

數學示例：曲面上曲線的性質

我們在《數學示例：切空間與可定向性》中引入了「曲面上曲線」的概念，由於某曲面上的曲線本質上是一種空間曲線，原則上可以沿用《數學示例：空間曲線的性質》中的概念研究這些曲線的性質—曲率和撓率，但這些概念忽略了曲面所提供的信息，因此本文將介紹一些適用於曲面上曲線的新概念，並從而推導這類曲線的性質。

我們在《數學示例：空間曲線的性質》中介紹了與空間曲線相關的三個單位向量—「單位切向量」 $T(t)$ 、「主法向量」 $P(t)$ 和「副法向量」 $B(t)$ ，它們合組成「弗萊納-塞雷標架」。由於單位切向量同樣適用於曲面上曲線的研究，以下首先重溫此一概念的定義。沿用我們在《數學示例：切空間與可定向性》中對曲面上曲線的表示方法，設某曲面 S 具有如下所示的坐標卡：

$$X : E \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; X(u_1, u_2) = (x(u_1, u_2), y(u_1, u_2), z(u_1, u_2)) \quad (1)$$

並設某平面曲線具有以下光滑正則參數化形式：

$$Y : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2; Y(t) = (u_1(t), u_2(t)) \quad (2)$$

如有 $Y(D) \subseteq E$ ，那麼可把 (1) 與 (2) 複合，並得到一條曲面上曲線的參數化形式：

$$Z : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3; Z(t) = (x(u_1(t), u_2(t)), y(u_1(t), u_2(t)), z(u_1(t), u_2(t))) \quad (3)$$

從上式可以定義上述曲線的單位切向量如下（下式跟《數學示例：空間曲線的性質》中的 (1) 有相同的形式）：

$$T(t) = \frac{Z'(t)}{\|Z'(t)\|} \quad (4)$$

其次要定義單位法向量，為了能反映曲面的信息，這裡不採用上述的 $P(t)$ 和 $B(t)$ ，而是採用《數學示例：切空間與可定向性》中引入的「曲面單位法向量」，以下是其計算公式（下式大致等於該網頁的 (16)）：

$$N(u_1, u_2) = \frac{\frac{\partial X}{\partial u_1}(u_1, u_2) \times \frac{\partial X}{\partial u_2}(u_1, u_2)}{\left\| \frac{\partial X}{\partial u_1}(u_1, u_2) \times \frac{\partial X}{\partial u_2}(u_1, u_2) \right\|} \quad (5)$$

不過，由於上式是以 (u_1, u_2) 而非 t 作為論元，我們要把 $N(u_1, u_2)$ 與 $Y(t)$ 複合，從而得到以下向量 (仍稱為「曲面單位法向量」，並記作 $N(t)$)：

$$N(t) = N(u_1, u_2) \circ Y(t) \quad (6)$$

接著定義第三個向量如下 (有些人把這第三個向量稱為切法向量(tangent normal))：

$$U(t) = N(t) \times T(t) \quad (7)$$

其中 \times 代表向量的叉積。根據叉積的定義， $U(t)$ 是同時與 $N(t)$ 和 $T(t)$ 垂直的單位向量。由於曲面 S 上一點 q 處的單位法向量 $N(t)$ 垂直於 q 點處的切空間 $T_q S$ ，由此可知 $T(t)$ 和 $U(t)$ 是位於平面 $T_q S$ 上的向量。

請注意這裡的切法向量採用與《數學示例：平面曲線的性質》中的「平面曲線單位法向量」一樣的符號 $U(t)$ ，這是因為「切法向量」可被看成「平面曲線單位法向量」的推廣。在上述網頁中， $U(t)$ 的定義如下 (請參閱該網頁的公式 (3))：若 $T(t) = (T_x(t), T_y(t))$ ，則 $U(t) = (-T_y(t), T_x(t))$ 。現在如果設 $T(t)$ 和 $U(t)$ 位於 $x-y$ 平面上，那麼可以把 $T(t)$ 和 $U(t)$ 的坐標分別寫成 $(T_x(t), T_y(t), 0)$ 和 $(-T_y(t), T_x(t), 0)$ ，而 $x-y$ 平面上任何一點的曲面單位法向量 $N(t)$ 都可表示成笛卡爾坐標系下的標準單位向量 k ，用坐標寫出來就是 $(0, 0, 1)$ 。運用叉積的計算公式，容易求得

$$(-T_y(t), T_x(t), 0) = (0, 0, 1) \times (T_x(t), T_y(t), 0)$$

把上式與 (7) 比較，可以看到平面曲線上的 k 、 $T(t)$ 和 $U(t)$ 分別對應著上面介紹的 $N(t)$ 、 $T(t)$ 和 $U(t)$ ，這就是本文沿用 $U(t)$ 此一符號的原因。

從 (7) 以及向量叉積的運算法則，可以推導出上述三個單位向量之間叉積的一系列結果：

- (i) $N(t) \times N(t) = T(t) \times T(t) = U(t) \times U(t) = 0$
- (ii) $N(t) \times T(t) = U(t)$, $T(t) \times U(t) = N(t)$, $U(t) \times N(t) = T(t)$
- (iii) $T(t) \times N(t) = -U(t)$, $U(t) \times T(t) = -N(t)$, $N(t) \times U(t) = -T(t)$

總上所述，曲面上曲線的每一點都「寄生」著一個活動標架，即由前述三個單位向量組成的集合 $\{N(t), T(t), U(t)\}$ ，此一標架有別於弗萊納-塞雷標架，稱為達布標架(Darboux frame)。

接下來以我們在《數學示例：曲面的參數化》中討論過的圓柱面為例示範如何計算上述三個單位向量，以下是圓柱面的坐標卡 (下式跟上述網頁 (24) 中的 X_{12} 略有不同)：

$$X_1 : (-\pi, \pi) \times (0, h) \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad X_1(u_1, u_2) = (r \cos u_1, r \sin u_1, u_2) \quad (8)$$

現取以下平面曲線 (在下式中, D_1 是可使 $Y_1(D_1) \subseteq (-\pi, \pi) \times (0, h)$ 的定義域) :

$$Y_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^2; Y_1(t) = (t, pt) \quad (9)$$

把 (8) 與 (9) 複合, 可得到以下圓柱面上曲線的參數化形式 :

$$Z_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^3; Z_1(t) = (r \cos t, r \sin t, pt) \quad (10)$$

如把上式與《數學示例：曲線的參數化》中的 (15) 比較, 可以看到上式代表一條圓螺旋線。為求 $T_1(t)$, 首先計算

$$Z_1'(t) = (-r \sin t, r \cos t, p)$$

$$\|Z_1'(t)\| = \sqrt{r^2 + p^2}$$

由此根據 (4), 有

$$T_1(t) = \left(-\frac{r \sin t}{\sqrt{r^2 + p^2}}, \frac{r \cos t}{\sqrt{r^2 + p^2}}, \frac{p}{\sqrt{r^2 + p^2}} \right)$$

為求 $N_1(t)$, 首先求 $X_1(t)$ 的一階偏導數如下 :

$$\frac{\partial X_1}{\partial u_1}(u_1, u_2) = (-r \sin u_1, r \cos u_1, 0)$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial u_2}(u_1, u_2) = (0, 0, 1)$$

接著計算

$$\frac{\partial X_1}{\partial u_1}(u_1, u_2) \times \frac{\partial X_1}{\partial u_2}(u_1, u_2) = (r \cos u_1, r \sin u_1, 0)$$

$$\left\| \frac{\partial X_1}{\partial u_1}(u_1, u_2) \times \frac{\partial X_1}{\partial u_2}(u_1, u_2) \right\| = r$$

由此根據 (5) 和 (6), 有

$$N_1(u_1, u_2) = (\cos u_1, \sin u_1, 0)$$

$$N_1(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

最後根據 (7), 可求得

$$\begin{aligned} U_1(t) &= (\cos t, \sin t, 0) \times \left(-\frac{r \sin t}{\sqrt{r^2 + p^2}}, \frac{r \cos t}{\sqrt{r^2 + p^2}}, \frac{p}{\sqrt{r^2 + p^2}} \right) \\ &= \left(\frac{p \sin t}{\sqrt{r^2 + p^2}}, -\frac{p \cos t}{\sqrt{r^2 + p^2}}, \frac{r}{\sqrt{r^2 + p^2}} \right) \end{aligned}$$

如同空間曲線的情況 (請參閱《數學示例：空間曲線的性質》), 可以利用上述三個單位向量的一階導數來定義曲面上曲線的曲率。首先考慮 $T(t)$ 的一階導數, 若 $T'(t) \neq (0, 0, 0)$, 那麼根據《數學示例：平面曲線的性質》中的「定理 1」, 由於 $T(t)$ 是單位向量, $T'(t)$ 是一個與 $T(t)$ 垂直的向量, 因此它必位於 $N(t)$ 和 $U(t)$ 所成的平面上, 故必可寫成以下等式:

$$T'(t) = f(t)N(t) + g(t)U(t)$$

其中 $f(t)$ 和 $g(t)$ 是純量函數。若 $T'(t) = (0, 0, 0)$, 當然也可寫成這樣的等式 (把 $f(t)$ 和 $g(t)$ 都設定為 0)。在微分幾何中, 把 $f(t)$ 和 $g(t)$ 除以曲線速率 $\|Z'(t)\|$ 所得的商分別定義為曲面上曲線的**法曲率**(normal curvature), 記作 $\kappa_n(t)$, 和**測地曲率**(geodesic curvature), 記作 $\kappa_g(t)$ 。總上所述, $\kappa_n(t)$ 和 $\kappa_g(t)$ 滿足以下等式:

$$T'(t) = \|Z'(t)\|\kappa_n(t)N(t) + \|Z'(t)\|\kappa_g(t)U(t) \quad (11)$$

用 $N(t)$ 和 $U(t)$ 分別對上式進行點積運算, 便可得到計算 $\kappa_n(t)$ 和 $\kappa_g(t)$ 的公式如下:

$$\kappa_n(t) = \frac{T'(t) \cdot N(t)}{\|Z'(t)\|} \quad (12)$$

$$\kappa_g(t) = \frac{T'(t) \cdot U(t)}{\|Z'(t)\|} \quad (13)$$

另一方面, 根據《數學示例：空間曲線的性質》, 我們又有 (下式等於上述網頁的 (7)):

$$T'(t) = \|Z'(t)\|\kappa(t)P(t) \quad (14)$$

其中 $\kappa(t)$ 和 $P(t)$ 分別為一般空間曲線的曲率和主法向量。從 (11) 和 (14), 可推得

$$\kappa(t)P(t) = \kappa_n(t)N(t) + \kappa_g(t)U(t) \quad (15)$$

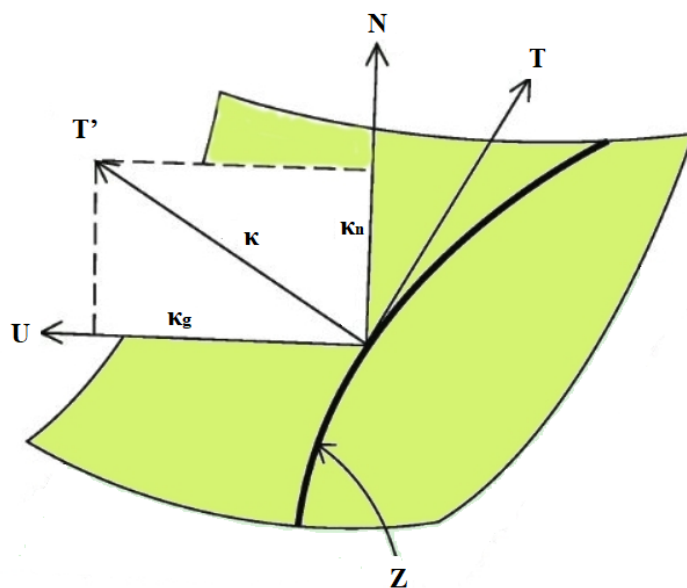
上式建立了上述網頁介紹的空間曲線概念與本文介紹的新概念之間的聯繫。由於上式等號兩端的向量相等, 這兩個向量的模應也相等。根據向量代數的知識, 向量 v 的模滿足公式 $\|v\|^2 = v \cdot v$ 。對 (15) 的等號左右端分別應用此一公式, 可得 (以下要應用 $P(t)$ 、 $N(t)$ 、 $U(t)$ 是單位向量以及 $N(t)$ 與 $U(t)$ 互相垂直等事實; 此外, 為使以下數式較為簡潔, 以下略去各個函數的論元):

$$\begin{aligned} \kappa P \cdot \kappa P &= \kappa^2 P \cdot P \\ &= \kappa^2 \\ (\kappa_n N + \kappa_g U) \cdot (\kappa_n N + \kappa_g U) &= \kappa_n^2 N \cdot N + \kappa_n \kappa_g N \cdot U + \kappa_g \kappa_n U \cdot N + \kappa_g^2 U \cdot U \\ &= \kappa_n^2 + \kappa_g^2 \end{aligned}$$

綜合以上計算結果，我們有

$$\kappa(t)^2 = \kappa_n(t)^2 + \kappa_g(t)^2 \quad (16)$$

下圖展示上述概念：



上圖中的粗黑線是綠色曲面上的某條曲線，用 Z 代表； N 、 T 和 U 是「寄生」於曲線上某點處的三個單位向量。上圖顯示， T' 位於 N 和 U 所成的平面上。此外，上圖假設 Z 具有單位速率性質，即 $\|Z'\| = 1$ 。由此根據 (14)，有 $\|T'\| = \kappa$ ，而 (12) 和 (13) 也可化簡為 $\kappa_n = T' \cdot N$ 和 $\kappa_g = T' \cdot U$ ，據此可把 κ_n 和 κ_g 分別看成 T' 在 N 和 U 方向上的分量。上圖正繪出了此一情況，上圖也繪出了 (16) 所示等式的情況。

以前面討論過的圓螺旋線為例，為求該曲線的測地曲率和法曲率，根據前面的計算結果，我們有

$$T_1'(t) = \left(-\frac{r \cos t}{\sqrt{r^2 + p^2}}, -\frac{r \sin t}{\sqrt{r^2 + p^2}}, 0 \right)$$

由此根據 (12) 和 (13)，有

$$(\kappa_n)_1(t)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{r^2 + p^2}} \left(-\frac{r \cos t}{\sqrt{r^2 + p^2}}, -\frac{r \sin t}{\sqrt{r^2 + p^2}}, 0 \right) \cdot (\cos t, \sin t, 0) \\
&= \frac{r}{r^2 + p^2} \\
&\quad (\kappa_g)_1(t) \\
&= \frac{1}{\sqrt{r^2 + p^2}} \left(-\frac{r \cos t}{\sqrt{r^2 + p^2}}, -\frac{r \sin t}{\sqrt{r^2 + p^2}}, 0 \right) \cdot \left(\frac{p \sin t}{\sqrt{r^2 + p^2}}, -\frac{p \cos t}{\sqrt{r^2 + p^2}}, \frac{r}{\sqrt{r^2 + p^2}} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

把以上結果代入 (16)，並考慮到 $\kappa(t)$ 必然是非負實數 (請參閱《數學示例：空間曲線的性質》)，可得

$$\kappa_1(t) = \frac{r}{r^2 + p^2}$$

上述結果跟我們在上述網頁求得的結果吻合。

除了 (12) 和 (13) 外，還有其他計算上述兩種曲率的公式。以下是法曲率的計算公式：

$$\kappa_n(t) = \frac{[Y'(t)]^T \times [L_{ij} \circ Y(t)] \times [Y'(t)]}{[Y'(t)]^T \times [g_{ij} \circ Y(t)] \times [Y'(t)]} \quad (17)$$

上式的分子和分母都是三個矩陣的乘積，其中 $[Y'(t)]$ 代表把 $Y'(t)$ 寫成 2×1 矩陣的形式； $[Y'(t)]^T$ 則是把 $[Y'(t)]$ 的行與列對調所得的 1×2 矩陣；而 $[L_{ij} \circ Y(t)]$ 和 $[g_{ij} \circ Y(t)]$ 分別代表兩個 2×2 矩陣，這兩個矩陣第 i 行第 j 列上的項分別是把第二基本形式係數 $L_{ij}(u_1, u_2)$ 和第一基本形式係數 $g_{ij}(u_1, u_2)$ 與 $Y(t)$ 進行複合所得的結果。上述兩種係數可用以下公式計算 (上述定義和下式可參閱《數學示例：基本形式係數》) 中的 (10)、(11)、(2) 和 (19))：

$$L_{ij}(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j}(u_1, u_2) \cdot N(u_1, u_2) \quad (18)$$

$$g_{ij}(u_1, u_2) = \frac{\partial X}{\partial u_i}(u_1, u_2) \cdot \frac{\partial X}{\partial u_j}(u_1, u_2) \quad (19)$$

接著讓我們用 (17) 再算一次前述圓螺旋線的法曲率。首先求各個二階偏導數如下：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 X_1}{\partial u_1 \partial u_1}(u_1, u_2) &= (-r \cos u_1, -r \sin u_1, 0) \\
\frac{\partial^2 X_1}{\partial u_1 \partial u_2}(u_1, u_2) &= (0, 0, 0) \\
\frac{\partial^2 X_1}{\partial u_2 \partial u_2}(u_1, u_2) &= (0, 0, 0)
\end{aligned}$$

根據 (18) 和 (19)，可求得各個基本形式係數如下：

$$\begin{aligned}(L_{11})_1(u_1, u_2) &= -r & (g_{11})_1(u_1, u_2) &= r^2 \\ (L_{12})_1(u_1, u_2) &= 0 & (g_{12})_1(u_1, u_2) &= 0 \\ (L_{22})_1(u_1, u_2) &= 0 & (g_{22})_1(u_1, u_2) &= 1\end{aligned}$$

由此可求得以下兩個矩陣：

$$\begin{aligned}[(L_{ij})_1 \circ Y_1(t)] &= \begin{bmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [(g_{ij})_1 \circ Y_1(t)] &= \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

另外，根據 (9)， $Y_1'(t) = (1, p)$ 。把上述結果代入 (17)，便可求得與前面相同的結果：

$$\begin{aligned}(\kappa_n)_1(t) &= \frac{\begin{bmatrix} 1 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix}} \\ &= -\frac{r}{r^2 + p^2}\end{aligned}$$

以下是測地曲率的計算公式：

$$\kappa_g(t) = \frac{(Z'(t) \times Z''(t)) \cdot N(t)}{\|Z'(t)\|^3} \quad (20)$$

上式的分子是一個純量三重積，我們在《數學示例：空間曲線的性質》中介紹了用行列式計算純量三重積的方法，此外，我們在上述網頁還提供了平面曲線有向曲率 κ_s 的計算公式如下（下式等於上述網頁的 (9)）：

$$\kappa_s(t) = \frac{(Z'(t) \times Z''(t)) \cdot k}{\|Z'(t)\|^3}$$

把上式與 (20) 比較，可以發現兩者非常相似。正如我們在前面所指出，(20) 中的 $N(t)$ 與上式中的 k 存在對應關係，因為 k 實質上是 x - y 平面上任何一點的曲面單位法向量。由此可見，平面曲線的有向曲率其實是測地曲率的一個特例。

接著讓我們用 (20) 再算一次前述圓螺旋線的測地曲率。基於前面的計算結果，我們有

$$Z_1''(t) = (-r \cos t, -r \sin t, 0)$$

接著計算 (20) 中的純量三重積如下：

$$\begin{aligned} (Z_1'(t) \times Z_1''(t)) \cdot N_1(t) &= \begin{vmatrix} -r \sin t & r \cos t & p \\ -r \cos t & -r \sin t & 0 \\ \cos t & \sin t & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

把上述結果代入 (20)，便可求得與前面相同的結果：

$$\begin{aligned} (\kappa_g)_1(t) &= \frac{0}{(\sqrt{r^2 + p^2})^3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

以上考慮了 $T(t)$ 的一階導數，接下來考慮 $U(t)$ 的一階導數。對 (7) 求導，並應用 (11) 和前面的叉積結果，可得 (為使以下數式較為簡潔，以下略去各個函數的論元)：

$$\begin{aligned} U' &= N' \times T + N \times T' \\ &= N' \times T + N \times (\|Z'\| \kappa_n N + \|Z'\| \kappa_g U) \\ &= N' \times T + \|Z'\| \kappa_n N \times N + \|Z'\| \kappa_g N \times U \\ &= N' \times T - \|Z'\| \kappa_g T \end{aligned}$$

若 $N'(t) \neq (0, 0, 0)$ ，那麼根據《數學示例：平面曲線的性質》中的「定理 1」，由於 $N(t)$ 是單位向量， $N'(t)$ 是一個與 $N(t)$ 垂直的向量，因此它必位於 $T(t)$ 和 $U(t)$ 所成的平面上。另一方面，根據向量叉積的定義， $N'(t) \times T(t)$ 是一個同時與 $N'(t)$ 和 $T(t)$ 垂直的向量。基於以上討論，可知 $N'(t) \times T(t)$ 是與 $N(t)$ 平行的向量，故必可寫成 $N'(t) \times T(t) = h(t)N(t)$ 的形式，其中 $h(t)$ 是純量函數。由此可以把上式寫成

$$U'(t) = h(t)N(t) - \|Z'(t)\| \kappa_g(t)T(t)$$

若 $N'(t) = (0, 0, 0)$ ，當然也可把 $U'(t)$ 寫成上列形式 (把 $h(t)$ 設定為 0)。在微分幾何中，把上式中的 $h(t)$ 除以 $\|Z'(t)\|$ 所得的商定義為曲面上曲線的測地撓率 (geodesic torsion)，記作 $\tau_g(t)$ 。總上所述， $\tau_g(t)$ 和 $\kappa_g(t)$ 滿足以下等式：

$$U'(t) = \|Z'(t)\| \tau_g(t)N(t) - \|Z'(t)\| \kappa_g(t)T(t) \quad (21)$$

用 $N(t)$ 對上式進行點積運算，便可得到計算 $\tau_g(t)$ 的公式如下：

$$\tau_g(t) = \frac{U'(t) \cdot N(t)}{\|Z'(t)\|} \quad (22)$$

以前面討論過的圓螺旋線為例，基於前面的計算結果，我們有

$$U_1'(t) = \left(\frac{p \cos t}{\sqrt{r^2 + p^2}}, \frac{p \sin t}{\sqrt{r^2 + p^2}}, 0 \right)$$

由此根據 (22)，我們有

$$\begin{aligned} (\tau_g)_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + p^2}} \left(\frac{p \cos t}{\sqrt{r^2 + p^2}}, \frac{p \sin t}{\sqrt{r^2 + p^2}}, 0 \right) \cdot (\cos t, \sin t, 0) \\ &= \frac{p}{r^2 + p^2} \end{aligned}$$

上述結果跟我們在《數學示例：空間曲線的性質》中求得的圓螺旋線撓率相同。惟請注意，上述情況並非普遍情況，只有某些曲線才具有以下性質：它作為曲面上曲線的「測地撓率」 τ_g 跟它作為空間曲線的「撓率」 τ 有相同的絕對值，這一點要在引入測地線概念後才能作詳細介紹。

最後考慮 $N(t)$ 的一階導數，根據前面的叉積結果，我們有 $N(t) = T(t) \times U(t)$ ，對此求導，應用 (11) 和 (21)，並再次運用前面的叉積結果，可得 (為使以下數式較為簡潔，以下略去各個函數的論元)：

$$\begin{aligned} N' &= T' \times U + T \times U' \\ &= (\|Z'\|\kappa_n N + \|Z'\|\kappa_g U) \times U + T \times (\|Z'\|\tau_g N - \|Z'\|\kappa_g T) \\ &= \|Z'\|\kappa_n N \times U + \|Z'\|\kappa_g U \times U + \|Z'\|\tau_g T \times N - \|Z'\|\kappa_g T \times T \\ &= -\|Z'\|\kappa_n T - \|Z'\|\tau_g U \end{aligned}$$

由此我們有

$$N'(t) = -\|Z'(t)\|\kappa_n(t)T(t) - \|Z'(t)\|\tau_g(t)U(t) \quad (23)$$

由此可見，利用 $N'(t)$ ，我們得不到 $\kappa_n(t)$ 、 $\kappa_g(t)$ 和 $\tau_g(t)$ 以外的曲面上曲線的性質。至此求得達布標架中三個成員的一階導數的公式 (11)、(21) 和 (23)，如同弗萊納-塞雷標架的情況，可以把這三條公式寫成以下矩陣形式 (為使下式較為簡潔，以下略去各個函數的論元)：

$$\begin{bmatrix} N' \\ T' \\ U' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\|Z'\|\kappa_n & -\|Z'\|\tau_g \\ \|Z'\|\kappa_n & 0 & \|Z'\|\kappa_g \\ \|Z'\|\tau_g & -\|Z'\|\kappa_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ T \\ U \end{bmatrix} \quad (24)$$

請注意跟弗萊納-塞雷標架的相關公式相似，上式中間的矩陣也是一個反對稱矩陣。

連結至數學專題
連結至周家發網頁