數學示例：對稱化與交錯化

我們在《數學示例：張量積與縮略》中介紹了張量積和內積，這是適用於一般張量之間的「乘法」運算。本文主旨是介紹張量的兩個重要次類－對稱張量和反對稱張量以及從一般張量得到這兩個次類的運算－對稱化和交錯化，並進而介紹與這兩個次類相應的兩種「乘法」運算－對稱積和楔積。

在介紹上述張量次類前，須先引入一些基本概念。設 S_s 為 $\{1, 2, \ldots, s-1, s\}$ 的元素的排列組成的集合[1]，$\sigma \in S_s$，並且

$$\alpha = \sum_{1 \leq j_1, \ldots, j_s \leq m} \alpha_{j_1 \ldots j_s} \, dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s} \qquad (1)$$

為張量空間 $T_p M^{\otimes 0} \otimes T_p^* M^{\otimes s}$ 中的 $(0, s)$ 張量，其中 M 是 m 維流形，p 是 M 上一點，則 σ 對 α 的「群作用」(group action) 可定義如下 (在下式中，$\bullet$ 代表群作用)：

$$\sigma \bullet \alpha = \sum_{1 \leq j_1, \ldots, j_s \leq m} \alpha_{j_1 \ldots j_s} \, dx^{j_{\sigma[1]}} \otimes \ldots \otimes dx^{j_{\sigma[s]}} \qquad (2)$$

舉例說，考慮 S_3 中的成員 (13)[2]以及 $T_p(\mathbb{R}^2)^{\otimes 0} \otimes T_p^*(\mathbb{R}^2)^{\otimes 3}$ 中的以下 $(0, 3)$ 張量：

$$\alpha_I = -3 \, dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^2 \qquad (3)$$

把上式與 (1) 對照，我們有

$$j_1 = 1, \quad j_2 = 1, \quad j_3 = 2$$

由此根據 (2)，我們有[3]

$$(13) \bullet \alpha_I \;\; = \;\; -3 \, dx^{j_{(13)[1]}} \otimes dx^{j_{(13)[2]}} \otimes dx^{j_{(13)[3]}}$$

[1] S_s 的正式名稱為「s 次對稱群」(symmetric group of degree s)，有關這種群的詳細介紹，請參閱《感受伽羅瓦：群的基本概念》。

[2] 本文採用「循環式」表示排列，有關循環式的詳細介紹，請參閱《感受伽羅瓦：排列與對稱多項式》。(13) 的意思是把 1 映射為 3，把 3 映射為 1，2 則維持不變。此外，以下用 (1) 代表恆等排列。

[3] 為區分循環式與函數作用，這裡用方括號代表循環式對整數的函數作用，例如 (13)[1] 代表把循環式 (13) 作用於整數 1，其結果為 3。

$$
\begin{aligned}
&= -3\, dx^{j_3} \otimes dx^{j_2} \otimes dx^{j_1} \\
&= -3\, dx^2 \otimes dx^1 \otimes dx^1
\end{aligned}
$$

若對任何 $\sigma \in S_s$，都有 $\sigma \bullet \alpha = \alpha$，我們便說 α 是 $(0, s)$對稱(symmetric) 張量。上述 α_I 不是對稱的，因為 $\sigma_I \bullet \alpha_I \neq \alpha_I$。

接著定義一個名為對稱化(symmetrization) 的運算，記作 Sym。設 α 如上定義，則

$$
\mathrm{Sym}(\alpha) = \sum_{\sigma \in S_s} \sigma \bullet \alpha \qquad (4)
$$

現用上式計算 $\mathrm{Sym}(\alpha_I)$ 如下：

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Sym}(\alpha_I) \\
= \; & (1) \bullet \alpha_I + (12) \bullet \alpha_I + (13) \bullet \alpha_I + (23) \bullet \alpha_I + (123) \bullet \alpha_I + (132) \bullet \alpha_I \\
= \; & -3\, dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^2 - 3\, dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^2 - 3\, dx^2 \otimes dx^1 \otimes dx^1 \\
& -3\, dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^1 - 3\, dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^1 - 3\, dx^2 \otimes dx^1 \otimes dx^1 \\
= \; & -6\, (dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^2 + dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^1 \otimes dx^1)
\end{aligned}
$$

可以證明，如果 α 不是對稱張量，則 $\mathrm{Sym}(\alpha)$ 必是對稱張量，例如讀者可自行驗證，上面求得的 $\mathrm{Sym}(\alpha_I)$ 是對稱張量；如果 α 本身是對稱張量，則

$$
\mathrm{Sym}(\alpha) = s!\, \alpha \qquad (5)
$$

例如以下張量顯然是 $T_p^*(\mathbb{R}^2)^{\otimes 0} \otimes T_p^*(\mathbb{R}^2)^{\otimes 3}$ 中的 $(0, 3)$ 對稱張量：

$$
\alpha_{II} = -3\, dx^2 \otimes dx^2 \otimes dx^2 \qquad (6)
$$

讀者可自行驗證，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Sym}(\alpha_{II}) &= -18\, dx^2 \otimes dx^2 \otimes dx^2 \\
&= 3!\, \alpha_{II}
\end{aligned}
$$

總上所述，把 Sym 作用於 $T_pM^{\otimes 0} \otimes T_p^*M^{\otimes s}$ 中的所有 $(0, s)$ 張量，可以得到這個張量空間中的所有對稱張量，我們把這些對稱張量組成一個集合 $\odot^s T_p^*M$。可以證明，$\odot^s T_p^*M$ 構成 $T_pM^{\otimes 0} \otimes T_p^*M^{\otimes s}$ 的一個子空間，這個向量空間的維度是 $C(m + s - 1, s) = \frac{(m+s-1)!}{s!(m-1)!}$，以下是這個向量空間的有序基底：

$$
(\mathrm{Sym}(dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s}) : 1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_s \leq m) \qquad (7)
$$

對稱張量之間除可進行張量積運算外，還可進行另一種特殊的乘法。設 α 為 $\odot^s T_p^*M$ 中的 $(0, s)$ 對稱張量，β 為 $\odot^u T_p^*M$ 中的 $(0, u)$ 對稱張量，則 α 與

β 的對稱積(symmetric product)，記作 $\alpha \odot \beta$，是 $\odot^{s+u}T_p^*M$ 中的 $(0, s+u)$ 對稱張量，可計算如下：

$$\alpha \odot \beta = \frac{1}{s!\,u!} \times \mathrm{Sym}(\alpha \otimes \beta) \qquad (8)$$

可以證明，對稱積具有《數學示例：張量積與縮略》的「定理 1」中張量積的所有性質，即對稱積具有雙重線性性質、結合性，並以 1 作為乘法單位元，其中結合性可以進一步推廣為以下性質：設 $\alpha_1 \in \odot^{s_1}T_p^*M$，...，$\alpha_k \in \odot^{s_k}T_p^*M$，則

$$\alpha_1 \odot \ldots \odot \alpha_k = \frac{1}{s_1!\,\ldots s_k!} \times \mathrm{Sym}(\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_k) \qquad (9)$$

此外，還可證明對稱積具有交換性，即對任何 $\alpha \in \odot^s T_p^*M$ 和 $\beta \in \odot^u T_p^*M$，均有

$$\alpha \odot \beta = \beta \odot \alpha \qquad (10)$$

請注意由於 dx^{j_1}、...、dx^{j_s} 是 $(0,1)$ 對稱張量，根據 (9)，我們有

$$dx^{j_1} \odot \ldots \odot dx^{j_s} = \mathrm{Sym}(dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s}) \qquad (11)$$

由此可以把 (7) 所示的有序基底改寫為

$$(dx^{j_1} \odot \ldots \odot dx^{j_s} : 1 \le j_1 \le \ldots \le j_s \le m) \qquad (12)$$

舉例說，考慮 $\odot^1 T_p^*\mathbb{R}^2$、$\odot^2 T_p^*\mathbb{R}^2$ 和 $\odot^3 T_p^*\mathbb{R}^2$ 這三個對稱張量空間。根據前面的討論和 (12)，$\odot^1 T_p^*\mathbb{R}^2$ 是一個 $C(2+1-1,1) = 2$ 維向量空間，以下是其有序基底：

$$(dx^1, dx^2)$$

$\odot^2 T_p^*\mathbb{R}^2$ 則是一個 $C(2+2-1,2) = 3$ 維向量空間，以下是其有序基底：

$$\begin{aligned}
(dx^1 \odot dx^1 &= 2\,dx^1 \otimes dx^1, \\
dx^1 \odot dx^2 &= dx^1 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^1, \\
dx^2 \odot dx^2 &= 2\,dx^2 \otimes dx^2)
\end{aligned}$$

而 $\odot^3 T_p^*\mathbb{R}^2$ 則是一個 $C(2+3-1,3) = 4$ 維向量空間，以下是其有序基底：

$$\begin{aligned}
(dx^1 \odot dx^1 \odot dx^1 &= 6\,dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^1, \\
dx^1 \odot dx^1 \odot dx^2 &= 2\,(dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^2 + dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^1 \otimes dx^1), \\
dx^1 \odot dx^2 \odot dx^2 &= 2\,(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^1 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^2 \otimes dx^1), \\
dx^2 \odot dx^2 \odot dx^2 &= 6\,dx^2 \otimes dx^2 \otimes dx^2)
\end{aligned}$$

現在讓我們運用 (8) 計算 $dx^2 \in \odot^1 T_p^*\mathbb{R}^2$ 與 $dx^1 \odot dx^2 \in \odot^2 T_p^*\mathbb{R}^2$ 的對稱積如下：

$$\begin{aligned}
& dx^2 \odot (dx^1 \odot dx^2) \\
= \; & \frac{1}{1!\,2!} \times \mathrm{Sym}(dx^2 \otimes (dx^1 \odot dx^2)) \\
= \; & \frac{1}{2} \times \mathrm{Sym}(dx^2 \otimes (dx^1 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^1)) \\
= \; & \frac{1}{2} \times \mathrm{Sym}(dx^2 \otimes dx^1 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^2 \otimes dx^1) \\
= \; & \frac{1}{2} \times 4\,(dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^1 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^2 \otimes dx^1) \\
= \; & dx^1 \odot dx^2 \odot dx^2
\end{aligned}$$

上述計算結果是 $\odot^3 T_p^*\mathbb{R}^2$ 中的成員，這正符合我們的期望。讀者可自行計算

$$(dx^1 \odot dx^2) \odot dx^2 = dx^1 \odot dx^2 \odot dx^2 = dx^2 \odot (dx^1 \odot dx^2)$$

由此驗證 (10)。

接著介紹張量的另一個次類。設 S_s 和 α 如上定義，並有以下函數：

$$\mathrm{sgn}\,\sigma = \begin{cases} 1, & \text{若 } \sigma \text{ 是偶排列} \\ -1, & \text{若 } \sigma \text{ 是奇排列} \end{cases} \qquad (13)$$

在上述定義中，σ 是偶 (奇) 排列，若在 $\{1, 2, \ldots, s-1, s\}$ 中恰好有偶 (奇) 數對整數 x 和 y 使得 $x < y$ 但 $\sigma[x] > \sigma[y]$[4]。舉例說，考慮 S_2 中的兩個成員 (1) 和 (12)。由於在 $\{1, 2\}$ 中，$(1)[1] \not> (1)[2]$，因此 (1) 是偶排列，故有 $\mathrm{sgn}(1) = 1$；$(12)[1] > (12)[2]$, 因此 (12) 是奇排列, 故有 $\mathrm{sgn}(12) = -1$。

若對任何 $\sigma \in S_s$，都有 $\sigma \bullet \alpha = (\mathrm{sgn}\,\sigma)\alpha$，我們便說 α 是 $(0, s)$反對稱(antisymmetric) 張量。舉例說，考慮 $T_p^*(\mathbb{R}^3)^{\otimes 0} \otimes T_p^*(\mathbb{R}^3)^{\otimes 2}$ 中的以下 $(0, 2)$ 張量：

$$\alpha_{III} = 5\,dx^1 \otimes dx^3 \qquad (14)$$

α_{III} 不是反對稱的，因為

$$(12) \bullet \alpha_{III} = 5\,dx^3 \otimes dx^1 \neq -5\,dx^1 \otimes dx^3 = (\mathrm{sgn}(12))\alpha_{III}$$

接著定義一個名為交錯化(alternation) 的運算，記作 Alt。設 α 如上定義，則

$$\mathrm{Alt}(\alpha) = \sum_{\sigma \in S_s} \mathrm{sgn}\,\sigma(\sigma \bullet \alpha) \qquad (15)$$

[4]排列的奇偶性還有另一個定義：σ 是偶 (奇) 排列，若 σ 的循環式可被寫成偶 (奇) 數個對換的乘積。可以證明，這兩個定義是等價的。

現用上式計算 $\mathrm{Alt}(\alpha_{III})$ 如下：

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Alt}(\alpha_{III}) \\
= \ & \mathrm{sgn}\,(1)((1) \bullet \alpha_{III}) + \mathrm{sgn}\,(12)((12) \bullet \alpha_{III}) \\
= \ & (1)(5\,dx^1 \otimes dx^3) + (-1)(5\,dx^3 \otimes dx^1) \\
= \ & 5\,(dx^1 \otimes dx^3 - dx^3 \otimes dx^1)
\end{aligned}$$

可以證明，如果 α 不是反對稱張量，則 $\mathrm{Alt}(\alpha)$ 必是反對稱張量，例如讀者可自行驗證，上面求得的 $\mathrm{Alt}(\alpha_{III})$ 是反對稱張量；如果 α 本身是反對稱張量，則

$$\mathrm{Alt}(\alpha) = s!\,\alpha \qquad (16)$$

例如以下張量顯然是 $T_p^*(\mathbb{R}^3)^{\otimes 0} \otimes T_p^*(\mathbb{R}^3)^{\otimes 2}$ 中的 $(0,2)$ 反對稱張量：

$$\alpha_{IV} = 5\,(dx^3 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^3) \qquad (17)$$

讀者可自行驗證，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Alt}(\alpha_{IV}) &= 10\,(dx^3 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^3) \\
&= 2!\,\alpha_{IV}
\end{aligned}$$

總上所述，把 Alt 作用於 $T_p^*M^{\otimes 0} \otimes T_p^*M^{\otimes s}$ 中的所有 $(0,s)$ 張量，可以得到這個張量空間中的所有反對稱張量，我們把這些反對稱張量組成一個集合 $\bigwedge^s T_p^*M$。可以證明，$\bigwedge^s T_p^*M$ 構成 $T_p^*M^{\otimes 0} \otimes T_p^*M^{\otimes s}$ 的一個子空間，這個向量空間的維度是 $C(m,s) = \frac{m!}{s!\,(m-s)!}$，以下是這個向量空間的有序基底：

$$(\mathrm{Alt}(dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s}) : 1 \le j_1 < \ldots < j_s \le m) \qquad (18)$$

反對稱張量之間除可進行張量積運算外，還可進行另一種特殊的乘法。設 α 為 $\bigwedge^s T_p^*M$ 中的 $(0,s)$ 反對稱張量，β 為 $\bigwedge^u T_p^*M$ 中的 $(0,u)$ 反對稱張量，則 α 與 β 的楔積(wedge product)，記作 $\alpha \wedge \beta$，是 $\bigwedge^{s+u} T_p^*M$ 中的 $(0, s+u)$ 反對稱張量，可計算如下：

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{s!\,u!} \times \mathrm{Alt}(\alpha \otimes \beta) \qquad (19)$$

可以證明，楔積像對稱積那樣也具有雙重線性性質、結合性，並以 1 作為乘法單位元，其中結合性可以進一步推廣為以下性質：設 $\alpha_1 \in \bigwedge^{s_1} T_p^*M$，…，$\alpha_k \in \bigwedge^{s_k} T_p^*M$，則

$$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k = \frac{1}{s_1!\,\ldots\,s_k!} \times \mathrm{Alt}(\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_k) \qquad (20)$$

此外，還可證明楔積具有交錯性質，即對任何 $\alpha \in \bigwedge^s T_p^* M$ 和 $\beta \in \bigwedge^u T_p^* M$，均有

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{su}\, \beta \wedge \alpha \qquad (21)$$

請注意由於 dx^{j_1}、...、dx^{j_s} 是 $(0,1)$ 反對稱張量，根據 (20)，我們有

$$dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_s} = \mathrm{Alt}(dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s}) \qquad (22)$$

由此可以把 (18) 所示的有序基底改寫為

$$(dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_s} : 1 \leq j_1 < \ldots < j_s \leq m) \qquad (23)$$

舉例說，考慮 $\bigwedge^1 T_p^* \mathbb{R}^3$、$\bigwedge^2 T_p^* \mathbb{R}^3$ 和 $\bigwedge^3 T_p^* \mathbb{R}^3$ 這三個反對稱張量空間。根據前面的討論和 (23)，$\bigwedge^1 T_p^* \mathbb{R}^3$ 是一個 $C(3,1) = 3$ 維向量空間，以下是其有序基底：

$$(dx^1, dx^2, dx^3)$$

$\bigwedge^2 T_p^* \mathbb{R}^3$ 則是一個 $C(3,2) = 3$ 維向量空間，以下是其有序基底：

$$\begin{aligned} (dx^1 \wedge dx^2 &= dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1, \\ dx^1 \wedge dx^3 &= dx^1 \otimes dx^3 - dx^3 \otimes dx^1, \\ dx^2 \wedge dx^3 &= dx^2 \otimes dx^3 - dx^3 \otimes dx^2) \end{aligned}$$

而 $\bigwedge^3 T_p^* \mathbb{R}^3$ 則是一個 $C(3,3) = 1$ 維向量空間，以下是其有序基底：

$$\begin{aligned} (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 &= dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3 - dx^2 \otimes dx^1 \otimes dx^3 - dx^3 \otimes dx^2 \otimes dx^1 \\ &\quad -dx^1 \otimes dx^3 \otimes dx^2 + dx^2 \otimes dx^3 \otimes dx^1 + dx^3 \otimes dx^1 \otimes dx^2) \end{aligned}$$

現在讓我們運用 (19) 計算 $dx^2 \in \bigwedge^1 T_p^* \mathbb{R}^3$ 與 $dx^1 \wedge dx^3 \in \bigwedge^2 T_p^* \mathbb{R}^3$ 的楔積如下：

$$\begin{aligned} & dx^2 \wedge (dx^1 \wedge dx^3) \\ = {} & \frac{1}{1!\,2!} \times \mathrm{Alt}(dx^2 \otimes (dx^1 \wedge dx^3)) \\ = {} & \frac{1}{2} \times \mathrm{Alt}(dx^2 \otimes (dx^1 \otimes dx^3 - dx^3 \otimes dx^1)) \\ = {} & \frac{1}{2} \times \mathrm{Alt}(dx^2 \otimes dx^1 \otimes dx^3 - dx^2 \otimes dx^3 \otimes dx^1) \\ = {} & \frac{1}{2} \times 2\,(-dx^1 \otimes dx^2 \otimes dx^3 + dx^2 \otimes dx^1 \otimes dx^3 + dx^3 \otimes dx^2 \otimes dx^1 \\ & +dx^1 \otimes dx^3 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^3 \otimes dx^1 - dx^3 \otimes dx^1 \otimes dx^2) \\ = {} & -dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \end{aligned}$$

上述計算結果是 $\bigwedge^3 T_p^*\mathbb{R}^3$ 中的成員，這正符合我們的期望。讀者可自行計算

$$(dx^1 \wedge dx^3) \wedge dx^2 = -dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = (-1)^{(2\times 1)}\, dx^2 \wedge (dx^1 \wedge dx^3)$$

由此驗證 (21)。

以上把對稱／反對稱張量以及相關概念 (包括對稱化／交錯化和對稱積／楔積) 的定義建基於 $(0, s)$ 張量之上，但其實也可以把這些概念的定義建基於 $(r, 0)$ 張量之上。舉例說，設

$$v = \sum_{1\leq i_1,\ldots,i_r\leq m} v^{i_1\ldots i_r}\, \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \qquad (24)$$

為張量空間 $T_pM^{\otimes r} \otimes T_p^*M^{\otimes 0}$ 中的 $(r, 0)$ 張量，那麼可以仿照前面的 (2)，定義 $\sigma \bullet v$，並從而定義 $(r, 0)$ 對稱／反對稱張量、相關的 $(r, 0)$ 對稱張量空間 $\odot^r T_pM$ ／反對稱張量空間 $\bigwedge^r T_pM$ 以及 $(r, 0)$ 張量的對稱化／交錯化和對稱積／楔積運算，而且這些概念和運算具有與前面提過相同的性質。

舉例說，考慮 $\frac{\partial}{\partial x^2} \in \odot^1 T_p\mathbb{R}^2$ 和 $\frac{\partial}{\partial x^1} \odot \frac{\partial}{\partial x^2} \in \odot^2 T_p\mathbb{R}^2$，讀者可自行驗證

$$\frac{\partial}{\partial x^2} \odot \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \odot \frac{\partial}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x^1} \odot \frac{\partial}{\partial x^2} \odot \frac{\partial}{\partial x^2}$$

另外考慮 $\frac{\partial}{\partial x^2} \in \bigwedge^1 T_p\mathbb{R}^3$ 和 $\frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \frac{\partial}{\partial x^3} \in \bigwedge^2 T_p\mathbb{R}^3$，讀者亦可自行驗證

$$\frac{\partial}{\partial x^2} \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \frac{\partial}{\partial x^3}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \frac{\partial}{\partial x^2} \wedge \frac{\partial}{\partial x^3}$$

我們知道 (r, s) 張量場是把流形 M 上的點映射為 $T_pM^{\otimes r} \otimes T_p^*M^{\otimes s}$ 中的 (r, s) 張量的函數，因此可以借助此一函數作用把上述概念和運算推廣到張量場。設 σ 如上定義，α 為 $(0, s)$ 張量場，則 $\sigma \bullet \alpha$ 也是 $(0, s)$ 張量場，即一個以 M 上的可變點 x 為輸入，並輸出 $(0, s)$ 張量的函數，這個函數滿足

$$(\sigma \bullet \alpha)(x) = \sigma \bullet (\alpha(x)) \qquad (25)$$

舉例說，考慮 $\Gamma(T(\mathbb{R}^2)^{\otimes 0} \otimes T^*(\mathbb{R}^2)^{\otimes 3})$ 中的以下 $(0, 3)$ 張量場：

$$\alpha_V(x^1, x^2) = -x^2\, dx^1 \otimes dx^1 \otimes dx^2 \qquad (26)$$

讀者可自行驗證，運用 (25) 和 (2)，可求得

$$\begin{aligned} ((13) \bullet \alpha_V)(x^1, x^2) &= (13) \bullet (\alpha_V(x^1, x^2)) \\ &= -x^2\, dx^2 \otimes dx^1 \otimes dx^1 \end{aligned}$$

前面討論過的其他概念和運算也可以類似 (25) 的方式推廣到張量場，為免繁冗，這裡不擬一一定義和舉例。

以上在介紹反對稱張量時，我們沿用了《數學示例：k 向量與 k 餘向量》和《數學示例：楔積與內部積》中的 $\wedge$ 符號和「楔積」一名。事實上，可以證明，本文介紹的「$(r,0)$ 反對稱張量」和「$(0,s)$ 反對稱張量」分別等同於《數學示例：k 向量與 k 餘向量》介紹的「r 向量」和「s 餘向量」，而本文介紹的「楔積」也等同於《數學示例：楔積與內部積》介紹的「楔積」。本文提到的楔積的雙重線性性質、結合性和交錯性質正好與《數學示例：楔積與內部積》中的「定理 1」和「定理 2」吻合。

不僅如此，「r 向量」和「$(r,0)$ 反對稱張量」作為函數，它們對任意 r 個餘向量具有相同的函數作用；而「s 餘向量」和「$(0,s)$ 反對稱張量」作為函數，它們對任意 s 個向量也具有相同的函數作用。以 $\bigwedge^2 T_p^*\mathbb{R}^3$ 中的 $dx^1 \wedge dx^2$ 為例，一方面，如把 $dx^1 \wedge dx^2$ 看成「2 餘向量」，那麼根據《數學示例：k 向量與 k 餘向量》，把這個「2 餘向量」作用於 $\mathbb{R}^3$ 中的任意兩個向量 $[x^1,x^2,x^3]^T$ 和 $[y^1,y^2,y^3]^T$，可得

$$\begin{aligned} dx^1 \wedge dx^2([x^1,x^2,x^3]^T,[y^1,y^2,y^3]^T) &= \begin{vmatrix} x^1 & y^1 \\ x^2 & y^2 \end{vmatrix} \\ &= x^1y^2 - x^2y^1 \end{aligned}$$

另一方面，如把 $dx^1 \wedge dx^2$ 看成「$(0,2)$ 反對稱張量」，那麼根據前面的討論，$dx^1 \wedge dx^2 = dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1$。由此根據《數學示例：張量與張量場》，把這個「$(0,2)$ 反對稱張量」作用於 $[x^1,x^2,x^3]^T$ 和 $[y^1,y^2,y^3]^T$，可得

$$\begin{aligned} & (dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1)([x^1,x^2,x^3]^T,[y^1,y^2,y^3]^T) \\ = \; & x^1y^2 - x^2y^1 \end{aligned}$$

上述結果顯示，$dx^1 \wedge dx^2$ 作為「2 餘向量」與作為「$(0,2)$ 反對稱張量」，是同一個函數。

總上所述，正如我們在《數學示例：張量與張量場》中指出的，k 向量和 k 餘向量可被看成張量的子類，本文顯示，我們可以運用 (20) 把 k 餘向量改寫成 $(0,k)$ 反對稱張量 (把 k 向量改寫成 $(k,0)$ 反對稱張量的公式也不難寫出)。

除了楔積外，我們在《數學示例：楔積與內部積》還介紹了 k 餘向量與向量之間的一種「內部積」。根據該網頁的「定理 3」和「定理 4」，若有 $\bigwedge^k T_p^*M$ 中的以下 k 餘向量：

$$\beta = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_k \le m} \beta_{j_1 \ldots j_k}\, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k}$$

和 T_pM 中的以下向量：

$$w = \sum_{i=1}^{m} w^i \,\frac{\partial}{\partial x^i}$$

則 β 與 w 的內部積可用下式計算 (下式可從上述網頁的 (15) 推導而得)：

$$\iota_w\beta = \sum_{1\le j_1<\ldots<j_k\le m} \beta_{j_1\ldots j_k} \sum_{s=1}^{k}(-1)^{s-1}w^{j_s}\,dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^{j_s}}\wedge\ldots\wedge dx^{j_k} \qquad (27)$$

有趣的是，上述「內部積」可被看成《數學示例：張量積與縮略》中介紹的一種「內積」。根據上述網頁，若 T 和 U 是張量，則 (下式等於上述網頁的 (18))：

$$T\cdot U = \mathrm{contra}(T\otimes U) \qquad (28)$$

這即是說，在選取 β 的適當下標與 w 的唯一上標 i 進行縮略的條件下，我們有

$$\iota_w\beta = w\cdot\beta \qquad (29)$$

為免過於抽象，現以一個具體情況為例驗證 (29)。考慮 $\bigwedge^2 T_p^*\mathbb{R}^3$ 中的一般 2 餘向量：

$$\beta = \beta_{12}\,dx^1\wedge dx^2 + \beta_{13}\,dx^1\wedge dx^3 + \beta_{23}\,dx^2\wedge dx^3 \qquad (30)$$

和 $T_p\mathbb{R}^3$ 中的一般向量：

$$w = w^1\,\frac{\partial}{\partial x^1} + w^2\,\frac{\partial}{\partial x^2} + w^3\,\frac{\partial}{\partial x^3} \qquad (31)$$

一方面，根據 (27)，可求得 β 與 w 的內部積如下：

$$\begin{aligned}
\iota_w\beta &= \beta_{12}\left((-1)^{1-1}w^1\,\widehat{dx^1}\wedge dx^2 + (-1)^{2-1}w^2\,dx^1\wedge\widehat{dx^2}\right)\\
&\quad +\beta_{13}\left((-1)^{1-1}w^1\,\widehat{dx^1}\wedge dx^3 + (-1)^{2-1}w^3\,dx^1\wedge\widehat{dx^3}\right)\\
&\quad +\beta_{23}\left((-1)^{1-1}w^2\,\widehat{dx^2}\wedge dx^3 + (-1)^{2-1}w^3\,dx^2\wedge\widehat{dx^3}\right)\\
&= (-w^2\beta_{12} - w^3\beta_{13})dx^1 + (w^1\beta_{12} - w^3\beta_{23})dx^2 + (w^1\beta_{13} + w^2\beta_{23})dx^3 \qquad (32)
\end{aligned}$$

另一方面，根據 (19)，可以把 (30) 中的 β 寫成 $T_p(\mathbb{R}^2)^{\otimes 0}\otimes T_p^*(\mathbb{R}^2)^{\otimes 2}$ 中的 $(0,2)$ 張量的形式：

$$\begin{aligned}
\beta &= \beta_{12}\,(dx^1\otimes dx^2 - dx^2\otimes dx^1) + \beta_{13}\,(dx^1\otimes dx^3 - dx^3\otimes dx^1)\\
&\quad +\beta_{23}\,(dx^2\otimes dx^3 - dx^3\otimes dx^2)
\end{aligned}$$

如把上式與 $T_p(\mathbb{R}^2)^{\otimes 0} \otimes T_p^*(\mathbb{R}^2)^{\otimes 2}$ 中的一般 $(0,2)$ 張量比較：

$$\begin{aligned}\beta &= \beta_{11}\,dx^1 \otimes dx^1 + \beta_{12}\,dx^1 \otimes dx^2 + \beta_{13}\,dx^1 \otimes dx^3 \\ &\quad +\beta_{21}\,dx^2 \otimes dx^1 + \beta_{22}\,dx^2 \otimes dx^2 + \beta_{23}\,dx^2 \otimes dx^3 \\ &\quad +\beta_{31}\,dx^3 \otimes dx^1 + \beta_{32}\,dx^3 \otimes dx^2 + \beta_{33}\,dx^3 \otimes dx^3\end{aligned}$$

那麼我們有

$$\beta_{11} = \beta_{22} = \beta_{33} = 0, \quad \beta_{21} = -\beta_{12}, \quad \beta_{31} = -\beta_{13}, \quad \beta_{32} = -\beta_{23} \qquad (33)$$

接著運用 (28) 求 w 與 β 的內積如下 (這裡選取 β 的下標 j_1 與 w 的唯一上標 i 進行縮略)：

$$\begin{aligned}w \cdot \beta &= \mathrm{contra}(w \otimes \beta) \\ &= \mathrm{contra}(w^i \beta_{j_1 j_2} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^{j_1} \otimes dx^{j_2}) \\ &= w^g \beta_{g j_2}\, dx^{j_2} \\ &= (w^1\beta_{11} + w^2\beta_{21} + w^3\beta_{31})dx^1 + (w^1\beta_{12} + w^2\beta_{22} + w^3\beta_{32})dx^2 \\ &\quad +(w^1\beta_{13} + w^2\beta_{23} + w^3\beta_{33})dx^3 \\ &= (-w^2\beta_{12} - w^3\beta_{13})dx^1 + (w^1\beta_{12} - w^3\beta_{23})dx^2 + (w^1\beta_{13} + w^2\beta_{23})dx^3 \qquad (34)\end{aligned}$$

請注意在以上運算的第二行，我們使用嚴式求和約定把 w 和 β 分別寫成 $w^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 和 $\beta_{j_1 j_2}\, dx^{j_1} \otimes dx^{j_2}$ 的形式；最後一行則使用了 (33)。比較 (32) 與 (34)，(29) 乃得驗證。

以上討論的是 k 餘向量與向量之間的內部積，根據《數學示例：楔積與內部積》，我們可以借助以下函數作用將此運算推廣為微分 k 形式與向量場之間的內部積 (下式等於上述網頁的 (16)，其中 α 和 w 分別是微分 k 形式和向量場)：

$$(\iota_w \alpha)(x) = \iota_{w(x)} \alpha(x) \qquad (35)$$

另一方面，根據《數學示例：張量積與縮略》，我們也可以借助以下函數作用將張量之間的內積推廣為張量場之間的內積 (下式等於上述網頁的 (24)，其中 T 和 U 是張量場)：

$$(T \cdot U)(x) = T(x) \cdot U(x) \qquad (36)$$

這樣前面的 (29) 便可推廣為下式：

$$(\iota_w \beta)(x) = (w \cdot \beta)(x) \qquad (37)$$

連結至數學專題
連結至周家發網頁