是以 x 為變項並且滿足 $\mathcal{Z}\{f(x)\}=F(z)$ 的函數。舉例說，根據 (2) 所示的計算結果，可知

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}\right\}=1 \qquad (3)$$

理論上存在直接求「逆 Z 變換」的公式，但由於有關公式頗為複雜，一般是透過辨認 $F(z)$ 的外形推斷其逆變換。下表列出某些初等離散函數的「Z 變換」(在下表中，$n\in\mathbb{N}$，$a\in\mathbb{R}$)：

表 1

$f(x)$	$\mathcal{Z}\{f(x)\}$
1	$\frac{z}{z-1}$
$x^{\underline{n}}$	$\frac{n!z}{(z-1)^{n+1}}$
a^x	$\frac{z}{z-a}$
$\sin(ax)$	$\frac{z\sin a}{z^2-2z\cos a+1}$
$\cos(ax)$	$\frac{z^2-z\cos a}{z^2-2z\cos a+1}$

為簡單起見，上表並不列出使 $\mathcal{Z}\{f(x)\}$ 存在的條件。以下假設所討論的函數 $f(x)$ 都存在相對應的 $F(z)$。

接著介紹上述 $\mathcal{Z}$ 和 $\mathcal{Z}^{-1}$ 算子的一些重要性質。首先，這兩個算子具有線性性質，即對任何離散函數 $f(x)$、$g(x)$、$F(z)$、$G(z)$ 和任何實數 c，都有 $\mathcal{Z}\{f(x)+g(x)\}=\mathcal{Z}\{f(x)\}+\mathcal{Z}\{g(x)\}$，$\mathcal{Z}\{cf(x)\}=c\mathcal{Z}\{f(x)\}$ 以及 $\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)+G(z)\}=\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}+\mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\}$，$\mathcal{Z}^{-1}\{cF(z)\}=c\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}$。

以下定理提供離散函數 $f(x)$ 與指數函數 a^x 或遞降階乘函數 $(x+n-1)^{\underline{n}}$ 的乘積的 Z 變換。

定理 1：設 $f(x)$ 為離散函數，$F(z)$ 為其 Z 變換，$a\in\mathbb{R}$，$n\in\mathbb{N}$，則

(i) $\mathcal{Z}\{a^x f(x)\} = F\left(\frac{z}{a}\right)$ (4)

(ii) $\mathcal{Z}\{(x+n-1)^{\underline{n}} f(x)\} = (-1)^n z^n D^n F(z)$ (5)

跟拉普拉斯變換相似，Z 變換理論中也有一個「捲積」概念，而且也具有一般乘法的重要性質。設 $f(x)$ 和 $g(x)$ 為離散函數，則這兩個函數的捲積(convolution)，以下記作 $f(x) * g(x)$，可定義為

$$f(x) * g(x) = \sum_{t=0}^{t=x} f(t) g(x-t) \qquad (6)$$

以下定理提供函數捲積的 Z 變換。

定理 2：設 $f(x)$ 和 $g(x)$ 為離散函數，$F(z)$ 和 $G(z)$ 為其 Z 變換，則(在下式中，$\times$ 代表函數之間的 (普通) 乘積)：

$$\mathcal{Z}\{f(x) * g(x)\} = F(z) \times G(z) \qquad (7)$$

上述定理可以概括為，「捲積」的 Z 變換等於 Z 變換的 (普通)「乘積」。

為把 Z 變換用於求解差分方程，接著引入以下有關函數移位的 Z 變換的定理。

定理 3：設 $f(x)$ 為離散函數，$F(z)$ 為其 Z 變換，$n \in \mathbb{N}$，則：

$$\mathcal{Z}\{E^n f(x)\} = z^n F(z) - z^n f(0) - z^{n-1} E f(0) - \ldots - z E^{n-1} f(0) \qquad (8)$$

接下來讓我們應用上述概念和結果，考慮以下 2 階常差分方程初值問題：

$$E^2 f(x) + 4f(x) = 0, \quad f(0) = 2, Ef(0) = 2 \qquad (9)$$

首先應用「表 1」、Z 算子的線性性質和 (8) 求上式的 Z 變換如下：

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{E^2 f(x) + 4f(x)\} &= \mathcal{Z}\{0\} \\ z^2 F(z) - z^2 f(0) - zEf(0) + 4F(z) &= 0 \\ (z^2+4)F(z) - 2z^2 - 2z &= 0 \qquad (10) \end{aligned}$$

經上述計算，我們把以 $f(x)$ 為未知項的差分方程 (9) 變換成以 $F(z)$ 為未知項的代數方程 (10)，由此可解得

$$F(z) = \frac{2z^2 + 2z}{z^2 + 4} \qquad (11)$$

接著應用「表 1」、Z^{-1} 算子的線性性質、「定理 1」以及其他代數運算技巧，求上式的逆 Z 變換，所得結果 $f(x)$ 就是 (9) 的解，以下是其計算過程：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{2z^2+2z}{z^2+4}\right\} \\
&= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{2z^2}{z^2+4}\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{2z}{z^2+4}\right\} \\
&= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{\frac{z^2}{2}}{\frac{z^2}{4}+1}\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{\frac{z}{2}}{\frac{z^2}{4}+1}\right\} \\
&= 2\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - \frac{z}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+1}\right\} + \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{\frac{z}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+1}\right\} \\
&= 2^{x+1}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 2^x\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \qquad (12)
\end{aligned}
$$

在上面第三行，我們把 $\mathcal{Z}^{-1}\{\ \}$ 內的分子和分母同時除以 4，使分母中的常數項變成 1。接著在第四行，我們在 $\mathcal{Z}^{-1}\{\ \}$ 內的分子和分母加入適當的項 (這裡利用了 $\cos(\frac{\pi}{2})=0$ 和 $\sin(\frac{\pi}{2})=1$ 此一事實)，使 $\mathcal{Z}^{-1}\{\ \}$ 內的數式與「表 1」所示 $\mathcal{Z}\{\cos(\frac{\pi x}{2})\}$ 和 $\mathcal{Z}\{\sin(\frac{\pi x}{2})\}$ 的形式吻合。經上述操作後，再應用「表 1」和 (4)，便得到上面最後一行的結果。

接下來看一個可用到 (5) 的例子，考慮以下 1 階常差分方程初值問題：

$$Ef(x) - f(x) + x2^x = 0,\ \ f(0) = 0 \qquad (13)$$

上式的第三項是冪函數 x 與指數函數 2^x 的乘積，因此可以應用 (4) 或 (5) 求其 Z 變換，以下讓我們應用 (5) 作以下計算：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{x2^x\} &= -zD\mathcal{Z}\{2^x\} \\
&= -zD\left(\frac{z}{z-2}\right) \\
&= \frac{2z}{(z-2)^2} \qquad (14)
\end{aligned}
$$

接著計算 (13) 的 Z 變換如下：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{Ef(x) - f(x) + x2^x\} &= \mathcal{Z}0\} \\
zF(z) - zf(0) - F(z) + \frac{2z}{(z-2)^2} &= 0 \\
(z-1)F(z) + \frac{2z}{(z-2)^2} &= 0 \qquad (15)
\end{aligned}
$$

經上述計算，我們把以 $f(x)$ 為未知項的差分方程 (13) 變換成以 $F(z)$ 為未知項的代數方程 (15)，由此可解得

$$F(z)=\frac{2z}{(1-z)(z-2)^2} \qquad (16)$$

接著要求上式的逆 Z 變換。對上式直接進行部分分式分解，會得到 $\frac{2z}{(1-z)(z-2)^2}=\frac{2}{1-z}+\frac{2}{z-2}-\frac{4}{(z-2)^2}$，此一結果中每一項的分子都是不含 z 的常數，跟「表 1」中第二欄的形式並不吻合，無法應用「表 1」。為補救此一問題，應先把 z 從上式右端的分子抽出來，然後才進行部分分式分解。根據有關部分分式分解的理論，此即假設

$$\frac{2}{(1-z)(z-2)^2}=\frac{k_1}{1-z}+\frac{k_2}{z-2}+\frac{k_3}{(z-2)^2}$$

從上式可解出 $k_1=2, k_2=2, k_3=-2$，由此可求 (13) 的解如下：

$$\begin{aligned}
f(x) &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{z\times\frac{2}{(1-z)(z-2)^2}\right\}\\
&= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{2z}{1-z}+\frac{2z}{z-2}-\frac{2z}{(z-2)^2}\right\}\\
&= -2\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}\right\}+2\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-2}\right\}-\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{2z}{(z-2)^2}\right\}\\
&= -2+2^{x+1}-x2^x \qquad (17)
\end{aligned}$$

在上面第四行，我們運用前面的計算結果 (14) 以求得 $\frac{2z}{(z-2)^2}$ 的逆 Z 變換為 $x2^x$。另一種做法是把 $\frac{2z}{(z-2)^2}$ 的分子分母同時乘以 4，並把該分式寫成 $\frac{\frac{z}{2}}{(\frac{z}{2}-1)^2}$ 的形式，接著應用「表 1」和 (4)，同樣可求得該分式的逆 Z 變換為 $x2^x$。

以上討論的都是差分方程初值問題的例子，接下來考慮以下 2 階常差分方程邊值問題：

$$E^2f(x)-4f(x)=0,\ \ x\in\{0,1,2,3,(4,5)\},\ \ f(0)=1, f(5)=96 \qquad (18)$$

首先求上式的 Z 變換如下：

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{E^2f(x)-4f(x)\} &= \mathcal{Z}\{0\}\\
z^2F(z)-z^2f(0)-zEf(0)-4F(z) &= 0\\
(z^2-4)F(z)-z^2-zEf(0) &= 0 \qquad (19)
\end{aligned}$$

經上述計算，我們把以 $f(x)$ 為未知項的微分方程 (18) 變換成以 $F(z)$ 為未知項的代數方程 (19) (其中 $Ef(0)$ 是待求的常數)，由此可解得

$$F(z)=\frac{zEf(0)}{(z+2)(z-2)}+\frac{z^2}{(z+2)(z-2)} \qquad (20)$$

接下來要求上式的逆 Z 變換。對於上式右端第一項，應先把 z 從該項的分子抽出來，然後才進行部分分式分解。對於上式右端第二項，固然也可以先把 z 從該項的分子抽出來，然後進行部分分式分解，這是較簡單的做法；但我們在這裡捨易取難：先把該項分拆為兩項之積，然後應用「定理 2」求逆 Z 變換。以下是求 (20) 的逆 Z 變換的過程：

$$\begin{aligned}
f(x) &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{zEf(0)}{(z+2)(z-2)}+\frac{z^2}{(z+2)(z-2)}\right\} \\
&= Ef(0)\mathcal{Z}^{-1}\left\{z\times\frac{1}{(z-(-2))(z-2)}\right\}+\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-(-2)}\times\frac{z}{z-2}\right\} \\
&= Ef(0)\mathcal{Z}^{-1}\left\{-\frac{z}{4(z-(-2))}+\frac{z}{4(z-2)}\right\}+(-2)^x*2^x \\
&= Ef(0)\left(-\frac{1}{4}(-2)^x+\frac{1}{4}(2^x)\right)+\sum_{t=0}^{t=x}\left((-2)^t\times 2^{x-t}\right) \\
&= \frac{2^x-(-2)^x}{4}\times Ef(0)+2^x\sum_{t=0}^{t=x}(-1)^t \\
&= \frac{2^x-(-2)^x}{4}\times Ef(0)+2^x\left[\frac{(-1)^t}{-2}\right]_{t=0}^{t=x+1} \\
&= \frac{2^x-(-2)^x}{4}\times Ef(0)+\frac{1}{2}\times(-2)^x+\frac{1}{2}\times 2^x \qquad (21)
\end{aligned}$$

在上面第二行，我們把 (20) 右端的第二項分拆為兩個適當項的乘積。在第三行，我們辨認出 $\frac{z}{z-(-2)}$ 和 $\frac{z}{z-2}$ 分別是 $(-2)^x$ 和 2^x 的 Z 變換。由此根據 (7)，可知這個乘積的逆 Z 變換就是 $(-2)^x$ 與 2^x 的捲積。在第四至第七行我們應用 (6) 和「差和分基本定理」計算這個捲積，得到以上結果。

但上述結果仍然包含未知常數 $Ef(0)$，為解出這個常數，要利用 (18) 中至今未被使用的邊界條件 $f(5)=96$，把此一條件代入 (21)，可得

$$16Ef(0)-16+16=96$$

由此可解出 $Ef(0)=6$，把此一結果代入 (21)，便最終求得 (18) 的解為

$$f(x)=-(-2)^x+2^{x+1} \qquad (22)$$

「捲積」概念和「定理 2」的另一個重要用途是求解某些可被看成包含捲積項的線性沃爾泰拉和分方程。舉例說，考慮以下沃爾泰拉和分方程 (以下方程等於《數學示例：方程與解》中的 (16))：

$$f(x)-\sum_{t=0}^{t=x-1}16(x-t-1)f(t)-1=0 \qquad (23)$$

為方便以下的計算，首先從上式推導出 $f(0)$ 的值。把 0 代入上式中的變項 x，可得到 (請注意根據「差和分基本定理」，對任何函數 $f(x)$ 和任何整數 n，都有 $\sum_{t=n}^{t=n-1} f(t)=0$)：

$$\begin{aligned} f(0)-0-1 &= 0 \\ f(0) &= 1 \qquad (24) \end{aligned}$$

接著把上式中的 x 改為 $x+1$，並利用算子 E 的定義，可以把上式改寫成以下等價形式：

$$Ef(x)-\sum_{t=0}^{t=x} 16(x-t)f(t)-1=0 \qquad (25)$$

上式中的第二項 $-\sum_{t=0}^{t=x} 16(x-t)f(t)$ 可被看成 $f(x)$ 與 $-16x$ 的捲積，根據「定理 2」和「表 1」，我們有

$$\mathcal{Z}\left\{-\sum_{t=0}^{t=x} 16(x-t)f(t)\right\}=-\frac{16z}{(z-1)^2}F(z) \qquad (26)$$

接著計算 (25) (亦即 (23)) 的 Z 變換如下：

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left\{Ef(x)-\sum_{t=0}^{t=x} 16(x-t)f(t)-1\right\} &= \mathcal{Z}\{0\} \\ zF(z)-zf(0)-\frac{16z}{(z-1)^2}F(z)-\frac{z}{z-1} &= 0 \\ \left(z-\frac{16z}{(z-1)^2}\right)F(z)-z-\frac{z}{z-1} &= 0 \qquad (27) \end{aligned}$$

經上述計算，我們把以 $f(x)$ 為未知項的沃爾泰拉和分方程 (23) 變換成以 $F(s)$ 為未知項的代數方程 (27)，由此可解得

$$F(z)=\frac{z(z-1)}{(z+3)(z-5)} \qquad (28)$$

為求上式的逆 Z 變換，先把 z 從上式右端的數式抽出來，然後進行部分分式分解。以下是求 (28) 的逆 Z 變換，亦即 (23) 的解的過程：

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{z\times\frac{z-1}{(z+3)(z-5)}\right\} \\ &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{2(z+3)}+\frac{z}{2(z-5)}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-(-3)}\right\}+\frac{1}{2}\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-5}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\times(-3)^x+\frac{1}{2}\times 5^x \qquad (29) \end{aligned}$$

以上介紹的都是 1 元函數的 (逆)Z 變換，對於 2 元函數 $f(x,y)$，我們有關於 y 的 Z 變換(Z transform with respect to y)，以下記作 $F(x,z)$ 或 $\mathcal{Z}\{f(x,y)\}$[2]，其定義如下 (如果以下極限存在)：

$$F(x,z) = \mathcal{Z}\{f(x,y)\} = \lim_{b\to\infty}\sum_{y=0}^{y=b} f(x,y)z^{-y} \qquad (30)$$

把上式與 (1) 比較，容易看到「關於 y 的 Z 變換」其實就是把 x 處理成常項 (亦即把 f 處理成以 y 為變項的 1 元函數) 的情況下的 (普通)Z 變換，因此前面有關 (普通)Z 變換的結果都適用於「關於 y 的 Z 變換」。特別地，(8) 變成

$$\mathcal{Z}\{(E_y)^n f(x,y)\} = z^nF(x,z) - z^nf(x,0) - z^{n-1}E_yf(x,0) - \ldots - z(E_y)^{n-1}f(x,0) \qquad (31)$$

此外，還可證明

$$\mathcal{Z}\{(E_x)^n f(x,y)\} = (E_x)^nF(x,z) \qquad (32)$$

不難把以上定義和結果推廣到 2 元函數 $f(x,y)$「關於 x 的 Z 變換」以及 n 元函數 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 關於其某個變項的 Z 變換。

上述概念可用來求解偏差分方程，舉例說，考慮以下 x 和 y 的階俱為 2 的 2 元偏差分方程初值-邊值問題：

$$\begin{aligned}&(E_x)^2f(x,y) - (E_y)^2f(x,y) = 0,\ \ x\in\{0,1,2,3,(4,5)\}\\ &f(0,y) = \frac{1}{2}((-2)^y+2^y), f(5,y) = 16((-2)^y+2^y);\ \ f(x,0) = 2^x, E_yf(x,0) = 0\end{aligned} \qquad (33)$$

首先運用 (31) 和 (32) 計算上式方程關於 y 的 Z 變換如下：

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{(E_x)^2f(x,y) - (E_y)^2f(x,y)\} &= \mathcal{Z}\{0\}\\ (E_x)^2F(x,z) - (z^2F(x,z) - z^2f(x,0) - zE_yf(x,0)) &= 0\\ (E_x)^2F(x,z) - z^2F(x,z) + z^22^x &= 0 \qquad (34)\end{aligned}$$

接著求 (33) 中邊界條件關於 y 的 Z 變換如下：

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{f(0,y)\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{2}((-2)^y+2^y)\right\}, &\qquad \mathcal{Z}\{f(5,y)\} = \mathcal{Z}\{16((-2)^y+2^y)\}\\ F(0,z) = \frac{z}{2(z+2)} + \frac{z}{2(z-2)}, &\qquad F(5,z) = \frac{16z}{z+2} + \frac{16z}{z-2} \qquad (35)\end{aligned}$$

[2]嚴格地說，這裡應為 $\mathcal{Z}$ 加一些標記以識別這是「關於 y (而非 x) 的 Z 變換」，不過在具體應用中，這個相關變項通常是確定的，因此不加任何標記也不致產生混淆。

接著把 (34) – (35) 中的 z 暫時處理成常數，經上述計算和處理，我們把以 $f(x,y)$ 為未知項的偏差分方程初值-邊值問題 (33) 變換成以 $F(x,z)$ 為未知項 (其中只有 x 是變項，z 則是常項) 的常差分方程邊值問題 (34) – (35)。可以求得 (34) 的通解為

$$F(x,z) = c_1(-z)^x + c_2 z^x + \frac{z^2}{(z+2)(z-2)}2^x \qquad (36)$$

把邊界條件 (35) 代入 (36) 後，可解得 $c_1 = c_2 = 0$，因此 (34) – (35) 的特解為

$$F(x,z) = \frac{z^2}{(z+2)(z-2)}2^x \qquad (37)$$

接著求上述結果關於 y 的逆 Z 變換 (進行變換時要把 x 處理成常數)，便可求得 (33) 的解如下：

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^2}{(z+2)(z-2)}2^x\right\} \\ &= 2^x\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-(-2)} \times \frac{z}{z-2}\right\} \\ &= 2^x\left(\frac{1}{2}\times(-2)^y + \frac{1}{2}\times 2^y\right) \\ &= 2^{x+y-1}((-1)^y + 1) \qquad (38) \end{aligned}$$

在上面第二行，我們把 $\frac{z^2}{(z+2)(z-2)}$ 分拆成 $\frac{z}{z-(-2)} \times \frac{z}{z-2}$。由於我們在前面計算 (21) 時曾處理 $\mathcal{Z}^{-1}\{\frac{z}{z-(-2)} \times \frac{z}{z-2}\}$，所以可直接應用前面的計算結果 (但要把前面的計算結果中的 x 改為 y, 因為現在我們是計算關於 y 的逆 Z 變換)。

Z 變換也可用來求解某些差分／和分方程組，具體地說，它可用來把常係數常差分方程組和包含捲積項的線性沃爾泰拉和分方程組變換成代數方程組。舉例說，考慮以下 1 階常係數常差分方程組：

$$\begin{cases} Ef(x) - g(x) - 3x3^x = 0 \\ Eg(x) + f(x) - 3g(x) - x3^x = 0 \end{cases}, \quad f(0) = 0, g(0) = 3 \qquad (39)$$

沿用前面介紹的方法，可求得上式的 Z 變換如下：

$$\begin{cases} zF(z) - G(z) - \frac{9z}{(z-3)^2} = 0 \\ F(z) + (z-3)G(z) - 3z - \frac{3z}{(z-3)^2} = 0 \end{cases} \qquad (40)$$

經上述計算，我們把以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 為未知項的差分方程組 (39) 變換成以 $F(z)$ 和 $G(z)$ 為未知項的代數方程組 (40)。解此方程組，可得

$$F(z) = \frac{3z}{(z-3)^2}, \quad G(z) = \frac{3z}{z-3} \qquad (41)$$

求上述結果的逆 Z 變換，便可得到 (39) 的解如下：

$$f(x) = x3^x,\ \ g(x) = 3^{x+1} \qquad (42)$$

接著考慮以下沃爾泰拉和分方程組：

$$\begin{cases} f(x) + \sum_{t=0}^{t=x} g(t) - 1 - \frac{1}{2}(x+1)^{\underline{2}} = 0 \\ g(x) - \sum_{t=0}^{t=x} f(t) + 1 = 0 \end{cases} \qquad (43)$$

上面第一個方程的第四項可被看成遞降階乘函數 $(x+2-1)^{\underline{2}}$ 與常數 $\frac{1}{2}$ 的乘積，因此可以應用 (5) 求其 Z 變換如下：

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{2}(x+1)^{\underline{2}}\right\} &= \mathcal{Z}\left\{(x+2-1)^{\underline{2}} \times \frac{1}{2}\right\} \\ &= z^2 D^2 \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{2}\right\} \\ &= z^2 D^2 \left(\frac{z}{2(z-1)}\right) \\ &= \frac{z^2}{(z-1)^3} \qquad (44) \end{aligned}$$

此外，上式中每個方程的第二項都可被看成未知函數與常值函數 1 的捲積，因此可以應用「定理 2」和前面介紹的方法，求得上式的 Z 變換如下：

$$\begin{cases} F(z) + \frac{z}{z-1}G(z) - \frac{z}{z-1} - \frac{z^2}{(z-1)^3} = 0 \\ -\frac{z}{z-1}F(z) + G(z) + \frac{z}{z-1} = 0 \end{cases} \qquad (45)$$

經上述計算，我們把以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 為未知項的沃爾泰拉和分方程組 (43) 變換成以 $F(z)$ 和 $G(z)$ 為未知項的代數方程組 (45)。解此方程組，可得

$$F(z) = \frac{z}{z-1},\ \ G(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \qquad (46)$$

求上述結果的逆 Z 變換，便可得到 (43) 的解如下：

$$f(x) = 1,\ \ g(x) = x \qquad (47)$$

連結至數學專題
連結至周家發網頁