

數學示例：參數變異法

我們在《數學示例：待定係數法》中介紹了運用「待定係數法」求解「常係數非齊次常微分／差分方程」 $Tf(x) + g(x) = 0$ 的方法，這種方法有一個嚴重限制，就是一般只能用於帶有常係數以及其「非齊次項」 $g(x)$ 為某些特定函數（即多項式、指數函數、正弦函數、餘弦函數）以及這些函數的有限乘積或線性組合的方程¹。本文主旨是介紹一種不受上述限制的求解非齊次方程的方法（惟須已知該非齊次方程的補助解），稱為參數變異法（variation of parameters method）。

首先討論具有以下形式的 2 階非齊次常微分／差分方程：

$$k_2(x)\phi^2 f(x) + k_1(x)\phi f(x) + k_0(x)f(x) + g(x) = 0 \quad (1)$$

其中 ϕ 代表算子 D 或 E 。設已知上述方程的補助解（即齊次方程 $k_2(x)\phi^2 f(x) + k_1(x)\phi f(x) + k_0(x)f(x) = 0$ 的的通解）為

$$f_c(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \quad (2)$$

其中 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 是上述齊次方程的線性獨立的解。「參數變異法」的原理就是把上式中的常數（亦即「常值參數」） c_1 和 c_2 變成函數（亦即「可變參數」） $h_1(x)$ 和 $h_2(x)$ ，使得

$$f(x) = f_1(x)h_1(x) + f_2(x)h_2(x) \quad (3)$$

成為 (1) 的通解，這樣便把原來的方程變成求解 $h_1(x)$ 和 $h_2(x)$ 的問題。為解出兩個未知函數，我們需要解一個包含兩個方程的方程組，接下來的問題就是確定這個方程組。由於當 $\phi = D$ 和 $\phi = E$ 時，其方程組各有不同，以下分開討論。

首先討論 $\phi = D$ 的情況。由於假設 $f(x)$ 是 (1) 的通解，把 (3) 代入 (1) 應得到 0。但在代入前，須先運用算子 D 的積法則計算 $Df(x)$ ：

$$Df(x) = Df_1(x) \times h_1(x) + f_1(x) \times Dh_1(x) + Df_2(x) \times h_2(x) + f_2(x) \times Dh_2(x)$$

¹ 待定係數法其實也能用於部分變係數方程，例如某些柯西-歐拉方程。

為簡化接下來的計算，可以先作以下設定：

$$f_1(x) \times Dh_1(x) + f_2(x) \times Dh_2(x) = 0 \quad (4)$$

作出上述設定後，便可把上面有關 $Df(x)$ 的結果簡化為

$$Df(x) = Df_1(x) \times h_1(x) + Df_2(x) \times h_2(x) \quad (5)$$

對上式運用 D 的積法則，可得到

$$D^2 f(x) = D^2 f_1(x) \times h_1(x) + Df_1(x) \times Dh_1(x) + D^2 f_2(x) \times h_2(x) + Df_2(x) \times Dh_2(x) \quad (6)$$

把 (3)、(5) 和 (6) 代入 (1) (須把其中的 ϕ 改為 D)，並加以整理，可得到下式：

$$\begin{aligned} & k_2(x)(Df_1(x) \times Dh_1(x) + Df_2(x) \times Dh_2(x)) \\ & + h_1(x)(k_2(x)D^2 f_1(x) + k_1(x)Df_1(x) + k_0(x)f_1(x)) \\ & + h_2(x)(k_2(x)D^2 f_2(x) + k_1(x)Df_2(x) + k_0(x)f_2(x)) + g(x) = 0 \end{aligned}$$

由於假設 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 是與 (1) 相關的齊次方程的解，上面第二、三項必等於 0，因此上式變成

$$Df_1(x) \times Dh_1(x) + Df_2(x) \times Dh_2(x) = -\frac{g(x)}{k_2(x)} \quad (7)$$

至此得到兩個方程 (4) 和 (7)，這兩個方程構成一個方程組，並且可寫成以下矩陣形式：

$$\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ Df_1(x) & Df_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Dh_1(x) \\ Dh_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{g(x)}{k_2(x)} \end{bmatrix} \quad (8)$$

接下來要應用線性代數中的「克萊姆法則」(Cramer's rule)，根據該法則，如有 1 次方程組 $Ax = b$ ，其中 A 是 $n \times n$ 可逆方陣 (即其行列式不等於 0 的方陣)，而 $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ 和 b 都是 $n \times 1$ 列矩陣，那麼可用下式求 x_i ($1 \leq i \leq n$)：

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \quad (9)$$

其中 A_i 代表用列矩陣 b 取代 A 中第 i 列而得的 $n \times n$ 方陣。請注意根據《數學示例：基本解集》中的 (4)，上面 (8) 中的 2×2 方陣的行列式等於 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的「朗斯基行列式」 $W[f_1, f_2](x)$ ，而根據該網頁的「定理 1」，

$W[f_1, f_2](x) \neq 0$, 因此用 (9) 必可從 (8) 解出 $Dh_1(x)$ 和 $Dh_2(x)$ ²。對這兩個結果進行不定積分運算, 可得 $h_1(x)$ 和 $h_2(x)$ 。最後運用 (3), 便可求得 $f(x)$ 。

舉例說, 考慮以下非齊次微分方程:

$$D^2 f(x) + f(x) - \tan x = 0 \quad (10)$$

請注意上式的非齊次項是 $-\tan x$, 不屬前述的特定函數, 所以上式不能用待定係數法求解。讀者請自行驗證, 與 (10) 相關的齊次方程 $D^2 f(x) + f(x) = 0$ 的通解 (即 (10) 的「補助解」) 是

$$f_c(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x \quad (11)$$

由此有 $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \cos x$, $Df_1(x) = \cos x$, $Df_2(x) = -\sin x$, $-\frac{g(x)}{k_2(x)} = -\frac{-\tan x}{1} = \tan x$ 。根據 (8), 我們有以下方程組:

$$\begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Dh_1(x) \\ Dh_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tan x \end{bmatrix} \quad (12)$$

如用 A 代表上式中的 2×2 方陣, 那麼我們有

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \cos x \\ \tan x & -\sin x \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & \tan x \end{bmatrix}$$

由此可求得

$$\det(A) = -1$$

$$\det(A_1) = -\cos x \tan x$$

$$\det(A_2) = \sin x \tan x$$

把以上結果代入 (9), 並繼續求解, 可得

$$\begin{aligned} Dh_1(x) &= \frac{-\cos x \tan x}{-1} \\ &= \sin x \\ h_1(x) &= -\cos x + c_3 \end{aligned} \quad (13)$$

²根據 (8) 和 (9), 可以推導出 $Dh_1(x)$ 和 $Dh_2(x)$ 的計算公式如下:

$$Dh_1(x) = \frac{f_2(x)g(x)}{k_2(x)W[f_1, f_2](x)}, \quad Dh_2(x) = -\frac{f_1(x)g(x)}{k_2(x)W[f_1, f_2](x)} \quad (i)$$

但以下我們將使用 (8) 和 (9) 求 $Dh_1(x)$ 和 $Dh_2(x)$ 而非直接應用上述公式。

$$\begin{aligned}
Dh_2(x) &= \frac{\sin x \tan x}{-1} \\
&= \cos x - \sec x \\
h_2(x) &= \sin x - \ln(|\tan x + \sec x|) + c_4 \quad (14)
\end{aligned}$$

最後運用 (3)，便可求得 (10) 的通解如下：

$$\begin{aligned}
f(x) &= (\sin x)(-\cos x + c_3) + (\cos x)(\sin x - \ln(|\tan x + \sec x|) + c_4) \\
&= c_3 \sin x + c_4 \cos x - \cos x \ln(|\tan x + \sec x|) \quad (15)
\end{aligned}$$

接著討論 $\phi = E$ 的情況。類似前面的情況，我們先設定 (3) 並運用算子 E 的性質 $E(f(x) \times g(x)) = Ef(x) \times Eg(x)$ 以及定義 $E = I + \Delta$ 計算 $Ef(x)$ ：

$$Ef(x) = Ef_1(x) \times h_1(x) + Ef_1(x) \times \Delta h_1(x) + Ef_2(x) \times h_2(x) + Ef_2(x) \times \Delta h_2(x)$$

為簡化接下來的計算，可以先作以下設定：

$$Ef_1(x) \times \Delta h_1(x) + Ef_2(x) \times \Delta h_2(x) = 0 \quad (16)$$

作出上述設定後，便可把上面有關 $Ef(x)$ 的結果簡化為

$$Ef(x) = Ef_1(x) \times h_1(x) + Ef_2(x) \times h_2(x) \quad (17)$$

對上式運用 E 的上述性質和定義，可得到

$$E^2 f(x) = E^2 f_1(x) \times h_1(x) + E^2 f_1(x) \times \Delta h_1(x) + E^2 f_2(x) \times h_2(x) + E^2 f_2(x) \times \Delta h_2(x) \quad (18)$$

把 (3)、(17) 和 (18) 代入 (1) (須把其中的 ϕ 改為 E)，並加以整理，可得到下式：

$$\begin{aligned}
&k_2(x)(E^2 f_1(x) \times \Delta h_1(x) + E^2 f_2(x) \times \Delta h_2(x)) \\
&+ h_1(x)(k_2(x)E^2 f_1(x) + k_1(x)Ef_1(x) + k_0(x)f_1(x)) \\
&+ h_2(x)(k_2(x)E^2 f_2(x) + k_1(x)Ef_2(x) + k_0(x)f_2(x)) + g(x) = 0
\end{aligned}$$

由於假設 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 是與 (1) 相關的齊次方程的解，上面第二、三項必等於 0，因此上式變成

$$E^2 f_1(x) \times \Delta h_1(x) + E^2 f_2(x) \times \Delta h_2(x) = -\frac{g(x)}{k_2(x)} \quad (19)$$

至此得到兩個方程 (16) 和 (19)，這兩個方程構成一個方程組，並且可寫成以下矩陣形式：

$$\begin{bmatrix} Ef_1(x) & Ef_2(x) \\ E^2 f_1(x) & E^2 f_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1(x) \\ \Delta h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{g(x)}{k_2(x)} \end{bmatrix} \quad (20)$$

請注意根據《數學示例：基本解集》中的 (5)，上面 (20) 中的 2×2 方陣的行列式等於 $Ef_1(x)$ 和 $Ef_2(x)$ 的「卡索拉蒂行列式」 $C[Ef_1, Ef_2](x)$ ，而根據該網頁的「定理 2」， $C[f_1, f_2](x) \neq 0$ 。由於 $Ef_1(x)$ 和 $Ef_2(x)$ 其實只是把 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的論元加 1 而得的函數，由此可知必也有 $C[Ef_1, Ef_2](x) \neq 0$ ，因此用 (9) 必可從 (20) 解出 $\Delta h_1(x)$ 和 $\Delta h_2(x)$ ³。對這兩個結果進行不定和分運算，可得 $h_1(x)$ 和 $h_2(x)$ 。最後運用 (3)，便可求得 $f(x)$ 。

舉例說，考慮以下非齊次柯西-歐拉差分方程：

$$(x+1)^2 \Delta^2 f(x) - x \Delta f(x) - 3f(x) + 4(x+2)^3 = 0, \quad x \in \mathbb{N} \quad (21)$$

由於上式是變係數方程，我們不知能否用待定係數法求解上式。與上式相關的齊次方程 $(x+1)^2 \Delta^2 f(x) - x \Delta f(x) - 3f(x) = 0$ 正是我們在《數學示例：積分／和分因子》中討論過的方程 (42)，根據該網頁的 (43)，該方程的通解 (亦即上式的「補助解」) 是

$$f_c(x) = c_1(x-2)^{-1} + c_2(x+2)^3 \quad (22)$$

請注意儘管 (21) 是以 Δ (而非 E) 表示的差分方程，但為應用上述方法求解 (21)，我們只需要知道 $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ 、 $g(x)$ 和 $k_2(x)$ 。根據上式，可知 $f_1(x) = (x-2)^{-1}$ ， $f_2(x) = (x+2)^3$ ， $Ef_1(x) = (x-1)^{-1}$ ， $Ef_2(x) = (x+3)^3$ ， $E^2 f_1(x) = x^{-1}$ ， $E^2 f_2(x) = (x+4)^3$ 。容易看到，如果利用 $\Delta = E - I$ 此一關係把 (21) 改寫成以 E 表示的差分方程，那麼必有以下結果 (其中的 ... 代表我們不用理會的部分)：

$$(x+1)^2 E^2 f(x) + \dots + 4(x+2)^3 = 0, \quad x \in \mathbb{N}$$

由此可知就 (21) 而言， $g(x) = 4(x+2)^3$ ， $k_2(x) = (x+1)^2$ ， $-\frac{g(x)}{k_2(x)} = -\frac{4(x+2)^3}{(x+1)^2} = -4(x+2)$ 。由此根據 (20)，我們有以下方程組：

$$\begin{bmatrix} (x-1)^{-1} & (x+3)^3 \\ x^{-1} & (x+4)^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1(x) \\ \Delta h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4(x+2) \end{bmatrix} \quad (23)$$

如用 A 代表上式中的 2×2 方陣，那麼我們有

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & (x+3)^3 \\ -4(x+2) & (x+4)^3 \end{bmatrix}$$

³根據 (20) 和 (9)，可以推導出 $\Delta h_1(x)$ 和 $\Delta h_2(x)$ 的計算公式如下：

$$\Delta h_1(x) = \frac{Ef_2(x)g(x)}{k_2(x)C[Ef_1, Ef_2](x)}, \quad \Delta h_2(x) = -\frac{Ef_1(x)g(x)}{k_2(x)C[Ef_1, Ef_2](x)} \quad (ii)$$

但以下我們將使用 (20) 和 (9) 求 $\Delta h_1(x)$ 和 $\Delta h_2(x)$ 而非直接應用上述公式。

$$A_2 = \begin{bmatrix} (x-1)^{-1} & 0 \\ x^{-1} & -4(x+2) \end{bmatrix}$$

由此可求得

$$\det(A) = 4(x+3)^2(x-1)^{-1}$$

$$\det(A_1) = 4(x+2)(x+3)^3$$

$$\det(A_2) = -4(x+2)(x-1)^{-1}$$

把以上結果代入 (9)，並繼續求解，可得

$$\begin{aligned} \Delta h_1(x) &= \frac{4(x+2)(x+3)^3}{4(x+3)^2(x-1)^{-1}} \\ &= (x+2)^3 \\ h_1(x) &= \frac{1}{4}(x+2)^4 + c_3 \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta h_2(x) &= \frac{-4(x+2)(x-1)^{-1}}{4(x+3)^2(x-1)^{-1}} \\ &= -(x+2)^{-1} \\ h_2(x) &= -\psi(x+3) + c_4 \quad (25) \end{aligned}$$

最後運用 (3)，便可求得

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)^{-1} \left(\frac{1}{4}(x+2)^4 + c_3 \right) + (x+2)^3(-\psi(x+3) + c_4) \\ &= c_3(x-2)^{-1} + \left(c_4 + \frac{1}{4} \right) (x+2)^3 - (x+2)^3\psi(x+3) \end{aligned}$$

把上式中的 $c_4 + \frac{1}{4}$ 改寫成另一任意常數 c_5 ，可以把 (21) 的通解寫成以下更簡潔的形式：

$$f(x) = c_3(x-2)^{-1} + c_5(x+2)^3 - (x+2)^3\psi(x+3) \quad (26)$$

我們可以把以上方法推廣到更高階的非齊次方程，設有以下形式的 n 階 ($n > 2$) 非齊次常微分／差分方程：

$$k_n(x)\phi^n f(x) + \dots + k_1(x)\phi f(x) + k_0(x)f(x) + g(x) = 0 \quad (27)$$

並且已知上述方程的補助解 (即齊次方程 $k_n(x)\phi^n f(x) + \dots + k_1(x)\phi f(x) + k_0(x)f(x) = 0$ 的通解) 為

$$f_c(x) = c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x) \quad (28)$$

我們假設 (27) 的通解具有以下形式：

$$f(x) = f_1(x)h_1(x) + \dots + f_n(x)h_n(x) \quad (29)$$

其中 $f_1(x)$ 、...、 $f_n(x)$ 是上述齊次方程的線性獨立的解。這樣做等於把原來的方程變成求解 $h_1(x)$ 、...、 $h_n(x)$ 的問題。為解出 n 個未知函數，我們需要解一個包含 n 個方程的方程組，接下來的問題就是確定這個方程組。

若 $\phi = D$ ，首先設定

$$\begin{aligned} f_1(x) \times Dh_1(x) + \dots + f_n(x) \times Dh_n(x) &= 0 \\ \vdots & \\ D^{n-2}f_1(x) \times Dh_1(x) + \dots + D^{n-2}f_n(x) \times Dh_n(x) &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

作出以上設定的目的是使 $Df(x)$ 、...、 $D^{n-1}f(x)$ 有較簡單的結果，讀者請自行驗證，在上述設定下，我們有

$$\begin{aligned} Df(x) &= Df_1(x) \times h_1(x) + \dots + Df_n(x) \times h_n(x) \\ \vdots & \\ D^{n-1}f(x) &= D^{n-1}f_1(x) \times h_1(x) + \dots + D^{n-1}f_n(x) \times h_n(x) \end{aligned} \quad (31)$$

對上面最後一式運用 D 的積法則，可得到

$$\begin{aligned} D^n f(x) &= D^n f_1(x) \times h_1(x) + D^{n-1}f_1(x) \times Dh_1(x) + \dots \\ &\quad + D^n f_n(x) \times h_n(x) + D^{n-1}f_n(x) \times Dh_n(x) \end{aligned} \quad (32)$$

讀者請自行驗證，把 (29)、(31) 和 (32) 代入 (27) (須把其中的 ϕ 改為 D)，並應用 $f_1(x)$ 、...、 $f_n(x)$ 是 (27) 的解此一事實，可得到

$$D^{n-1}f_1(x) \times Dh_1(x) + \dots + D^{n-1}f_n(x) \times Dh_n(x) = -\frac{g(x)}{k_n(x)} \quad (33)$$

至此得到 n 個方程 (30) 和 (33)，這 n 個方程構成一個方程組，並且可寫成以下矩陣形式：

$$\begin{bmatrix} f_1(x) & \dots & f_n(x) \\ \vdots & & \\ D^{n-2}f_1(x) & \dots & D^{n-2}f_n(x) \\ D^{n-1}f_1(x) & \dots & D^{n-1}f_n(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Dh_1(x) \\ \vdots \\ Dh_{n-1}(x) \\ Dh_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{g(x)}{k_n(x)} \end{bmatrix} \quad (34)$$

接著用 (9) 從上式解出 $Dh_1(x)$ 、...、 $Dh_n(x)$ ，然後對這 n 個結果進行不定積分運算，可得 $h_1(x)$ 、...、 $h_n(x)$ 。最後運用 (29)，便可求得 $f(x)$ 。

若 $\phi = E$ ，則首先設定

$$\begin{aligned} Ef_1(x) \times \Delta h_1(x) + \dots + Ef_n(x) \times \Delta h_n(x) &= 0 \\ \vdots & \\ E^{n-1}f_1(x) \times \Delta h_1(x) + \dots + E^{n-1}f_n(x) \times \Delta h_n(x) &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

作出以上設定的目的是使 $Ef(x)$ 、...、 $E^{n-1}f(x)$ 有較簡單的結果，讀者請自行驗證，在上述設定下，我們有

$$\begin{aligned} Ef(x) &= Ef_1(x) \times h_1(x) + \dots + Ef_n(x) \times h_n(x) \\ \vdots & \\ E^{n-1}f(x) &= E^{n-1}f_1(x) \times h_1(x) + \dots + E^{n-1}f_n(x) \times h_n(x) \end{aligned} \quad (36)$$

對上面最後一式運用 E 的上述性質和定義，可得到

$$\begin{aligned} E^n f(x) &= E^n f_1(x) \times h_1(x) + E^n f_1(x) \times \Delta h_1(x) + \dots \\ &\quad + E^n f_n(x) \times h_n(x) + E^n f_n(x) \times \Delta h_n(x) \end{aligned} \quad (37)$$

讀者請自行驗證，把 (29)、(36) 和 (37) 代入 (27) (須把其中的 ϕ 改為 E)，並應用 $f_1(x)$ 、...、 $f_n(x)$ 是 (27) 的解此一事實，可得到

$$E^n f_1(x) \times \Delta h_1(x) + \dots + E^n f_n(x) \times \Delta h_n(x) = -\frac{g(x)}{k_n(x)} \quad (38)$$

至此得到 n 個方程 (35) 和 (38)，這 n 個方程構成一個方程組，並且可寫成以下矩陣形式：

$$\begin{bmatrix} Ef_1(x) & \dots & Ef_n(x) \\ \vdots & & \\ E^{n-1}f_1(x) & \dots & E^{n-1}f_n(x) \\ E^n f_1(x) & \dots & E^n f_n(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1(x) \\ \vdots \\ \Delta h_{n-1}(x) \\ \Delta h_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{g(x)}{k_n(x)} \end{bmatrix} \quad (39)$$

接著用 (9) 從上式解出 $\Delta h_1(x)$ 、...、 $\Delta h_n(x)$ ，然後對這 n 個結果進行不定和分運算，可得 $h_1(x)$ 、...、 $h_n(x)$ 。最後運用 (29)，便可求得 $f(x)$ 。

舉例說，考慮以下 3 階非齊次微分方程：

$$D^3 f(x) - \ln x = 0 \quad (40)$$

請注意上式中的非齊次項是 $\ln x$ ，不屬前述的特定函數，所以上式不能用待定係數法求解。讀者請自行驗證，與 (40) 相關的齊次方程 $D^3 f(x) = 0$ 的通解 (即 (40) 的「補助解」) 是

$$f_c(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 \quad (41)$$

由此有 $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$, $Df_1(x) = 0$, $Df_2(x) = 1$, $Df_3(x) = 2x$, $D^2f_1(x) = 0$, $D^2f_2(x) = 0$, $D^2f_3(x) = 2$, $-\frac{g(x)}{k_2(x)} = -\frac{-\ln x}{1} = \ln x$ 。
根據 (34), 我們有以下方程組：

$$\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Dh_1(x) \\ Dh_2(x) \\ Dh_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ln x \end{bmatrix} \quad (42)$$

如用 A 代表上式中的 3×3 方陣, 那麼我們有

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ \ln x & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x^2 \\ 0 & 0 & 2x \\ 0 & \ln x & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ln x \end{bmatrix}$$

由此可求得

$$\det(A) = 2$$

$$\det(A_1) = x^2 \ln x$$

$$\det(A_2) = -2x \ln x$$

$$\det(A_3) = \ln x$$

把以上結果代入 (9), 並繼續求解 (以下運算要使用「分部積分法」), 可得

$$\begin{aligned} Dh_1(x) &= \frac{x^2 \ln x}{2} \\ h_1(x) &= -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{6}x^3 \ln x + c_4 \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} Dh_2(x) &= \frac{-2x \ln x}{2} \\ &= -x \ln x \\ h_2(x) &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \ln x + c_5 \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} Dh_3(x) &= \frac{\ln x}{2} \\ h_3(x) &= -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x \ln x + c_6 \end{aligned} \quad (45)$$

最後運用 (29)，便可求得 (40) 的通解如下：

$$\begin{aligned} f(x) &= (1) \left(-\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{6}x^3 \ln x + c_4 \right) + (x) \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \ln x + c_5 \right) \\ &\quad + (x^2) \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x \ln x + c_6 \right) \\ &= c_4 + c_5x + c_6x^2 - \frac{11}{36}x^3 + \frac{1}{6}x^3 \ln x \end{aligned} \quad (46)$$

由於我們可以使用《數學示例：積分／和分因子》中介紹的方法求解 1 階齊次／非齊次方程，一般不會使用參數變異法來求解 1 階非齊次方程。不過，參數變異法卻可用來求解 1 階非齊次方程組，以補待定係數法的不足。設有以下具有正態形式且包含 n 個未知函數的非齊次方程組：

$$\phi(F) - KF + G = 0 \quad (47)$$

並設已知相關齊次方程組 $\phi(F) - KF = 0$ 的通解為

$$F_c = MC \quad (48)$$

其中 M 和 C 分別為「基本矩陣」和由任意常數組成的 $n \times 1$ 列矩陣。根據《數學示例：基本矩陣》中的「定理 1」，可知存在 M^{-1} ，並且有

$$\phi(M) - KM = 0 \quad (49)$$

現設 (47) 的通解具有以下形式：

$$F = MH \quad (50)$$

其中 $H = [h_1(x), \dots, h_n(x)]^T$ 為待求的 $n \times 1$ 列矩陣，這樣做等於把原來的方程組變成求解 H 的問題。由於當 $\phi = D$ 和 $\phi = E$ 時，求解 H 的方法各有不同，以下分開討論。

若 $\phi = D$ ，首先運用算子 D 的積法則計算 $D(F)$ ：

$$D(F) = D(M)H + MD(H) \quad (51)$$

把 (50) 和 (51) 代入 (47) (須把其中的 ϕ 改為 D)，並加以整理，可得到

$$(D(M) - KM)H + MD(H) + G = 0$$

對上式應用 (49)，可得到

$$MD(H) + G = 0 \quad (52)$$

從上式可解出 $D(H)$ 如下：

$$D(H) = -M^{-1}G \quad (53)$$

由於上式右端的 $-M^{-1}G$ 是由 n 個項組成的 $n \times 1$ 列矩陣，我們可以對每個項逐一進行不定積分運算，從而求得 H 。最後運用 (50)，便可求得 F 。

若 $\phi = E$ ，則首先運用 E 的上述性質和定義計算 $E(F)$ ：

$$E(F) = E(M)H + E(M)\Delta(H) \quad (54)$$

把 (50) 和 (54) 代入 (47) (須把其中的 ϕ 改為 E)，並加以整理，可得到

$$(E(M) - KM)H + E(M)\Delta(H) + G = 0$$

對上式應用 (49)，可得到

$$E(M)\Delta(H) + G = 0 \quad (55)$$

從上式可解出 $\Delta(H)$ 如下⁴：

$$\Delta(H) = -(E(M))^{-1}G \quad (56)$$

由於上式右端的 $-(E(M))^{-1}G$ 是由 n 個項組成的 $n \times 1$ 列矩陣，我們可以對每個項逐一進行不定和分運算，從而求得 H 。最後運用 (50)，便可求得 F 。

舉例說，考慮以下包含兩個未知函數的非齊次差分方程組：

$$E\left(\begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (x-1)^{-1} \\ 2(x-1)^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (57)$$

請注意上式非齊次項所包含的項 $(x-1)^{-1}$ 和 $2(x-1)^{-1}$ 不屬前述的特定函數，所以上式不能用待定係數法求解。讀者請自行驗證，與 (57) 相關的齊次方程組 (即 $E(F) - KF = 0$ ，其中 K 代表上式中的 2×2 方陣) 的基本矩陣是

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & x+1 \end{bmatrix} \quad (58)$$

⁴由於 $E(M)$ 其實只是把 M 中各項的論元加 1 而得的結果，因此如果存在 M^{-1} ，必也存在 $(E(M))^{-1}$ 。

由此有

$$(E(M))^{-1} = \begin{bmatrix} x+2 & -x-1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (59)$$

應用 (56)，並繼續求解，可得

$$\begin{aligned} \Delta(H) &= - \begin{bmatrix} x+2 & -x-1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x-1)^{-1} \\ 2(x-1)^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ -(x-1)^{-1} \end{bmatrix} \\ H &= \begin{bmatrix} x \\ -\psi(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (60) \end{aligned}$$

最後運用 (50)，便可求得 (57) 的通解如下：

$$\begin{aligned} F &= \begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & x+1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x \\ -\psi(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} x \\ x+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x - x\psi(x) \\ x - \psi(x) - x\psi(x) \end{bmatrix} \quad (61) \end{aligned}$$

連結至數學專題
連結至周家發網頁