數學示例：切空間與可定向性

我們在《數學示例：平面曲線的性質》和《數學示例：空間曲線的性質》中展示了切向量和法向量對曲線的研究起著重要的作用。切向量和法向量對曲面的研究同樣起著重要的作用，不僅如此，在曲面上切向量還構成一個切空間，而法向量則可用來判斷曲面的可定向性，這是本文要介紹的內容。

首先介紹切向量，根據上述網頁，切向量是「寄生」於曲線上的向量。在定義曲面上的切向量時，我們要借助曲面上的曲線，因此這裡須先引入曲面上曲線(curve on surface) 的概念。設有曲面 S 的坐標卡 (下式等於《數學示例：曲面的參數化》中的 (1))：

$$X : E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\ \ X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \qquad (1)$$

上式是把二維平面 $\mathbb{R}^2$ 的開子集 E 上的點 (u, v) 映射到 $\mathbb{R}^3$ 內的函數。另外，設有平面曲線的光滑正則參數化形式 (下式相當於《數學示例：曲線的參數化》中的 (1)，以下規定下式中的 D 須為一維直線 $\mathbb{R}$ 的開子集，以配合所在曲面的坐標卡)：

$$Y : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2;\ \ Y(t) = (u(t), v(t)) \qquad (2)$$

上式是把 D 上的點 t 映射到 $\mathbb{R}^2$ 內的函數。現在如能保證 (2) 的值域 $Y(D)$ 是 (1) 的定義域 E 的子集，便可對 (1) 和 (2) 中的函數進行以下複合運算：

$$\begin{aligned} X \circ Y(t) &= X(u(t), v(t)) \\ &= (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))) \end{aligned}$$

如設定 $Z = X \circ Y$，那麼 Z 就是一條曲面上曲線的光滑正則參數化形式：

$$Z : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3;\ \ Z(t) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))) \qquad (3)$$

跟一般空間曲線不同，$Z(t)$ 所代表的曲線是其所有點均在曲面 S 上的曲線。舉例說，考慮 r 半徑球面以及平面上由 $(-\pi, 0)$ 到 $(\pi, 0)$ 的開直線 (即不包含兩個端點的直線)，以下是它們的坐標卡和參數化形式 (以下的 X_1 等於《數學示例：曲面的參數化》中公式 (6) 的 X_4)：

$$X_1 : (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^3;\ \ X_1(u, v) = (r \cos u \cos v, r \sin u \cos v, r \sin v) \qquad (4)$$

$$Y_1 : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2;\ \ Y_1(t) = (t, 0) \qquad (5)$$

由於 Y_1 的值域就是上述直線，而該直線是 X_1 的定義域的子集，因此可以對上述兩個函數進行複合，從而得到以下參數化形式：

$$Z_1 : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^3;\ \ Z_1(t) = (r\cos t, r\sin t, 0) \qquad (6)$$

請注意 $Z_1(t)$ 的 x、y 和 z 坐標滿足 r 半徑球面的方程 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$，因此 $Z_1(t)$ 確是 r 半徑球面上某曲線的軌跡，讀者可自行驗證，這條曲線大致相當於 r 半徑球面的「赤道」(缺少了一點)。

根據前面的討論，(3) 可被看成把某平面曲線映射到某曲面所得曲線的參數化形式。反過來，可以證明任何曲面上的曲線都可表示成 (3) 所示的參數化形式，這即是說任何曲面上的曲線都可被看成把某平面曲線映射到該曲面所得的曲線。

現設有某曲面 S，q 為其上任意點，(1) 為涵蓋 q 點的 S 的坐標卡，即有 $q = X(u, v)$，其中 $(u, v) \in E$；並設有 S 上通過 q 點的某曲線，其光滑正則參數化形式為 (3)，即有 $Z(t) = q$，其中 $t \in D$。由於 Z 所代表的曲線是一種空間曲線，我們可以沿用《數學示例：空間曲線的性質》中介紹的方法，求得這條曲線於 q 點處的切向量 (不一定是單位向量)：Z'(t)。請注意雖然 (3) 表現為包含中間變項 u 和 v 的複合函數，但在實際應用中，當我們把 (2) 中的 $u(t)$ 和 $v(t)$ 分別代入 (1) 中的 u 和 v 後，這些中間變項便會消失，結果 (3) 實際上只包含變項 t，因此在實際求 Z'(t) 時往往無需使用求複合函數導數的「鏈式法則」(chain rule)。

以前述的 r 半徑球面上的「赤道」為例，我們看到把 $X_1(t)$ 與 $Y_1(t)$ 進行複合的結果 $Z_1(t)$ 只包含變項 t 而不再包含中間變項 u 和 v。由於 $Z_1(0) = (r, 0, 0)$，可知 $(r, 0, 0)$ 是「赤道」上的一點。由此可以求「赤道」在 $(r, 0, 0)$ 點處的切向量如下：

$$\begin{aligned} Z_1\text{'}(0) &= (-r\sin 0, r\cos 0, 0) \\ &= (0, r, 0) \end{aligned}$$

一般而言，曲面 S 上有不只一條曲線通過 q 點，對每一條這樣的曲線，都可以求它於 q 點處的切向量。舉例說，考慮平面上由 $(0, -\frac{\pi}{2})$ 到 $(0, \frac{\pi}{2})$ 的開直線，設我們使用以下參數化形式：

$$Y_2 : (0, \pi) \to \mathbb{R}^2;\ \ Y_2(t) = \left(0, t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (7)$$

把 X_1 與 Y_2 複合，可得到以下參數化形式：

$$Z_2 : (0, \pi) \to \mathbb{R}^3;\ \ Z_2(t) = \left(r\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right), 0, r\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right) \qquad (8)$$

讀者可自行驗證，上式是 r 半徑球面上「本初子午線」(即 $0°$ 經線) 的參數化形式。由於 $Z_2(\frac{\pi}{2}) = (r, 0, 0)$，可知 $(r, 0, 0)$ 也是「本初子午線」上的一點。由此可以求得「本初子午線」在 $(r, 0, 0)$ 點處的切向量為

$$Z_2\text{'}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 0, r)$$

另外又如平面上由 $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ 到 $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 的開直線，其參數化形式為

$$Y_3 : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^2;\ \ Y_3(t) = (t, t) \qquad (9)$$

把 X_1 與 Y_3 複合，可得到以下參數化形式

$$Z_3 : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}^3;\ \ Z_3(t) = (r\cos^2 t, r\sin t\cos t, r\sin t) \qquad (10)$$

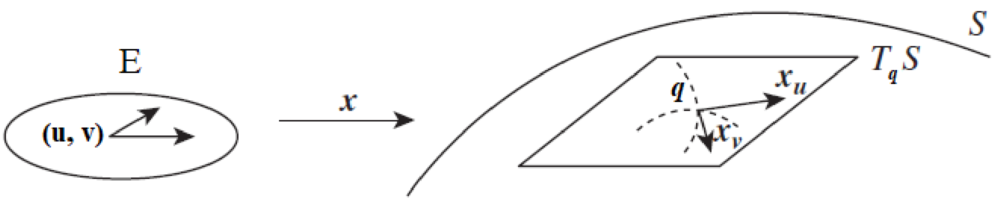
上式代表 r 半徑球面上的另一條曲線。由於 $Z_3(0) = (r, 0, 0)$，可知 $(r, 0, 0)$ 也是這條曲線上的一點。讀者可自行驗證，這條曲線在 $(r, 0, 0)$ 點處的切向量是

$$Z_3\text{'}(0) = (0, r, r)$$

上述討論似乎顯示，如要找出某曲面上某點的所有切向量，要考察無窮無盡的曲線。但幸好我們有以下定理。

定理 1：設 q 為某曲面 S 上的任意點，(1) 為涵蓋 q 點的 S 的坐標卡，並設 $q = X(u, v)$，那麼通過 q 的所有切向量組成一個向量空間，這個向量空間是由 $\frac{\partial X}{\partial u}(u, v)$ 和 $\frac{\partial X}{\partial v}(u, v)$ 生成 (意即這個空間上的每個切向量都可寫成這兩個向量的線性組合)。

上述定理中的向量空間稱為 S 於 q 點處的切空間(tangent space)，以下記作 T_qS，下圖是上述定理的示意圖：



上圖右側顯示一個曲面 S 及其上一點 q，X 是涵蓋 q 點的 S 的坐標卡，它把左側的定義域 E 映射到 S，其中 (u, v) 被映射到 q。上圖右側還顯示 S 於 q 點處的切空間 T_qS，這個空間是由兩個向量 $\frac{\partial X}{\partial u}(u, v)$ (上圖簡記作 X_u) 和 $\frac{\partial X}{\partial v}(u, v)$ (上圖簡記作 X_v) 生成，因此實質上是一個平面 (就正如笛卡爾

坐標平面可被看成由兩個向量 $(1,0)$ 和 $(0,1)$ 生成那樣)。

請注意上述切空間是「寄生」於 q 點上的，因此這個空間上的切向量是以 q 點 (而非整個空間的坐標原點) 作為起點。由於 X 是坐標卡，它具有正則性，根據我們在《數學示例：曲面的參數化》中的討論，$\frac{\partial X}{\partial u}(u,v)$ 和 $\frac{\partial X}{\partial v}(u,v)$ 是線性獨立的。另外，根據上述定理，這兩個向量生成整個切空間 T_qS。換句話說，$\{\frac{\partial X}{\partial u}(u,v), \frac{\partial X}{\partial v}(u,v)\}$ 構成 T_qS 的一個「基底」(basis)(請參閱《感受伽羅瓦：向量空間與子域》中對上述概念的介紹)。

根據上述定理，為找出某曲面上某點 $q = X(u,v)$ 的切向量，無需考慮任何曲線，只需計算 $\frac{\partial X}{\partial u}(u,v)$ 和 $\frac{\partial X}{\partial v}(u,v)$，$q$ 點處所有切向量都是這兩個向量的線性組合。以前面討論過的 r 半徑球面 (以下記作 S_1) 為例，為求 S_1 上任意一點 (u,v) 的切空間，先要求其坐標卡 X_1 的偏導數如下：

$$\begin{aligned}\frac{\partial X_1}{\partial u}(u,v) &= (-r\sin u\cos v, r\cos u\cos v, 0) \qquad (11)\\ \frac{\partial X_1}{\partial v}(u,v) &= (-r\cos u\sin v, -r\sin u\sin v, r\cos v) \qquad (12)\end{aligned}$$

由於 $X_1(0,0) = (r,0,0)$，如要求 S_1 於 $(r,0,0)$ 點處的切空間 $T_{(r,0,0)}S_1$ 的基底，我們要計算

$$\begin{aligned}\frac{\partial X_1}{\partial u}(0,0) &= (0,r,0)\\ \frac{\partial X_1}{\partial v}(0,0) &= (0,0,r)\end{aligned}$$

由此可知 $\{(0,r,0),(0,0,r)\}$ 構成 $T_{(r,0,0)}S_1$ 的一個基底，這即是說，通過 $(r,0,0)$ 點的任何切向量都可寫成這兩個向量的線性組合。此一結論與前面的計算結果吻合，因為根據前面的計算，Z_1'(0) 和 Z_2'$(\frac{\pi}{2})$ 正好分別等於這兩個向量，而 Z_3'(0) 也等於這兩個向量的線性組合，因為 $Z_3\text{'}(0) = (0,r,r) = (0,r,0) + (0,0,r)$。不僅如此，我們還知道無窮無盡個前面沒有計算出來的向量，例如 $(0, \sqrt{2}r, -\pi r)$，也是上述切空間的成員。

利用 (11) 和 (12)，還可求得 S_1 於 X_1 定義域內其他點的切空間基底。舉例說，由於 $X_1(\frac{\pi}{2},0) = (0,r,0)$，如要求 S_1 於 $(0,r,0)$ 點處的切空間 $T_{(0,r,0)}S_1$，我們要計算

$$\begin{aligned}\frac{\partial X_1}{\partial u}\left(\frac{\pi}{2},0\right) &= (-r,0,0)\\ \frac{\partial X_1}{\partial v}\left(\frac{\pi}{2},0\right) &= (0,0,r)\end{aligned}$$

由此可知 $\{(-r,0,0),(0,0,r)\}$ 構成 $T_{(0,r,0)}S_1$ 的一個基底。

接下來讓我們把「定理 1」應用於平面，以下是通過原點、(a_1, a_2, a_3) 和 (b_1, b_2, b_3) 這三個不共線點的平面的坐標卡 (下式等於《數學示例：曲面的參數化》中 (2) 的 X_1)：

$$X_4 : (-\infty, \infty)\times(-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^3;\ \ X_4(u, v) = (a_1u+b_1v, a_2u+b_2v, a_3u+b_3v) \tag{13}$$

對上式求偏導數，可得

$$\frac{\partial X_4}{\partial u}(u, v) = (a_1, a_2, a_3) \tag{14}$$

$$\frac{\partial X_4}{\partial v}(u, v) = (b_1, b_2, b_3) \tag{15}$$

由於上述計算結果是常值向量，根據「定理 1」，可知上述平面於每一點處的切空間都以 $\{(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)\}$ 作為基底，而且這兩個向量的線性組合可寫成

$$\begin{aligned} & u(a_1, a_2, a_3) + v(b_1, b_2, b_3) \\ = \ & (a_1u + b_1v, a_2u + b_2v, a_3u + b_3v) \end{aligned}$$

正是 (13) 中的數式，由此可見由上述基底生成的切空間正等於原來通過原點、(a_1, a_2, a_3) 和 (b_1, b_2, b_3) 這三點的平面。換句話說，平面上每一點的切空間都等於原來的平面，這正是平面的獨有性質。

接著介紹法向量，如前所述，曲面的每一點都「寄生」著一個切空間，而這個空間實質上是一個平面，而與這個平面垂直的向量就是法向量。對每一個切空間而言，與之垂直的向量共有兩個，因此我們要借助坐標卡確定一個法向量。設 q 為某曲面 S 上的任意點，(1) 為涵蓋 q 點的 S 的坐標卡，並設 $q = X(u, v)$，那麼 q 點處的曲面單位法向量(surface unit normal vector)(以下記作 $N(u, v)$)，可用以下公式計算：

$$N(u, v) = \frac{\frac{\partial X}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial X}{\partial v}(u, v)}{\left\|\frac{\partial X}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial X}{\partial v}(u, v)\right\|} \tag{16}$$

在上式中，$\times$ 代表向量的叉積運算。上式的理據是，兩個向量的叉積是一個與這兩個向量同時垂直的向量，因而也是一個與這兩個向量的一切線性組合垂直的向量；把這個叉積除以其模，便得到一個單位向量。由於 X 具有正則性，根據我們在《數學示例：曲面的參數化》中的討論，上式中的叉積在 X 的定義域內永不等於 $(0, 0, 0)$，因此上式不會出現除以 0 的情況。

以前面討論過的 r 半徑球面 S_1 為例，由於前面已求得其偏導數 (見 (11) 和 (12))，現在可直接求其叉積 (如欲了解如何計算叉積，請參閱《數學示例：空間曲線的性質》中的介紹) 和叉積的模如下：

$$\frac{\partial X_1}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial X_1}{\partial v}(u, v) = (r^2 \cos u \cos^2 v, r^2 \sin u \cos^2 v, r^2 \sin v \cos v)$$

$$\left\| \frac{\partial X_1}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial X_1}{\partial v}(u,v) \right\| = r^2 \cos v$$

由此應用 (16)，可得

$$\begin{aligned} N_1(u,v) &= \frac{(r^2 \cos u \cos^2 v, r^2 \sin u \cos^2 v, r^2 \sin v \cos v)}{r^2 \cos v} \\ &= (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) \end{aligned}$$

利用上述結果，便可求得 S_1 於各點處的曲面單位法向量。舉例說，由於 $X_1(0,0) = (r,0,0)$ 和 $X_1(\frac{\pi}{2},0) = (0,r,0)$，可知 S_1 於 $(r,0,0)$ 和 $(0,r,0)$ 點處的曲面單位法向量分別為

$$N_1(0,0) = (\cos 0 \cos 0, \sin 0 \cos 0, \sin 0) = (1,0,0)$$

$$N_1\left(\frac{\pi}{2},0\right) = \left(\cos\frac{\pi}{2}\cos 0, \sin\frac{\pi}{2}\cos 0, \sin 0\right) = (0,1,0)$$

讀者可自行驗證，上述兩個曲面單位法向量分別與前面討論過的兩個切空間 $T_{(r,0,0)}S_1$ 和 $T_{(0,r,0)}S_1$ 垂直。

接下來把公式 (16) 應用於前面討論過的以 X_4 作為坐標卡的平面，由於前面已求得其偏導數 (見 (14) 和 (15))，現在可直接求其叉積如下：

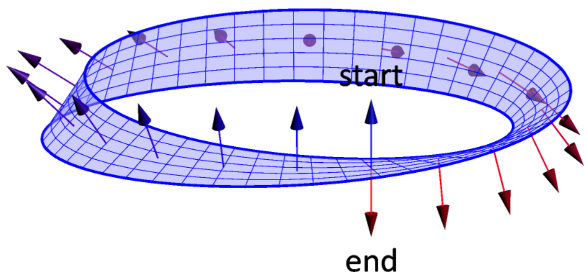
$$\frac{\partial X_4}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial X_4}{\partial v}(u,v) = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

由此應用 (16)，可得

$$N_4(u,v) = \frac{(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)}{\sqrt{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}}$$

上述結果是一個常數，由此可以看到，平面上每一點的曲面單位法向量是同一個向量，這一點正符合我們的期望。

與上述概念有關的概念是曲面的「可定向性」，直觀地看，這是指曲面能否被分為兩個表面的性質。本文以及《數學示例：曲面的參數化》討論的大多數曲面都是可定向的。舉例說，r 半徑球面顯然可被分為內、外兩個表面，因此是可定向的。但也存在不可定向的曲面，莫比烏斯帶就是這樣的曲面。微分幾何利用曲面單位法向量來定義曲面的可定向性。設 S 為曲面，(1) 為其坐標卡，若 S 上各點的曲面單位法向量均呈連續變化，S 是可定向(orientable) 的，否則是不可定向(non-orientable) 的。下圖顯示莫比烏斯帶的情況：



上圖中的箭頭代表莫比烏斯帶的中線上某些點的曲面單位法向量，標示“start”和“end”處是同一點的曲面單位法向量。上圖顯示如果我們從“start/end”點處開始繞著莫比烏斯帶的中線每隔一段距離繪出該點的曲面單位法向量，那麼當繞過中線一周回到“start/end”點處時，所得曲面單位法向量與最初的曲面單位法向量反向。這顯示“start/end”點附近的曲面單位法向量呈不連續變化。由此根據上述定義，可知莫比烏斯帶是不可定向的。

接著讓我們用具體的數式證實上述結論。以下是莫比烏斯帶的坐標卡 (下式等於《數學示例：曲面的參數化》中 (26) 的 X_{13}，但為免下式過於冗長，以下用 w 代表 $r + v\cos\frac{u}{2}$)：

$$X_5 : (0, 2\pi) \times \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right) \to \mathbb{R}^3;\ \ X_5(u, v) = \left(w\cos u, w\sin u, v\sin\frac{u}{2}\right) \tag{17}$$

對上式求偏導數，可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial X_5}{\partial u}(u, v) &= \left(-w\sin u - \frac{v}{2}\cos u\sin\frac{u}{2}, w\cos u - \frac{v}{2}\sin u\sin\frac{u}{2}, \frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\\ \frac{\partial X_5}{\partial v}(u, v) &= \left(\cos u\cos\frac{u}{2}, \sin u\cos\frac{u}{2}, \sin\frac{u}{2}\right)\end{aligned}$$

接著求上述偏導數的叉積如下：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial X_5}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial X_5}{\partial v}(u, v)\\ = &\left(w\cos u\sin\frac{u}{2} - \frac{v}{2}\sin u, w\sin u\sin\frac{u}{2} + \frac{v}{2}\cos u, -w\cos\frac{u}{2}\right)\end{aligned}$$

由此得

$$\left\|\frac{\partial X_5}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial X_5}{\partial v}(u, v)\right\| = \frac{\sqrt{4w^2 + v^2}}{2}$$

上述計算結果看似頗為複雜，但我們實際上只需考慮莫比烏斯帶的中線，這等於把 X_5 的 v 坐標限制為 0，由此可以簡化上述結果：

$$\frac{\partial X_5}{\partial u}(u, 0) \times \frac{\partial X_5}{\partial v}(u, 0) = \left(r\cos u\sin\frac{u}{2}, r\sin u\sin\frac{u}{2}, -r\cos\frac{u}{2}\right)$$

$$\left\|\frac{\partial X_5}{\partial u}(u,0)\times\frac{\partial X_5}{\partial v}(u,0)\right\| = r$$

由此根據 (16)，可得

$$N_5(u,0) = \left(\cos u\sin\frac{u}{2},\sin u\sin\frac{u}{2},-\cos\frac{u}{2}\right)$$

接著求莫比烏斯帶上 $(r,0,0)$ 點的曲面單位法向量，這一點相當於上圖中的 "start/end"點。雖然 $(r,0,0)$ 這點不在 X_5 的覆蓋範圍內，但我們可以求莫比烏斯帶上的點以不同方式趨向 $(r,0,0)$ 時曲面單位法向量的極限值。由於

$$\lim_{u\to 0} X_5(u,0) = \lim_{u\to 2\pi} X_5(u,0) = (r,0,0)$$

以下求 u 分別趨向 0 和 2π 時莫比烏斯帶的曲面單位法向量極限值：

$$\begin{aligned}\lim_{u\to 0} N_5(u,0) &= (0,0,-1)\\ \lim_{u\to 2\pi} N_5(u,0) &= (0,0,1)\end{aligned}$$

上述結果顯示當莫比烏斯帶上的點以不同方式趨向 $(r,0,0)$ 點時，曲面單位法向量的極限值是互相反向的向量，正是上圖所示的情況。

連結至數學專題
連結至周家發網頁