數學示例：待定係數法

我們在《數學示例：基本解集》和《數學示例：基本矩陣》中分別介紹了求解常係數齊次常微分／差分方程以及具有正態形式的 1 階常係數齊次常微分／差分方程組的方法，本文主旨是把這些求解方法推廣至非齊次(inhomogeneous) 方程 (組)。

本文討論的常係數非齊次方程具有以下一般形式 (請把下式與《數學示例：基本解集》中的 (2) 比較)：

$$Tf(x) + g(x) = 0 \qquad (1)$$

其中 T 是以 ϕ 作為不定項的 n 次多項式，ϕ 代表算子 D 或 E，而 $g(x)$ 則是給定的以 x 為變項的常係數函數，以下定理提供這種方程的解的結構。請注意在上式中，如果 $g(x) = 0$，則上式是常係數齊次方程。由於 $g(x)$ 是使方程具有非齊次性質的項, 以下把上式中的 $g(x)$ 稱為「非齊次項」。

定理 1 (疊加原理Superposition Principle)：設 $Tf(x) = 0$ 為齊次方程, $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 為給定的以 x 為變項的函數 (以上的 T、g_1 和 g_2 不一定帶有常係數), $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 分別為方程 $Tf(x)+g_1(x) = 0$ 和 $Tf(x)+g_2(x) = 0$ 的解, 則對任何常數 c_1 和 c_2, $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)$ 是方程 $Tf(x)+c_1g_1(x)+c_2g_2(x) = 0$ 的解。

當 $g_1(x) = g_2(x) = 0$ 時 (即當有關方程是齊次方程時)，上述定理告訴我們以下已知事實：齊次方程的兩個解的任意線性組合都是該齊次方程的解。當 $g_1(x) = 0$ 而 $g_2(x) \neq 0$ 時，上述定理告訴我們，如果 $f_2(x)$ 是非齊次方程 $Tf(x) + g_2(x) = 0$ 的某個解，而 $f_1(x)$ 是與這個非齊次方程相關的齊次方程 $Tf(x) = 0$ 的任何一個解, 那麼 $f_1(x)+f_2(x)$ 也是 $Tf(x)+g_2(x) = 0$ 的解。由此可見，非齊次方程 $Tf(x)+g_2(x) = 0$ 的通解可以寫成以下形式：

$$f(x) = f_c(x) + f_p(x) \qquad (2)$$

其中 $f_c(x)$ 是與上述非齊次方程相關的齊次方程 $Tf(x) = 0$ 的通解，以下稱為補助解(complementary solution)；$f_p(x)$ 則是當補助解中的任意常數全為 0 的情況下上述非齊次方程的解, 以下稱為「特解」(particular solution)。

由於 (1) 的「補助解」$f_c(x)$ 就是相關齊次方程 $Tf(x) = 0$ 的通解，而我們在《數學示例：基本解集》已詳細介紹了求解這些方程的方法，因此以下介紹一種求 (1) 的「特解」$f_p(x)$ 的方法，稱為待定係數法(method of undetermined coefficients)。請注意只有當 $g(x)$ 具有某些特定形式時，才能應用此方法。此方法的要旨是根據 $g(x)$ 的形式確定一個包含待定係數的特解 (以下稱為「待定特解」)，接著把這個待定特解代入 (1)，從而解出這些待定係數，下表列出非齊次項 $g(x)$ 的若干種可能形式以及相關的待定特解。

表 1

非齊次項 $g(x)$	待定特解
$P_n(x)$	$s_1 + s_2x + \ldots + s_nx^{n-1} + s_{n+1}x^n$
e^{ax}	se^{ax}
a^x	sa^x
$\sin(bx), \cos(bx)$	$s_1 \sin(bx) + s_2 \cos(bx)$

在上表中，$P_n(x)$ 代表以 x 為變項的 n 次多項式，s、s_i 等代表待定的係數。如果 $g(x)$ 是上表中左欄某些項的和或積，那麼待定特解是右欄中相應項的和或積。在應用上表時,有時要對待定係數作適當調整,以免出現重覆的係數。

舉例說，考慮以下 2 階差分方程 (大致等於《數學示例：方程與解》中的 (44))：

$$2E^2f(x) - f(x) - 3x \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 6\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0 \qquad (3)$$

上式中的非齊次項 $-3x\sin(\frac{\pi x}{2}) + 6\cos(\frac{\pi x}{2})$ 是兩項之和，其中第一項是一個 1 次多項式 $-3x$ 與 $\sin(\frac{\pi x}{2})$ 之積，第二項則是一個 0 次多項式 6 與 $\cos(\frac{\pi x}{2})$ 之積。根據「表 1」，上式的待定特解似乎應是 $(s'_1 + s'_2x)(s'_3\sin(\frac{\pi x}{2}) + s'_4\cos(\frac{\pi x}{2})) + s'_5(s'_6\sin(\frac{\pi x}{2}) + s'_7\cos(\frac{\pi x}{2}))$，但這個待定特解包含重覆的待定係數，經合併重覆的待定係數後，我們把上式的待定特解確定為

$$f_p(x) = s_1 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + s_2x \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + s_3 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + s_4x \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \qquad (4)$$

把 (4) 代入 (3) 中的 $f(x)$，可得到

$$\begin{aligned}&(-3s_1 - 4s_2) \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + (-3s_2 - 3)x \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\\ &+(-3s_3 - 4s_4 + 6) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - 3s_4x \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0\end{aligned}$$

從上式可得到以下方程組：

$$\begin{cases} -3s_1 - 4s_2 = 0 \\ -3s_2 = 3 \\ -3s_3 - 4s_4 = -6 \\ -3s_4 = 0 \end{cases}$$

解上述方程組，得 $s_1 = \frac{4}{3}, s_2 = -1, s_3 = 2, s_4 = 0$，由此可得 (3) 的特解為

$$f_p(x) = \frac{4}{3}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - x\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \qquad (5)$$

讀者請自行驗證，與 (3) 相關的齊次方程 $2E^2 f(x) - f(x) = 0$ 的通解 (即 (3) 的「補助解」) 是

$$f_c(x) = c_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x + c_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x \qquad (6)$$

由此根據 (2)，可知 (3) 的通解為

$$f(x) = c_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x + c_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x + \frac{4}{3}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - x\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \qquad (7)$$

在以下的例子中，我們只會求有關方程 (組) 的特解，不會再提供其通解。

在使用待定係數法解方程時，有時要把根據「表 1」確定的待定特解的某些項乘以 x 或 x^2 或 x^3 或...，以確保所得的待定特解的每一項跟該方程的補助解的每一項存在線性獨立的關係。舉例說，考慮以下 3 階微分方程：

$$D^3 f(x) + D^2 f(x) - 4 + 6xe^{-x} = 0 \qquad (8)$$

讀者請自行驗證，與上式相關的齊次方程 $D^3 f(x) + D^2 f(x)$ 的通解 (即上式的「補助解」) 是

$$f_c(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} \qquad (9)$$

由於 (8) 的非齊次項是 $-4 + 6xe^{-x}$。單純根據「表 1」，(8) 的待定特解似乎應是 $s_1 + s_2 e^{-x} + s_3 x e^{-x}$，但此一待定特解的第一項 s_1 跟 (9) 的第一項 c_1 線性相關。如把 s_1 乘以 x，所得結果 $s_1 x$ 仍跟 (9) 的第二項 $c_2 x$ 線性相關。如把 s_1 乘以 x^2，所得結果 $s_1 x^2$ 便跟 (9) 的每一項存在線性獨立關係。另外，上述待定特解的第二項 $s_2 e^{-x}$ 也跟 (9) 的第三項 $c_3 e^{-x}$ 線性相關。如把 $s_2 e^{-x} + s_3 x e^{-x}$ 乘以 x，所得結果 $s_2 x e^{-x} + s_3 x^2 e^{-x}$ 便跟 (9) 的每一項存在線性獨立關係。因此 (8) 的待定特解應為

$$f_p(x) = s_1 x^2 + s_2 x e^{-x} + s_3 x^2 e^{-x} \qquad (10)$$

把 (10) 代入 (8) 中的 $f(x)$，可得到

$$(2s_1 - 4) + (s_2 - 4s_3)e^{-x} + (2s_3 + 6)xe^{-x} = 0$$

從上式可得到以下方程組：

$$\begin{cases} 2s_1 = 4 \\ s_2 - 4s_3 = 0 \\ 2s_3 = -6 \end{cases}$$

解上述方程組，得 $s_1 = 2, s_2 = -12, s_3 = -3$，由此可得 (8) 的特解為

$$f_p(x) = 2x^2 - 12xe^{-x} - 3x^2e^{-x} \qquad (11)$$

除了應用「表 1」外，我們也可應用一個名為「零化子」的概念以確定非齊次方程的待定特解，從而使確定待定特解的過程建立在更堅實的理論基礎上。設 $g(x)$ 為以 S 為定義域的函數，其零化子(annihilator) 是一個由 D 或 E 構成的算子 A (以下分別稱為「D 零化子」和「E 零化子」) 使得對任何 $x \in S$，都有

$$Ag(x) = 0 \qquad (12)$$

即 A 把 g 變成零函數，故稱「零化子」。以下兩表提供某些初等函數的 D 零化子和 E 零化子。

表 2

非齊次項 $g(x)$	D 零化子
$P_n(x)e^{ax}$	$(D - aI)^{n+1}$
$P_n(x)e^{ax}\sin(bx), P_n(x)e^{ax}\cos(bx)$	$(D^2 - 2aD + (a^2 + b^2)I)^{n+1}$

表 3

非齊次項 $g(x)$	E 零化子
$P_n(x)a^x$	$(E - aI)^{n+1}$
$P_n(x)a^x\sin(bx), P_n(x)a^x\cos(bx)$	$(E^2 - (2a\cos b)E + a^2I)^{n+1}$

請注意為使上表能概括多種情況，「非齊次項 $g(x)$」一欄中的函數採取較複雜抽象的形式。只要代入適當的數字，便可得到較簡單具體的函數的零化子。以 $6xe^{-x}$ 為例，把 $n = 1$ 和 $a = -1$ 代入「表 2」的第一行，便可得到該函數的 D 零化子為 $(D - (-1)I)^{1+1} = (D + I)^2$。另外又如 $-3x\sin(\frac{\pi x}{2})$，把 $n = 1$、$a = 1$ 和 $b = \frac{\pi}{2}$ 代入「表 3」的第二行，便可得到該函數的 E 零

化子為 $(E^2 - 2 \times 1 \times \cos(\frac{\pi}{2})E + 1^2 \times I)^{1+1} = (E^2 + I)^2$。

以下讓我們驗證上述算子確是有關函數的零化子，首先驗證 $(D + I)^2$ 確是 $6xe^{-x}$ 的 D 零化子如下：

$$\begin{aligned}(D+I)^2(6xe^{-x}) &= (D+I)(D+I)(6xe^{-x}) \\ &= (D+I)(6e^{-x}) \\ &= 0\end{aligned}$$

接著驗證 $(E^2 + I)^2$ 確是 $-3x\sin(\frac{\pi x}{2})$ 的 E 零化子如下：

$$\begin{aligned}(E^2+I)^2\left(-3x\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) &= (E^2+I)(E^2+I)\left(-3x\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) \\ &= (E^2+I)\left(6\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

由於零化子是 D、E 或 I 的線性組合或複合 (算子的乘積或冪次代表「函數複合」)，容易看到，如果 A_1 和 A_2 分別是函數 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 的同類零化子，那麼 A_1A_2 或 A_2A_1 (這裡略去函數複合符號 $\circ$) 是 $g_1(x) + g_2(x)$ 的零化子。舉例說，根據前面的討論和「表 2」，$(D + I)^2$ 是 $6xe^{-x}$ 的 D 零化子,而 D 是 -4 的 D 零化子,由此可知 $D(D+I)^2$ 是 $-4+6xe^{-x}$ 的 D 零化子。

惟請注意，給定函數 $g(x)$，其零化子並非唯一。事實上，如果 A 是 $g(x)$ 的零化子，那麼 A^n (其中 n 是正整數) 也是 $g(x)$ 的零化子。在求解非齊次方程時，為簡化計算，我們應選擇最低次數的零化子。舉例說，設給定 $g(x) = -3x\sin(\frac{\pi x}{2}) + 6\cos(\frac{\pi x}{2})$，根據前面的討論和「表 3」，我們知道 $(E^2 + I)^2$ 和 $E^2 + I$ 分別是 $-3x\sin(\frac{\pi x}{2})$ 和 $6\cos(\frac{\pi x}{2})$ 的最低次數的 E 零化子。由於 $(E^2 + I)^2$ 也是 $6\cos(\frac{\pi x}{2})$ 的零化子 (儘管不是最低次數的零化子)，所以 $(E^2 + I)^2$ 既是 $-3x\sin(\frac{\pi x}{2})$ 也是 $6\cos(\frac{\pi x}{2})$ 的零化子，由此可知 $(E^2 + I)^2$ 是 $g(x) = -3x\sin(\frac{\pi x}{2}) + 6\cos(\frac{\pi x}{2})$ 的最低次數的零化子。

我們可以利用零化子概念來求解非齊次方程，設有非齊次方程 (1) 和非齊次項 $g(x)$ 的零化子 A，我們把 A 作用於 (1) 等號左右兩端，可得

$$\begin{aligned}A(Tf(x) + g(x)) &= A(0) \\ ATf(x) + Ag(x) &= 0 \\ ATf(x) &= 0 \qquad (13)\end{aligned}$$

這樣便把非齊次方程 (1) 轉化為一個齊次方程 (13)，而這個方程正可運用《數學示例：基本解集》中介紹的方法求解，求解結果包含兩部分：第一部分就是原來非齊次方程的補助解，這部分包含一些任意常數；第二部分則

是原來非齊次方程的特解, 但包含一些待定的係數。把這個求解結果代入原來的非齊次方程中, 便會消去上述的第一部分, 並解出第二部分的待定係數。

舉例說，考慮前面討論過的 2 階差分方程 (3)。根據前面的討論，我們取 $A = (E^2 + I)^2$ 作為 (3) 中非齊次項 $-3x\sin(\frac{\pi x}{2}) + 6\cos(\frac{\pi x}{2})$ 的 E 零化子。由此根據 (13)，我們可以把 (3) 轉化為以下 6 階齊次方程：

$$(E^2 + I)^2(2E^2 f(x) - f(x)) = 0 \qquad (14)$$

上述方程的輔助方程的因式分解形式為

$$(t^2 + 1)^2(2t^2 - 1) = 0$$

由此可求得上述方程的通解為

$$\begin{aligned} f(x) &= c_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x + c_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x + c_3\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \\ &\quad + c_4 x\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + c_5\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + c_6 x\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \qquad (15) \end{aligned}$$

上式包含六項, 前兩項 (實質上等於 (6)) 就是 (3) 的補助解, 而後四項 (實質上等於 (4)) 則是 (3) 的待定特解, 其中的 c_3、c_4、c_5 和 c_6 不是任意常數, 而是待定的係數。至此我們看到, 為解非齊次方程, 可以運用「表 1」, 或者運用零化子概念, 以確定該方程的待定特解, 而用這兩種方法可得到相同的待定特解。

應用零化子概念除了有較堅實的理論基礎外，還可使確定待定特解的過程較為直截了當，不用先求出有關方程的補助解，也不用顧慮待定特解的每一項是否與補助解的每一項存在線性獨立關係。舉例說，考慮前面討論過的 3 階微分方程 (8)。根據前面的討論，我們取 $A = D(D + I)^2$ 作為 (8) 中非齊次項 $-4 + 6xe^{-x}$ 的 D 零化子。由此根據 (13)，我們可以把 (8) 轉化為以下 6 階齊次方程：

$$D(D + I)^2(D^3 f(x) + D^2 f(x)) = 0 \qquad (16)$$

上述方程的輔助方程及其因式分解形式為

$$\begin{aligned} t(t + 1)^2(t^3 + t^2) &= 0 \\ t^3(t + 1)^3 &= 0 \end{aligned}$$

由此可求得上述方程的通解為

$$f(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{-x} + c_5 x e^{-x} + c_6 x^2 e^{-x} \qquad (17)$$

上式由兩部分相加而成，$c_1 + c_2 x + c_4 e^{-x}$ (實質上等於 (9)) 就是 (8) 的補助解，而 $c_3 x^2 + c_5 x e^{-x} + c_6 x^2 e^{-x}$ (實質上等於 (10)) 則是 (8) 的特解。請注意

在把 (8) 轉化為 (16) 後，便可直接求 (8) 的通解和待定特解，在此一過程中我們無需顧慮 (8) 的待定特解的任何一項是否與其通解的任何一項線性相關。

接著討論 1 階常係數非齊次方程組，這類方程組具有以下正態形式 (請把下式與《數學示例：基本矩陣》中的 (1) 比較)：

$$\phi(F) - KF + G = 0 \qquad (18)$$

其中 K 代表一個 $n \times n$ 實數方陣，G 代表由 n 個給定函數 $g_1(x)$、...、$g_n(x)$ 組成的 $n \times 1$ 列矩陣，即 $G = [g_1(x), \ldots, g_n(x)]^T$。請注意如果定義 $T = \phi - KI$，那麼上式具有 $T(F) + G = 0$ 的形式，跟 (1) 非常相似。事實上，「定理 1」以及前面介紹的「補助解」、「特解」等概念也都適用於 (18)，只需把其中的 $f(x)$、$g(x)$、$f_c(x)$、$f_p(x)$ 等分別改為 F、G、F_c、F_p 等便可。以下把 (18) 中的 G 稱為「非齊次項」。

由於 (18) 的「補助解」就是相關非齊次方程組 $\phi(F) - KF = 0$ 的通解，而我們在《數學示例：基本矩陣》中已詳細介紹了求解這類方程組的方法，因此以下介紹求 (18) 的「特解」的方法，這種方法的要旨也是根據 G 的形式確定一個包含待定係數 (寫成 $n \times 1$ 矩陣的形式) 的待定特解，接著把這個待定特解代入 (18)，從而解出這些待定係數。

舉例說，考慮以下差分方程組：

$$E\left(\begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3x2^x \\ 2 + x2^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (19)$$

讀者請自行驗證，與上式相關的齊次方程組 (即 $E(F) - KF = 0$，其中 K 代表上式中的 2×2 方陣) 的通解 (亦即上式的「補助解」) 是

$$F_c = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (-1)^x + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} 4^x \qquad (20)$$

請注意 (19) 中的非齊次項可以分拆成以下形式：

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3x2^x \\ x2^x \end{bmatrix}$$

這是兩類函數所構成的 2×1 矩陣之和：第一類函數是 0 次多項式，第二類函數則是 1 次多項式 x 與 2^x 之積，這兩類函數都與 F_c 中的每一項存在線性獨立關係。根據「表 1」，如果 $g(x)$ 具有 $1 + x2^x$ 的形式，則有關非齊次方程的待定特解應是 $s_1 + s_2 2^x + s_3 x2^x$，因此我們可以把 (19) 的待定特

解確定為 $S_1 + S_2 2^x + S_3 x 2^x$，其中 S_1、S_2 和 S_3 是包含待定係數的 2×1 矩陣，具體寫出來，這就是

$$F_p = \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{21} \\ s_{22} \end{bmatrix} 2^x + \begin{bmatrix} s_{31} \\ s_{32} \end{bmatrix} x 2^x \qquad (21)$$

把 (21) 代入 (19) 中的 F，可得到

$$\begin{bmatrix} (-s_{11} - 3s_{12}) + (-3s_{22} + 2s_{31})2^x + (-3s_{32} - 3)x2^x \\ (-2s_{11} + 2) + (-2s_{21} + s_{22} + 2s_{32})2^x + (-2s_{31} + s_{32} + 1)x2^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

從上式可得到以下方程組：

$$\begin{cases} -s_{11} - 3s_{12} = 0 \\ -2s_{11} = -2 \\ -3s_{22} + 2s_{31} = 0 \\ -2s_{21} + s_{22} + 2s_{32} = 0 \\ -3s_{32} = 3 \\ -2s_{31} + s_{32} = -1 \end{cases}$$

解上述方程組，得 $s_{11} = 1, s_{12} = -\frac{1}{3}, s_{21} = -1, s_{22} = 0, s_{31} = 0, s_{32} = -1$，由此可得 (19) 的特解為

$$F_p = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} 2^x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} x 2^x \qquad (22)$$

如果根據「表 1」確定的待定特解有某項與補助解中的某項線性相關 (假設該項包含函數 $h(x)$)，待定特解便應具有以下形式：

$$(S_1 + S_2 x + \ldots + S_n x^{n-1} + S_{n+1} x^n) h(x) \qquad (23)$$

這裡要選取適當的 n 使得上式與補助解中的每一項都存在線性獨立關係。

舉例說，考慮以下微分方程組：

$$D\left(\begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -e^{-3x} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (24)$$

讀者請自行驗證，與上式相關的齊次方程組 (即 $D(F) - KF = 0$，其中 K 代表上式中的 2×2 方陣) 的通解 (亦即上式的「補助解」) 是

$$F_c = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3x} + c_2 \left(\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} x \right) e^{-3x} \right) \qquad (25)$$

由於 (24) 中的非齊次項包含指數函數 e^{-3x}，而 (25) 中的項包含 e^{-3x} 和 xe^{-3x}，因此根據 (23)，(24) 的特解應為 $(S_1 + S_2x + S_3x^2)e^{-3x}$，這樣就可確保這個特解與 (25) 中的每一項存在線性獨立關係。具體寫出來，這就是

$$F_p = \left(\begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{21} \\ s_{22} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} s_{31} \\ s_{32} \end{bmatrix} x^2 \right) e^{-3x} \qquad (26)$$

把 (26) 代入 (24) 中的 F，可得到

$$\begin{bmatrix} (-6s_{11} + 18s_{12} + s_{21} - 1)e^{-3x} + (-6s_{21} + 18s_{22} + 2s_{31})xe^{-3x} \\ (-2s_{11} + 6s_{12} + s_{22})e^{-3x} + (-2s_{21} + 6s_{22} + 2s_{32})xe^{-3x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (-6s_{31} + 18s_{32})x^2e^{-3x} \\ (-2s_{31} + 6s_{32})x^2e^{-3x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

從上式可得到以下方程組：

$$\begin{cases} -6s_{11} + 18s_{12} + s_{21} = 1 \\ -2s_{11} + 6s_{12} + s_{22} = 0 \\ -6s_{21} + 18s_{22} + 2s_{31} = 0 \\ -2s_{21} + 6s_{22} + 2s_{32} = 0 \\ -6s_{31} + 18s_{32} = 0 \\ -2s_{31} + 6s_{32} = 0 \end{cases}$$

解上述方程組，得 $s_{11} = 3s_{12} + \frac{1}{2}s_{22}, s_{21} = 3s_{22} + 1, s_{31} = 3, s_{32} = 1$，請注意這個解具有兩個自由度，可以自由選擇 s_{12} 和 s_{22}。由此可得 (24) 的特解為

$$F_p = \left(\begin{bmatrix} 3s_{12} + \frac{1}{2}s_{22} \\ s_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3s_{22} + 1 \\ s_{22} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} x^2 \right) e^{-3x} \qquad (27)$$

上式告訴我們，(24) 有無窮多個特解，把不同實數代入上式中的 s_{12} 和 s_{22}，便可得到不同的特解，例如代入 $s_{12} = s_{22} = 0$ 便可得到以下特解：

$$F_p = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} x^2 \right) e^{-3x} \qquad (28)$$

非齊次方程組還可以有其他複雜情況，這裡不作詳細介紹。此外，前面介紹的零化子會提升原有方程的階 (因為零化子本質上也是一種微分／差分算子)，而我們至今只介紹了一階方程組的求解方法，沒有介紹過高階方程組的求解方法，因此無法把零化子概念推廣到一階方程組。

連結至數學專題
連結至周家發網頁