數學示例：張量與張量場

我們在《數學示例：k 向量與 k 餘向量》中介紹了 k 向量和 k 餘向量等概念，指出這些概念是一般「純量」(scalar)、「向量」(vector) 和「餘向量」(covector) 概念的推廣，因為一般純量、向量和餘向量可分別被看成 0 向量 (也可看成 0 餘向量)、1 向量和 1 餘向量。本文主旨是把上述概念作更進一步的推廣，引入「張量」的概念。

設 V 為 n 維向量空間，V^* 為對應的餘向量空間，$B = (e_1, \ldots, e_n)$ 和 $B^* = (\epsilon^1, \ldots, \epsilon^n)$ 分別為 V 和 V^* 的有序基底，其中的 e_i (稱為「基底向量」) 和 ϵ^j (稱為「基底餘向量」) 滿足下式 (在下式中，δ 是克羅內克 δ 函數)：

$$\epsilon^j(e_i) = e_i(\epsilon^j) = \delta_{ij} \qquad (1)$$

請注意為方便下文使用「嚴式求和約定 (以下簡稱「求和約定」，請參閱《數學示例：愛恩斯坦求和約定》的介紹)，這裡約定把基底向量的指標寫成下標形式 (即 e_i 的形式)，並把基底餘向量的指標寫成上標形式 (即 ϵ^j 的形式)。根據《數學示例：k 向量與 k 餘向量》，從 V 和 V^* 可以分別得到 k 向量空間 $\bigwedge^k V$ 和 k 餘向量空間 $\bigwedge^k V^*$，這兩個空間本身也是向量空間，它們的有序基底分別是 (以下兩式分別大致等於上述網頁的 (3) 和 (4))：

$$(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} : 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n) \qquad (2)$$

$$(\epsilon^{i_1} \wedge \ldots \wedge \epsilon^{i_k} : 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n) \qquad (3)$$

以上兩式顯示，$\bigwedge^k V$ 和 $\bigwedge^k V^*$ 的基底成員分別是從 B 和 B^* 的 n 個成員中抽取 k 個出來按嚴格遞增序構成的楔積，因此 $\bigwedge^k V$ 和 $\bigwedge^k V^*$ 的維度都是 $C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$，而 $\bigwedge^k V$ 和 $\bigwedge^k V^*$ 的成員就是上述基底成員的線性組合。

張量(tensor) 是 k 向量和 k 餘向量概念的推廣，也構成向量空間。但這種向量空間的有序基底不一定要全由基底向量或全由基底餘向量構成，而是可以由一部分基底向量和一部分基底餘向量構成。因此之故，在稱呼張量時，不能只用一個非負整數 k，而需使用兩個非負整數 r 和 s，寫成整數對 (r,s)，並把相關的張量稱為(r,s) 張量((r,s)-tensor)。運用張量分析的特

殊術語，(r, s) 中的 r 稱為逆變度(亦譯作「反變度」contravariance)，它反映張量的有序基底包含多少個基底向量組件；s 則稱為協變度(亦譯作「共變度」covariance)，它反映張量的有序基底包含多少個基底餘向量組件。我們把由 (r, s) 張量組成的空間記作 $V^{\otimes r} \otimes V^{*\otimes s}$，以下是這個空間的有序基底：

$$(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes \epsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \epsilon^{j_s} : 1 \leq i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s \leq n) \qquad (4)$$

上列有序基底的成員 (以下稱為「基底張量」) 是從 e_1 至 e_n 中 (可重覆地) 抽取 r 個出來以及從 ϵ^1 至 ϵ^n 中 (可重覆地) 抽取 s 個出來，並用 $\otimes$ 號連接起來[1]。

請注意這裡規定各個 e_i 都排在所有 ϵ^j 之前，但各個 e_i 之間和各個 ϵ^j 之間卻可以任意次序排列，而且可以重覆出現 (即不需按嚴格遞增序排列)。因此以上有序基底共有 n^{r+s} 個成員，這個數字也就是 (r, s) 張量空間 $V^{\otimes r} \otimes V^{*\otimes s}$ 的維度，而 $V^{\otimes r} \otimes V^{*\otimes s}$ 的成員就是上述基底張量的線性組合。換句話說，$V^{\otimes r} \otimes V^{*\otimes s}$ 的任意成員 T 具有以下形式 (下式使用求和約定)：

$$T = T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \, e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes \epsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \epsilon^{j_s} \qquad (5)$$

其中 $T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}$ 是實數，是 T 相對於基底張量 $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes \epsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \epsilon^{j_s}$ 的分量。為使上述定義適用於 r 或 s 等於 0 的情況，我們約定若 $r = 0$，則用 1 代替 e_i；若 $s = 0$，則用 1 代替 ϵ^j。此外，我們還約定 $1 \otimes \epsilon^j = \epsilon^j$ 和 $e_i \otimes 1 = e_i$。

舉例說，考慮向量空間 $\mathbb{R}^3$ 和 $\mathbb{R}^{3*}$。由於這兩個空間都是 3 維空間，以下約定所有相關虛擬指標都在 1 與 3 之間取值。我們把這兩個空間的有序基底分別記作 (e_1, e_2, e_3) 和 $(\epsilon^1, \epsilon^2, \epsilon^3)$，並考慮若干個建基於 $\mathbb{R}^3$ 和 $\mathbb{R}^{3*}$ 的張量空間。最簡單的張量是「$(0, 0)$ 張量」，根據前面的討論，$(0, 0)$ 張量空間 $(\mathbb{R}^3)^{\otimes 0} \otimes (\mathbb{R}^{3*})^{\otimes 0}$ 的有序基底只有 $3^{0+0} = 1$ 個成員，即 1。容易看到這個基底的 (唯一) 成員的任意線性組合的集合等於全體實數，因此 $(0, 0)$ 張量等同於純量 (亦即實數)，由此我們有 $(\mathbb{R}^3)^{\otimes 0} \otimes (\mathbb{R}^{3*})^{\otimes 0} = \mathbb{R}$。

次簡單的張量是「$(1, 0)$ 張量」和「$(0, 1)$ 張量」。根據前面的討論，$(1, 0)$ 張量空間 $(\mathbb{R}^3)^{\otimes 1} \otimes (\mathbb{R}^{3*})^{\otimes 0}$ 和 $(0, 1)$ 張量空間 $(\mathbb{R}^3)^{\otimes 0} \otimes (\mathbb{R}^{3*})^{\otimes 1}$ 的有序基底各有 $3^{1+0} = 3$ 和 $3^{0+1} = 3$ 個成員，它們分別是 (e_1, e_2, e_3) 和 $(\epsilon^1, \epsilon^2, \epsilon^3)$，因此一般的 $(1, 0)$ 張量和 $(0, 1)$ 張量應分別具有以下形式：

$$T^i \, e_i$$

$$T_i \, \epsilon^i$$

[1] 在張量分析中，$\otimes$ 是代表「張量積」(tensor product) 的符號，因此這個符號有特殊意義，這一點要在我們介紹張量積後才能闡明。

由此可見，$(1,0)$ 張量和 $(0,1)$ 張量分別等同於 1 向量 (即通常的向量) 和 1 餘向量 (即通常的餘向量)，由此我們有 $(\mathbb{R}^3)^{\otimes 1} \otimes (\mathbb{R}^{3*})^{\otimes 0} = \mathbb{R}^3$ 和 $(\mathbb{R}^3)^{\otimes 0} \otimes (\mathbb{R}^{3*})^{\otimes 1} = \mathbb{R}^{3*}$。

$(1,0)$ 張量和 $(0,1)$ 張量的共同點是它們只有逆變度或只有協變度，因此是一種「純粹」的張量。在張量分析中，把只有逆變度而沒有協變度 (即其協變度為 0) 的張量稱為逆變張量(contravariant tensor)，並把只有協變度而沒有逆變度 (即其逆變度為 0) 的張量稱為協變張量(covariant tensor)。根據上面的討論，$(1,0)$ 張量是逆變張量 (也有人稱為「逆變向量」contravariant vector)，而 $(0,1)$ 張量則是協變張量 (也有人稱為「協變向量」covariant vector)。

除了 $(1,0)$ ／ $(0,1)$ 張量外，還有其他逆變／協變張量，例如 $(2,0)$ 張量和 $(0,2)$ 張量便分別是逆變張量和協變張量 (因為它們的協變度和逆變度分別為 0)。但請注意 $(2,0)$ 張量並不等同於 2 向量，$(0,2)$ 張量也並不等同於 2 餘向量，這是因為根據前面的討論，$(2,0)$ 張量空間 $(\mathbb{R}^3)^{\otimes 2} \otimes (\mathbb{R}^{3*})^{\otimes 0}$ 和 $(0,2)$ 張量空間 $(\mathbb{R}^3)^{\otimes 0} \otimes (\mathbb{R}^{3*})^{\otimes 2}$ 的有序基底各有 $3^{2+0} = 9$ 和 $3^{0+2} = 9$ 個成員，它們分別是

$$
\begin{array}{lll}
(e_1 \otimes e_1, & e_1 \otimes e_2, & e_1 \otimes e_3, \\
\ e_2 \otimes e_1, & e_2 \otimes e_2, & e_2 \otimes e_3, \\
\ e_3 \otimes e_1, & e_3 \otimes e_2, & e_3 \otimes e_3)
\end{array}
$$

和

$$
\begin{array}{lll}
(\epsilon^1 \otimes \epsilon^1, & \epsilon^1 \otimes \epsilon^2, & \epsilon^1 \otimes \epsilon^3, \\
\ \epsilon^2 \otimes \epsilon^1, & \epsilon^2 \otimes \epsilon^2, & \epsilon^2 \otimes \epsilon^3, \\
\ \epsilon^3 \otimes \epsilon^1, & \epsilon^3 \otimes \epsilon^2, & \epsilon^3 \otimes \epsilon^3)
\end{array}
$$

而 2 向量空間 $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ 和 2 餘向量空間 $\bigwedge^2 \mathbb{R}^{3*}$ 的有序基底卻各有 $C(3,2) = 3$ 個成員，它們分別是

$$(e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3)$$

和

$$(\epsilon^1 \wedge \epsilon^2, \epsilon^1 \wedge \epsilon^3, \epsilon^2 \wedge \epsilon^3)$$

因此一般的 $(2,0)$ 張量和 $(0,2)$ 張量應分別具有以下形式：

$$T^{ij}\, e_i \otimes e_j$$

$$T_{ij}\, \epsilon^i \otimes \epsilon^j$$

而一般的 2 向量和 2 餘向量卻分別具有以下形式 (請注意下式不能用求和約定改寫)：

$$T^{12}\, e_1 \wedge e_2 + T^{13}\, e_1 \wedge e_3 + T^{23}\, e_2 \wedge e_3$$

$$T_{12}\, \epsilon^1 \wedge \epsilon^2 + T_{13}\, \epsilon^1 \wedge \epsilon^3 + T_{23}\, \epsilon^2 \wedge \epsilon^3$$

由此可見，$(2,0)$ 張量／ $(0,2)$ 張量空間與 2 向量／ 2 餘向量空間不僅有不同的維度 (前者的維度是 9，後者的維度則是 3)，而且兩者的成員也有很不同的形式 (前者的成員使用 $\otimes$ 這個連接符號，後者的成員則使用 $\wedge$ 這個連接符號)。不過，下文將會指出，後者其實可被看成前者的特例。

接下來介紹「$(1,1)$ 張量」，這種張量既有逆變度又有協變度，故稱為混合張量(mixed tensor)。根據前面的討論，$(1,1)$ 張量空間 $(\mathbb{R}^3)^{\otimes 1} \otimes (\mathbb{R}^{3*})^{\otimes 1}$ 的有序基底包含 $3^{1+1} = 9$ 個成員，以下列出這個有序基底：

$$\begin{array}{l}(e_1 \otimes \epsilon^1, \quad e_1 \otimes \epsilon^2, \quad e_1 \otimes \epsilon^3, \\ \ e_2 \otimes \epsilon^1, \quad e_2 \otimes \epsilon^2, \quad e_2 \otimes \epsilon^3, \\ \ e_3 \otimes \epsilon^1, \quad e_3 \otimes \epsilon^2, \quad e_3 \otimes \epsilon^3)\end{array}$$

因此一般的 $(1,1)$ 張量具有以下形式：

$$T^i_j\, e_i \otimes \epsilon^j$$

以下是 $(1,1)$ 張量的一個具體例子：

$$T_I = -2e_1 \otimes \epsilon^2 + e_2 \otimes \epsilon^2 + 7e_3 \otimes \epsilon^1 \qquad (6)$$

$(1,1)$ 張量是最簡單的混合張量，當然還可以有較複雜的混合張量，例如「$(2,3)$ 張量」。根據前面的討論，$(2,3)$ 張量空間 $(\mathbb{R}^3)^{\otimes 2} \otimes (\mathbb{R}^{3*})^{\otimes 3}$ 的有序基底包含 $3^{2+3} = 243$ 個成員。如要列出這個有序基底，是很繁瑣的事情，但運用求和約定，卻不難寫出 $(2,3)$ 張量的一般形式如下 (下式等於《數學示例：愛恩斯坦求和約定》中的 (4))：

$$T^{gh}_{ijk}\, e_g \otimes e_h \otimes \epsilon^i \otimes \epsilon^j \otimes \epsilon^k$$

以下是 $(2,3)$ 張量的一個具體例子：

$$T_{II} = -2e_1 \otimes e_2 \otimes \epsilon^3 \otimes \epsilon^2 \otimes \epsilon^1 \qquad (7)$$

根據我們在《數學示例：k 向量與 k 餘向量》的討論，k 向量和 k 餘向量除了是向量空間的成員外，也是函數。一個 k 向量 v 可被看成一種以 V^* 中 k 個餘向量作為論元的實值函數，即具有 $v : (V^*)^k \to \mathbb{R}$ 形式的函數；一個 k 餘向量 α 則可被看成一種以 V 中 k 個向量作為論元的實值函數，即具有 $\alpha : V^k \to \mathbb{R}$ 形式的函數。上述兩種函數具有「多重線性性質」，此外，若 $k \geq 2$，則這兩種函數還具有「交錯性質」。

我們在上述網頁也曾指出，k 向量和 k 餘向量的函數作用涉及行列式運算。具體地說，把基底 k 向量 $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$ 作用於 k 個餘向量，等於從這些餘向量依次取得第 i_1、...、第 i_k 個分量並組成一個方陣，然後求這個

方陣的行列式。類似地，把基底 k 餘向量 $\epsilon^{i_1} \wedge \ldots \wedge \epsilon^{i_k}$ 作用於 k 個向量，等於從這些向量依次取得第 i_1、...、第 i_k 個分量並組成一個方陣，然後求這個方陣的行列式。請注意 k 向量和 k 餘向量的交錯性質正是來自上述行列式運算。

類似地，張量也是多重線性函數。一個 (r, s) 張量 T 就是一種以 V^* 中 r 個餘向量和 V 中 s 個向量作為論元的實值函數[2]，即具有 $T : V^{*r} \times V^s \to \mathbb{R}$ 形式的函數 (這裡規定張量的 r 個餘向量論元排在其 s 個向量論元之前)。張量的多重線性性質可以表述如下：設 $T \in V^{\otimes r} \otimes V^{*\otimes s}$，則對任何 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_r \in V^*$，$v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_s \in V$，$c \in \mathbb{R}$，均有

$$\begin{array}{rcl} T(\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_r, v_1, \ldots v_s) & = & T(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, v_1, \ldots v_s) + T(\beta_1, \ldots, \alpha_r, v_1, \ldots v_s) \\ & \vdots & \\ T(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, v_1, \ldots v_s + w_s) & = & T(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, v_1, \ldots v_s) + T(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, v_1, \ldots w_s) \end{array} \tag{8}$$

$$\begin{array}{rcl} T(c\alpha_1, \ldots, \alpha_r, v_1, \ldots v_s) & = & cT(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, v_1, \ldots v_s) \\ & \vdots & \\ T(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, v_1, \ldots cv_s) & = & cT(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, v_1, \ldots v_s) \end{array} \tag{9}$$

張量除了具有作為函數的多重線性性質外，也具有作為向量空間成員的線性性質。具體地說，設 $S, T \in V^{\otimes r} \otimes V^{*\otimes s}$，則對任何 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in V^*$，$v_1, \ldots, v_s \in V$，$c \in \mathbb{R}$，均有

$$(S+T)(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, v_1, \ldots v_s) = S(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, v_1, \ldots v_s) + T(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, v_1, \ldots v_s) \tag{10}$$

$$(cT)(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, v_1, \ldots v_s) = cT(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, v_1, \ldots v_s) \tag{11}$$

如要了解張量的函數作用，只需了解基底張量對餘向量／向量的作用。設 $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes \epsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \epsilon^{j_s}$ 為基底張量，並設 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 為 r 個餘向量，$v_1, \ldots, v_s$ 為 s 個向量，則

$$\begin{array}{rl} & e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes \epsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \epsilon^{j_s}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, v_1, \ldots, v_s) \\ = & e_{i_1}(\alpha_1) \times \ldots \times e_{i_r}(\alpha_r) \times \epsilon^{j_1}(v_1) \times \ldots \times \epsilon^{j_s}(v_s) \end{array} \tag{12}$$

上式的意思是說，當把基底張量作用於上述餘向量／向量時，我們是把基底張量的基底向量／基底餘向量組件按順序逐一作用於各個餘向量／向量論元，然後把這些作用結果 (實數) 相乘。

[2] 前面說過，逆變度 r (協變度 s) 反映張量的有序基底包含基底向量 (餘向量) 組件的數目，而現在又說 r (s) 是張量所含餘向量 (向量) 論元的數目，這兩種說法沒有矛盾，因為在前一種說法中，基底向量 (餘向量) 是作為函數的組件；而在後一種說法中，餘向量 (向量) 是作為論元。

把張量表示成 (5) 的形式，並利用張量作為向量空間成員的線性性質 (即 10) 和 (11)) 以及上式，便可求得任意 (r,s) 張量對任意 r 個餘向量和 s 個向量的作用。以前面提過的 $(1,1)$ 張量 T_I 為例，現用上式計算把 T_I 作用於 1 個餘向量 $[1,-2,3]$ 和 1 個向量 $[-4,5,-6]^T$ [3]的結果：

$$\begin{aligned}
& T_I([1,-2,3],[-4,5,-6]^T) \\
= \;& -2(e_1\otimes\epsilon^2)([1,-2,3],[-4,5,-6]^T)+(e_2\otimes\epsilon^2)([1,-2,3],[-4,5,-6]^T) \\
& +7(e_3\otimes\epsilon^1)([1,-2,3],[-4,5,-6]^T) \\
= \;& -2e_1([1,-2,3])\times\epsilon^2([-4,5,-6]^T)+e_2([1,-2,3])\times\epsilon^2([-4,5,-6]^T) \\
& +7e_3([1,-2,3])\times\epsilon^1([-4,5,-6]^T) \\
= \;& -2(1)(5)+(-2)(5)+7(3)(-4) \\
= \;& -104
\end{aligned}$$

前面說過，k 向量和 k 餘向量具備多重線性性質，因此它們都是張量[4]。此外，若 $k\geq 2$，則 k 向量和 k 餘向量具有交錯性質。可是，一般張量卻並不具有交錯性質，例如前述的 T_I 便不具備這種性質[5]。由此可以作出總結：k 向量和 k 餘向量分別是 $(k,0)$ 張量和 $(0,k)$ 張量的子類，即若 $k\geq 2$，我們有 $\bigwedge^k V\subset V^{\otimes k}\otimes V^{*\otimes 0}$ 和 $\bigwedge^k V^*\subset V^{\otimes 0}\otimes V^{*\otimes k}$。

以上是有關一般向量空間上的 (r,s) 張量的知識，接著專門介紹由切向量和餘切向量構成的 (r,s) 張量，這些張量「寄生」於 m 維流形 M [6]的某點 p 處,以下把這類 (r,s) 張量空間記作 $T_pM^{\otimes r}\otimes T_p^*M^{\otimes s}$。由於 $T_pM^{\otimes r}\otimes T_p^*M^{\otimes s}$ 是向量空間，它有其有序基底。當然我們可以把這個有序基底寫成前面 (4) 所示的形式，但在張量分析和黎曼幾何中，常常用 $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ 和 $(dx^j)_p$ 分別代替 (4) 中的 e_i 和 ϵ^j，從而把 (4) 改寫成以下形式：

$$\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_p\otimes\ldots\otimes\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right|_p\otimes(dx^{j_1})_p\otimes\ldots\otimes(dx^{j_s})_p : 1\leq i_1,\ldots,i_r,j_1,\ldots,j_s\leq m\right) \tag{13}$$

[3]這裡沿用《數學示例：餘向量與 1 形式》引入的表示法，把餘向量和向量分別表示成 $[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]$ 和 $[v_1,\ldots,v_n]^T$ 的形式。

[4]看到這裡，有些讀者可能會問，既然 k 向量和 k 餘向量都是張量，能否把 k 向量和 k 餘向量都寫成 (5) 的形式？答案是肯定的，例如讀者可自行驗證，對任何向量 v_1、v_2，都有 $\epsilon_i\wedge\epsilon_j(v_1,v_2)=(\epsilon_i\otimes\epsilon_j-\epsilon_j\otimes\epsilon_i)(v_1,v_2)$，因此我們有 $\epsilon_i\wedge\epsilon_j=\epsilon_i\otimes\epsilon_j-\epsilon_j\otimes\epsilon_i$。但對於把一般 k 向量和 k 餘向量寫成 (5) 的形式的方法，要在我們介紹張量的「交錯化」運算後才能闡明。

[5]根據《數學示例：k 向量與 k 餘向量》，交錯性質表現為，若把 k 向量 v 或 k 餘向量 α 的任意兩個不同論元對調位置，會使 v 或 α 的值改變正負號。由此可以看到，T_I 並不具備交錯性質，這是因為根據 T_I 的定義，它的第一和第二個論元必須分別是餘向量和向量，因此根本不可以對調 T_I 的論元。

[6]我們在《數學示例：流形及其定向》中介紹了一般流形的概念，但為簡單起見，以下提供流形的例子一般都是 $\mathbb{R}^m$ 空間的子集。

因此「寄生」於 p 點的 (r,s) 張量可以寫成下式 (下式是 (5) 的改寫)：

$$T_p = T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}\ \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_p \otimes\ldots\otimes \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right|_p \otimes (dx^{j_1})_p \otimes\ldots\otimes (dx^{j_s})_p \qquad (14)$$

請注意在上式的 $\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_p$、...、$\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right|_p$ 中，雖然 i_1、...i_r 表現為 x 的上標，但由於 ∂x^{i_1}、...、∂x^{i_r} 出現於「分母」位置，故應把這些 i_1、...i_r 視作整項的下標，因此上式符合求和約定的要求。

「寄生」於 p 點的 (r,s) 張量除了是向量空間的成員外，也是具有多重線性性質的實值函數。如要了解這些函數的作用，可以運用下式 (下式是 (12) 的改寫, 其中 $(\alpha_1)_p,\ldots,(\alpha_r)_p$ 是 p 點處的 r 個餘切向量, $(v_1)_p,\ldots,(v_s)_p$ 是 p 點處的 s 個切向量)：

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_p \otimes\ldots\otimes \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right|_p \otimes (dx^{j_1})_p \otimes\ldots\otimes (dx^{j_s})_p((\alpha_1)_p,\ldots,(\alpha_r)_p,(v_1)_p,\ldots,(v_s)_p) \\
= \ &\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_p((\alpha_1)_p)\times\ldots\times\left.\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right|_p((\alpha_r)_p)\times(dx^{j_1})_p((v_1)_p)\times\ldots\times(dx^{j_s})_p((v_s)_p) \qquad (15)
\end{aligned}$$

舉例說，考慮 3 維流形 $\mathbb{R}^3$ 及其上的點 $(1,3,5)$ 處的 $(1,1)$ 張量空間 $T_{(1,3,5)}(\mathbb{R}^3)^{\otimes 1}\otimes T^*_{(1,3,5)}(\mathbb{R}^3)^{\otimes 1}$，這個空間的一般成員具有以下形式：

$$T^i_j\ \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{(1,3,5)} \otimes (dx^j)_{(1,3,5)}$$

以下是上述空間中 $(1,1)$ 張量的一個具體例子：

$$(T_{III})_{(1,3,5)} = -2\ \left.\frac{\partial}{\partial x^3}\right|_{(1,3,5)} \otimes (dx^1)_{(1,3,5)} \qquad (16)$$

把上述張量作用於 $(1,3,5)$ 處的 1 個餘切向量和 1 個切向量，可得到一個實數。現設有以下餘切向量和切向量：

$$(\alpha_{III})_{(1,3,5)} = (dx^1)_{(1,3,5)} - 2(dx^2)_{(1,3,5)} + 3(dx^3)_{(1,3,5)} \qquad (17)$$

$$(v_{III})_{(1,3,5)} = -4\ \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_{(1,3,5)} + 5\ \left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_{(1,3,5)} - 6\ \left.\frac{\partial}{\partial x^3}\right|_{(1,3,5)} \qquad (18)$$

讀者可自行驗證，利用張量作為向量空間成員的線性性質以及 (15)，可求得以下結果：

$$\begin{aligned}
&(T_{III})_{(1,3,5)}((\alpha_{III})_{(1,3,5)},(v_{III})_{(1,3,5)}) \\
= \ &-2(3)(-4) \\
= \ &24
\end{aligned}$$

如前所述，對應每一對非負整數 (r, s) 和流形 M 的每一點 p，都有一個 (r, s) 張量空間 $T_pM^{\otimes r} \otimes T_p^*M^{\otimes s}$。現在如果把所有點處的 (r, s) 張量空間的所有成員組成一個集合，便可得到 M 的(r, s) 張量叢((r, s)-tensor bundle)，記作 $TM^{\otimes r} \otimes T^*M^{\otimes s}$，即

$$TM^{\otimes r} \otimes T^*M^{\otimes s} = \{T_p \in T_pM^{\otimes r} \otimes T_p^*M^{\otimes s} : p \in M\} \tag{19}$$

從 (r, s) 張量叢可以進一步得到 (r, s) 張量場的概念。設 M 為流形，則 M 上的(r, s) 張量場((r, s)-tensor field) 是指以下函數：

$$T : M \to TM^{\otimes r} \otimes T^*M^{\otimes s};\ \ T(x) \in T_xM^{\otimes r} \otimes T_x^*M^{\otimes s} \tag{20}$$

根據我們在《數學示例：向量與向量場》中有關「纖維叢」和「截面」的討論，可知 (r, s) 張量場是 (r, s) 張量叢的截面，因此可以沿用該網頁的符號，把流形 M 上所有 (r, s) 張量場組成的集合記作 $\Gamma(TM^{\otimes r} \otimes T^*M^{\otimes s})$。

根據以上定義，(r, s) 張量場可以表示成以下形式：

$$T(x) = T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}(x)\ \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right|_x \otimes \ldots \otimes \left.\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right|_x \otimes (dx^{j_1})_x \otimes \ldots \otimes (dx^{j_s})_x \tag{21}$$

上式跟 (14) 非常相似，所不同者僅在於上式帶有可變論元 x，顯示這是函數 (即 (r, s) 張量場)，而 (14) 則帶有固定下標 p，顯示這是單個點上的 (r, s) 張量。

以下是 $\mathbb{R}^3$ 上 $(1, 1)$ 張量場的例子：

$$T_{IV}(x^1, x^2, x^3) = (x^2 - x^1x^3)\ \left.\frac{\partial}{\partial x^3}\right|_{(x^1,x^2,x^3)} \otimes dx^1_{(x^1,x^2,x^3)} \tag{22}$$

如把上述函數作用於 $\mathbb{R}^3$ 上的點，可得到該點處 $(1, 1)$ 張量空間中的 $(1, 1)$ 張量，例如如把上式作用於點 $(1, 3, 5)$，可得 $T_{IV}(1, 3, 5) = -2\ \frac{\partial}{\partial x^3}\big|_{(1,3,5)} \otimes (dx^1)_{(1,3,5)}$，此即前面討論過的 $(T_{III})_{(1,3,5)}$。

(r, s) 張量是一種作用於 r 個餘向量和 s 個向量的函數，因此 (r, s) 張量場 T 可被看成一個「二重函數」。如把 T 先作用於點 p，其結果 $T(p)$ 是某一 (r, s) 張量；如再把 $T(p)$ 作用於 r 個餘切向量和 s 個切向量，其結果是某一實數。以 T_{IV} 為例，根據前面的計算結果，把這個 $(1, 1)$ 張量場先後作用於點 $(1, 3, 5)$ 和前面討論過的餘切向量 $(\alpha_{III})_{(1,3,5)}$ 和切向量 $(v_{III})_{(1,3,5)}$，所得結果是

$$\begin{aligned} & T_{IV}(1, 3, 5)((\alpha_{III})_{(1,3,5)}, (v_{III})_{(1,3,5)}) \\ = \ & 24 \end{aligned}$$

不過，我們也可以保留 x 的可變點地位，並把 T 作用於微分 1 形式 α [7]和向量場 v，其結果 $T(\alpha, v)(x)$ 是一個隨著 x 而變化的實值函數；如再把這個函數作用於點 p，其結果 $T(\alpha, v)(p)$ 是某一實數。仍以 T_{IV} 為例，把這個 $(1,1)$ 張量場作用於以下微分 1 形式和向量場：

$$(\alpha_{IV})(x^1, x^2, x^3) = x^1(dx^1)_{(x^1,x^2,x^3)} + (x^2 - x^3)(dx^2)_{(x^1,x^2,x^3)} + x^2(dx^3)_{(x^1,x^2,x^3)} \tag{23}$$

$$(v_{IV})(x^1, x^2, x^3) = (-x^1 - x^2) \left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_{(x^1,x^2,x^3)} + x^3 \left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_{(x^1,x^2,x^3)} - 2x^2 \left.\frac{\partial}{\partial x^3}\right|_{(x^1,x^2,x^3)} \tag{24}$$

可得 (在進行以下計算時，要小心分辨上標和冪次)：

$$\begin{aligned} & T_{IV}(\alpha_{IV}, v_{IV})(x^1, x^2, x^3) \\ = \;& (x^2 - x^1x^3)(x^2)(-x^1 - x^2) \\ = \;& -x^1(x^2)^2 - (x^2)^3 + (x^1)^2x^2x^3 + x^1(x^2)^2x^3 \end{aligned}$$

接著如把上述結果作用於點 $(1,3,5)$，所得結果為

$$\begin{aligned} & T_{IV}(\alpha_{IV}, v_{IV})(1,3,5) \\ = \;& (-1)(3^2) - 3^3 + (1^2)(3)(5) + (1)(3^2)(5) \\ = \;& 24 \end{aligned}$$

上述計算結果跟前面求得的 $T_{IV}(1,3,5)((\alpha_{III})_{(1,3,5)}, (v_{III})_{(1,3,5)})$ 一致，這並不奇怪，因為讀者可自行驗證，$\alpha_{IV}(1,3,5)$ 和 $v_{IV}(1,3,5)$ 正好分別等於 $(\alpha_{III})_{(1,3,5)}$ 和 $(v_{III})_{(1,3,5)}$。

以上例子顯示，(r,s) 張量場除可被看成把流形 M 上的點映射為 (r,s) 張量的函數外，也可被看成把 M 上 r 個微分 1 形式和 s 個向量場映射為 M 上實值函數的 (二重) 函數。

連結至數學專題
連結至周家發網頁

[7]根據我們在《數學示例：k 向量與 k 餘向量》中的討論，「微分 k 形式」等於「k 餘向量場」