

數學示例：代入變換法

我們在《數學示例：可分變項與可分核》中介紹了一種求解非線性常微分／差分方程的方法，惟有關方程必須具有該網頁 (1) 和 (12) 的形式，才能應用這種方法。事實上，非線性微分／差分方程沒有一般的求解方法，我們只能因應方程的特定形式而採取相應的求解方法，其中一種常見方法是通過進行適當的「代入」把方程變換成線性方程或較易於求解的方程，本文主旨是介紹這種**代入變換法**(transformation by substitution)。

首先從 1 階非線性常微分方程說起。對於某些微分方程來說，作出簡單的代入並應用 D 算子的性質，便可把原方程變換成線性方程。考慮以下非線性微分方程：

$$2f(x)Df(x) - (f(x))^2 = 0 \quad (1)$$

如設定 $g(x) = (f(x))^2$ ，那麼根據 D 算子的性質，我們有 $Dg(x) = 2f(x)Df(x)$ ，由此可以把上述方程變換成以下線性常微分方程：

$$Dg(x) - g(x) = 0 \quad (2)$$

可以求得 (2) 的通解為

$$g(x) = c_1 e^x \quad (3)$$

把這個結果代入 $g(x) = (f(x))^2$ ，並繼續求解，便可得到 (1) 的通解如下：

$$\begin{aligned} (f(x))^2 &= c_1 e^x \\ f(x) &= \pm \sqrt{c_1 e^x} \\ &= c_2 e^{\frac{x}{2}} \end{aligned} \quad (4)$$

在上例中，使用代入變換法的結果是把給定的非線性方程變換成線性方程。在某些情況下，只能把給定的非線性方程變換成較易解的非線性方程，特別是「可分方程」，即《數學示例：可分變項與可分核》中具有 (1) 形式的常微分方程，接著須用上述網頁介紹的方法繼續求解。

以下介紹兩類可變換成可分方程的 1 階非線性常微分方程，第一類方程是可表示成以下形式的方程：

$$Df(x) = g\left(\frac{f(x)}{x}\right) \quad (5)$$

其中 g 代表某個函數關係。現設定 $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ ，我們有 $f(x) = xh(x)$ 。接著運用 D 算子的積法則，可得 $Df(x) = h(x) + xDh(x)$ 。把以上結果代入 (5)，便可把該方程變換成以下方程：

$$\begin{aligned} h(x) + xDh(x) &= g(h(x)) \\ Dh(x) &= \frac{1}{x} \times (g(h(x)) - h(x)) \end{aligned} \quad (6)$$

請注意上面最後一行具有上述網頁 (1) 的形式，其中 $g(h(x)) - h(x)$ 可看成把函數 $k(x) = g(x) - x$ 作用於 $h(x)$ 的結果。根據該網頁的 (5)，以下是上述方程的「隱式解」：

$$\left(\int \frac{1}{g(x) - x}\right) \circ h(x) = \int \frac{1}{x} \quad (7)$$

把 $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ 代入上式，並求上式右端的不定積分，便可得到 (5) 的隱式解如下：

$$\left(\int \frac{1}{g(x) - x}\right) \circ \frac{f(x)}{x} = \ln|x| + c \quad (8)$$

如能從上式解出 $f(x)$ ，所得結果就是 (5) 的「顯式解」。

舉例說，考慮以下非線性微分方程：

$$x^2 Df(x) - x^2 - xf(x) - (f(x))^2 = 0 \quad (9)$$

上述方程可以改寫成以下形式：

$$Df(x) = 1 + \frac{f(x)}{x} + \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 \quad (10)$$

上式具有 (5) 的形式，其中 $g(x) = 1 + x + x^2$ 。為求解上述方程，把 $g(x) = 1 + x + x^2$ 代入 (8)，並進行計算，可求得 (9) 的顯式解如下：

$$\begin{aligned} \left(\int \frac{1}{1 + x + x^2 - x}\right) \circ \frac{f(x)}{x} &= \ln|x| + c \\ \left(\int \frac{1}{1 + x^2}\right) \circ \frac{f(x)}{x} &= \ln|x| + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\arctan x \circ \frac{f(x)}{x} &= \ln|x| + c \\
\arctan\left(\frac{f(x)}{x}\right) &= \ln|x| + c \\
\frac{f(x)}{x} &= \tan(\ln|x| + c) \\
f(x) &= x \tan(\ln|x| + c) \quad (11)
\end{aligned}$$

第二類方程是可表示成以下形式的方程：

$$Df(x) = g(ax + bf(x)) \quad (12)$$

其中 g 代表某個函數關係， $a, b \in \mathbb{R}$ 。現設定 $h(x) = ax + bf(x)$ ，我們有 $f(x) = \frac{h(x) - ax}{b}$ ，由此有 $Df(x) = \frac{Dh(x) - a}{b}$ 。把以上結果代入 (12)，便可把該方程變換成以下方程：

$$\begin{aligned}
\frac{Dh(x) - a}{b} &= g(h(x)) \\
Dh(x) &= bg(h(x)) + a \\
&= 1 \times (bg(h(x)) + a) \quad (13)
\end{aligned}$$

請注意上面最後一行具有上述網頁 (1) 的形式，其中 $bg(h(x)) + a$ 可看成把函數 $k(x) = bg(x) + a$ 作用於 $h(x)$ 的結果。根據該網頁的 (5)，以下是這類方程的「隱式解」：

$$\left(\int \frac{1}{bg(x) + a}\right) \circ h(x) = \int 1 \quad (14)$$

把 $h(x) = ax + bf(x)$ 代入上式，並求上式右端的不定積分，便可得到 (12) 的隱式解如下：

$$\left(\int \frac{1}{bg(x) + a}\right) \circ (ax + bf(x)) = x + c \quad (15)$$

如能從上式解出 $f(x)$ ，所得結果就是 (12) 的「顯式解」。

舉例說，考慮以下非線性微分方程：

$$Df(x) - f(x) + x + 1 - \frac{1}{x - f(x) + 2} = 0 \quad (16)$$

上述方程可以改寫成以下形式：

$$Df(x) = -(x - f(x)) - 1 + \frac{1}{(x - f(x)) + 2} \quad (17)$$

上式具有 (12) 的形式，其中 $a = 1$ 、 $b = -1$ 和 $g(x) = -x - 1 + \frac{1}{x+2}$ 。為求解上述方程，把 $a = 1$ 、 $b = -1$ 和 $g(x) = -x - 1 + \frac{1}{x+2}$ 代入 (15)，並進行計算如下：

$$\begin{aligned}
\left(\int \frac{1}{-(-x-1+\frac{1}{x+2})+1} \right) \circ (x-f(x)) &= x+c_1 \\
\left(\int \frac{x+2}{(x+2)^2-1} \right) \circ (x-f(x)) &= x+c_1 \\
\frac{1}{2} \ln |(x+2)^2-1| \circ (x-f(x)) &= x+c_1 \\
\frac{1}{2} \ln |(x-f(x)+2)^2-1| &= x+c_1 \\
\ln |(x-f(x)+2)^2-1| &= 2x+2c_1 \\
(x-f(x)+2)^2-1 &= \pm e^{2c_1} e^{2x} \\
(x-f(x)+2)^2 &= \pm e^{2c_1} e^{2x} + 1
\end{aligned}$$

把上面最後一行中的 $\pm e^{2c_1}$ 換成另一任意常數 c_2 ，便可把上面最後一行寫成較簡潔的形式：

$$(x-f(x)+2)^2 = c_2 e^{2x} + 1 \quad (18)$$

從上式解出 $f(x)$ ，便可得到 (16) 的顯式通解如下：

$$f(x) = \pm \sqrt{c_2 e^{2x} + 1} + x + 2 \quad (19)$$

接著討論 1 階非線性常差分方程。對於某些差分方程來說，作出簡單的代入並應用 E 算子的定義，便可把原方程變換成線性方程，而且由於 E 算子的定義較 D 算子簡單，求解差分方程時往往較求解微分方程更容易確定所應進行的代入。考慮以下非線性常差分方程：

$$(x+1)(Ef(x))^2 - x(f(x))^2 = 0 \quad (20)$$

如設定 $g(x) = x(f(x))^2$ ，那麼根據 E 算子的定義，我們有 $Eg(x) = (x+1)(Ef(x))^2$ ，由此可以把上述方程變換成以下線性常差分方程：

$$Eg(x) - g(x) = 0 \quad (21)$$

可以求得 (21) 的通解為

$$g(x) = c_1 \quad (22)$$

把這個結果代入 $g(x) = x(f(x))^2$ ，並繼續求解，便可得到 (20) 的通解如下：

$$\begin{aligned}
x(f(x))^2 &= c_1 \\
f(x) &= \pm \sqrt{\frac{c_1}{x}} \\
&= c_2 x^{-\frac{1}{2}} \quad (23)
\end{aligned}$$

在上面最後一行，我們把 $\pm\sqrt{c_1}$ 換成另一任意常數 c_2 ，從而得到較簡潔的通解。

如同微分方程的情況，運用代入法並非總能把非線性常差分方程變換成線性方程，而常差分方程又沒有相對應的「可分方程」的概念。不過，如果在使用適當的代入後，可以把非線性常差分方程改寫成《數學示例：可分變項與可分核》中 (12) 的形式，那麼便可以借用該網頁介紹的方法求解差分方程。舉例說，考慮以下非線性常差分方程：

$$(x+1)(Ef(x))^2 - x(f(x))^2 + x^2(x+1)(f(x)Ef(x))^2 = 0 \quad (24)$$

如設定 $g(x) = x(f(x))^2$ ，那麼 $Eg(x) = (x+1)(Ef(x))^2$ ，由此可以把上述方程變換成以下非線性常差分方程：

$$Eg(x) - g(x) + xg(x)Eg(x) = 0 \quad (25)$$

上述方程實質上等於上述網頁中的 (14)，根據上述網頁中的 (16)，上述方程的顯式通解為

$$g(x) = \frac{2}{x^2 + 2c} \quad (26)$$

把這個結果代入 $g(x) = x(f(x))^2$ ，並繼續求解，便可得到 (24) 的通解如下：

$$\begin{aligned} x(f(x))^2 &= \frac{2}{x^2 + 2c} \\ f(x) &= \pm \sqrt{\frac{2}{x(x^2 + 2c)}} \end{aligned} \quad (27)$$

在某些情況下，可先把非線性差分方程變換成另一類方程，從該方程的解得到一個線性差分方程，然後繼續求解。考慮以下非線性差分方程：

$$Ef(x) - 2f(x)\sqrt{1 - (f(x))^2} = 0 \quad (28)$$

由於上式包含 $2f(x)\sqrt{1 - (f(x))^2}$ ，這令人聯想到三角恆等式 $\sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x$ 和 $2 \sin x \cos x = \sin(2x)$ 。現在如果設定 $f(x) = \sin(g(x))$ ，那麼根據 E 算子的定義，我們有 $Ef(x) = \sin(Eg(x))$ ，根據上述設定和三角恆等式，可以把上述方程變換成以下三角方程：

$$\begin{aligned} \sin(Eg(x)) - 2 \sin(g(x))\sqrt{1 - \sin^2(g(x))} &= 0 \\ \sin(Eg(x)) - \sin(2g(x)) &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

根據有關三角方程的一條定理¹，這個三角方程的通解是

$$Eg(x) = (-1)^n 2g(x) + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (30)$$

¹該定理是說，三角方程 $\sin x = \sin y$ 的通解是 $x = (-1)^n y + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ 。

接著考慮兩種情況。在情況 (i) 下， n 為偶數，設 $n = 2m$ ，其中 $m \in \mathbb{Z}$ 。在此情況下，(30) 變成以下常係數非齊次常差分方程：

$$Eg(x) - 2g(x) - 2m\pi = 0 \quad (31)$$

可以求得 (31) 的通解為

$$g(x) = c_1 2^x - 2m\pi \quad (32)$$

把這個結果代入 $f(x) = \sin(g(x))$ ，便可得到 (28) 的一組解如下：

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(c_1 2^x - 2m\pi) \\ &= \sin(c_1 2^x) \end{aligned} \quad (33)$$

在情況 (ii) 下， n 為奇數，設 $n = 2m + 1$ ，其中 $m \in \mathbb{Z}$ 。在此情況下，(30) 變成以下常係數非齊次常差分方程：

$$Eg(x) + 2g(x) - (2m + 1)\pi = 0 \quad (34)$$

可以求得 (34) 的通解為

$$g(x) = c_2 (-2)^x + \frac{(2m + 1)\pi}{3} \quad (35)$$

把這個結果代入 $f(x) = \sin(g(x))$ ，便可得到 (28) 的另一組解如下：

$$f(x) = \sin\left(c_2 (-2)^x + \frac{(2m + 1)\pi}{3}\right), \quad m \in \mathbb{Z} \quad (36)$$

綜合以上結果，可以把 (28) 的通解寫成以下形式：

$$f(x) = \sin(c_1 2^x) \text{ 或 } f(x) = \sin\left(c_2 (-2)^x + \frac{(2m + 1)\pi}{3}\right), \quad m \in \mathbb{Z} \quad (37)$$

請注意以上通解除了包含任意實數 c_1 和 c_2 外，還包含任意整數 m 。

接著討論 2 階非線性常微分方程。如同 1 階方程的情況，對於某些 2 階 (以至更高階) 微分方程來說，作出簡單的代入並應用 D 算子的性質，便可把原方程變換成線性方程。考慮以下 2 階非線性常微分方程：

$$2(Df(x))^2 + 2f(x)D^2f(x) - (f(x))^2 = 0 \quad (38)$$

如設定 $g(x) = (f(x))^2$ ，那麼根據 D 算子的性質，我們有 $Dg(x) = 2f(x)Df(x)$ 和 $D^2g(x) = 2(Df(x))^2 + 2f(x)D^2f(x)$ ，由此可以把上述方程變換成以下 2 階線性常微分方程：

$$D^2g(x) - g(x) = 0 \quad (39)$$

可以求得 (39) 的通解為

$$g(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x \quad (40)$$

把這個結果代入 $g(x) = (f(x))^2$ ，並繼續求解，便可得到 (38) 的通解如下：

$$\begin{aligned} (f(x))^2 &= c_1 e^{-x} + c_2 e^x \\ f(x) &= \pm \sqrt{c_1 e^{-x} + c_2 e^x} \end{aligned} \quad (41)$$

當然，絕大多數 2 階非線性常微分方程都不能變換成線性方程，對於這些方程而言，可以把其中某些方程變換成我們懂得如何求解的 1 階方程²。以下介紹兩類可變換成 1 階方程的 2 階非線性常微分方程，第一類方程是不含 $f(x)$ 項的方程。給定這類方程，可以設定 $g(x) = Df(x)$ ，這樣我們有 $Dg(x) = D^2 f(x)$ ，由此可以把原來以 $f(x)$ 作為未知函數的 2 階方程變換成以 $g(x)$ 作為未知函數的 1 階方程。舉例說，考慮以下 2 階非線性常微分方程：

$$D^2 f(x) - 2x(Df(x))^2 = 0 \quad (42)$$

由於上述方程不含 $f(x)$ 項，根據上面的討論和設定，可以把上述 2 階方程變換成以下 1 階方程：

$$Dg(x) - 2x(g(x))^2 = 0 \quad (43)$$

上述方程可以寫成以下形式：

$$Dg(x) = 2x \times (g(x))^2 \quad (44)$$

上式具有《數學示例：可分變項與可分核》中 (1) 的形式，其中 $(g(x))^2$ 可看成把函數 $h(x) = x^2$ 作用於 $g(x)$ 的結果。根據該網頁的 (5)，上述方程可以求解如下：

$$\begin{aligned} \left(\int \frac{1}{x^2} \right) \circ g(x) &= \int 2x \\ -\frac{1}{x} \circ g(x) &= x^2 + c_1 \\ -\frac{1}{g(x)} &= x^2 + c_1 \\ g(x) &= -\frac{1}{x^2 + c_1} \end{aligned} \quad (45)$$

²因此之故，這種變換法可不妨稱為「降階法」(reduction of order method)。但在有關微分／差分方程的理論中，「降階法」一般指我們在《數學示例：降階法》中介紹的特定方法。

把這個結果代入 $g(x) = Df(x)$ ，並繼續求解，便可得到 (42) 的通解如下：

$$\begin{aligned} Df(x) &= -\frac{1}{x^2 + c_1} \\ f(x) &= -\frac{1}{\sqrt{c_1}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{c_1}}\right) + c_2 \end{aligned} \quad (46)$$

第二類方程是不含 x 項 (指作為變係數而非作為未知函數 $f(x)$ 的自變項的 x 項) 的方程，例如 (42) 便不屬這類方程，因為該方程包含係數 $2x$ ，而以下方程則屬於這類方程：

$$f(x)D^2f(x) - (Df(x))^2 = 0 \quad (47)$$

上述這類方程本來是以 x 和 f 分別作為「自變項」(independent variable) 和「因變項」(dependent variable)，但由於 x 不以變係數的身份出現 (它只以自變項的身份出現)，不妨把 x 忘記，並把這類方程變換成以 f 和另一函數 (設為 g) 分別作為「自變項」和「因變項」的方程。為此，首先設定 $g(f(x)) = Df(x)$ ，接著應用有關複合函數導數的「鏈式法則」(參見《數學示例：微分／差分運算法則》中的「定理 1(iii)」)，可求得

$$\begin{aligned} D^2f(x) &= D(g \circ f(x)) \\ &= ((Dg) \circ f(x)) \times Df(x) \\ &= Dg(f(x)) \times g(f(x)) \end{aligned}$$

現在如略去上面設定和計算中的 (x) ，那麼我們有 $Df = g(f)$ 和 $D^2f = g(f)Dg(f)$ 。如把給定方程的 (x) 略去並代入 $Df = g(f)$ 和 $D^2f = g(f)Dg(f)$ ，便可把原來以 $f(x)$ 作為未知函數的 2 階方程變換成以 $g(f)$ 作為未知函數的 1 階方程。以 (47) 為例，把該方程的 (x) 略去並作上述代入後，可把該方程變換成以下方程：

$$fg(f)Dg(f) - (g(f))^2 = 0 \quad (48)$$

上述方程可以寫成以下形式：

$$Dg(f) = \frac{1}{f} \times g(f) \quad (49)$$

上式具有《數學示例：可分變項與可分核》中 (1) 的形式，其中 $g(f)$ 可看成把恆等函數 $I(f) = f$ 作用於 $g(f)$ 的結果。根據該網頁的 (5)，上述方程可以求解如下：

$$\begin{aligned} \left(\int \frac{1}{f}\right) \circ g(f) &= \int \frac{1}{f} \\ \ln|f| \circ g(f) &= \ln|f| + c_1 \\ \ln|g(f)| &= \ln|f| + c_1 \\ g(f) &= \pm e^{c_1} f \end{aligned}$$

把上面最後一行中的 $\pm e^{c_1}$ 換成另一任意常數 c_2 ，便可把上面最後一行寫成較簡潔的形式：

$$g(f) = c_2 f \quad (50)$$

把這個結果代入 $Df(x) = g(f(x))$ (這裡要重新寫出 (x) ，因為現在要求解原來以 x 作為自變項的方程)，可得到

$$Df(x) = c_2 f(x) \quad (51)$$

上述方程是一個 1 階常係數常微分方程，容易求得上述方程的通解為

$$f(x) = c_3 e^{c_2 x} \quad (52)$$

上式也就是 (47) 的解。

上述方法原則上可以推廣到 n 階非線性常微分方程，例如如果某 3 階微分方程不含 $f(x)$ 和 $Df(x)$ 項，那麼可以設定 $g(x) = D^2 f(x)$ ，這樣我們有 $Dg(x) = D^3 f(x)$ ，由此可以把原來以 $f(x)$ 作為未知函數的 3 階方程變換成以 $g(x)$ 作為未知函數的 1 階方程。但在解出 $g(x)$ 後，還要進行二重不定積分運算以解出 $f(x)$ 。由於這種運算並不總是容易進行，使用這種方法並非總能把方程的解表示成初等函數，以下不提供這方面的例子。

接著討論 2 階非線性常差分方程。如前所述，由於 E 算子的定義較 D 算子簡單，在某些情況下，可以通過作出簡單的代入或利用某些初等函數的特殊性質把 2 階 (以至更高階) 非線性常差分方程變換成線性方程。考慮以下 2 階非線性常差分方程：

$$E^2 f(x) - \frac{Ef(x)}{f(x)} = 0 \quad (53)$$

上式包含未知函數及其移位之間的除法運算，這是使上式具有非線性性質的主因。但如果先把上式中的 $\frac{Ef(x)}{f(x)}$ 移到等號右端，然後把對數函數作用於等號左右兩端的數式，便可以利用對數函數的性質化除法為減法。接著把等號右端的數式重新移回左端，便可得到下式：

$$\ln E^2 f(x) - \ln Ef(x) + \ln f(x) = 0 \quad (54)$$

現在如果設定 $g(x) = \ln f(x)$ ，那麼根據 E 算子的定義，我們有 $Eg(x) = \ln Ef(x)$ 和 $E^2 g(x) = \ln E^2 f(x)$ ，由此可以把上述方程變換成以下 2 階線性常差分方程：

$$E^2 g(x) - Eg(x) + g(x) = 0 \quad (55)$$

可以求得 (55) 的通解為

$$g(x) = c_1 \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) \quad (56)$$

把這個結果代入 $g(x) = \ln f(x)$ ，並繼續求解：

$$\begin{aligned}\ln f(x) &= c_1 \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) \\ f(x) &= e^{c_1 \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)} \\ &= (e^{c_1})^{\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)} \times (e^{c_2})^{\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)} \quad (57)\end{aligned}$$

把上面最後一行中的 e^{c_1} 和 e^{c_2} 分別換成另外兩個任意常數 c_3 和 c_4 ，便可求得 (53) 的通解的較簡潔形式：

$$f(x) = c_3^{\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)} \times c_4^{\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)} \quad (58)$$

請注意前述有關 2 階微分方程的代入變換法不能推廣應用於 2 階差分方程。首先，如果某差分方程的最高階項是 $E^2 f(x)$ ，而該方程不含 $f(x)$ 項 (但含 $Ef(x)$ 項)，那麼根據差分方程的「階」的定義 (參見《數學示例：方程與解》)，該方程是 1 階而非 2 階方程，因而無須應用前面處理第一類 2 階非線性常微分方程的方法求解這類差分方程。舉例說，設給定以下差分方程：

$$E^2 f(x) - 2Ef(x)\sqrt{1 - (Ef(x))^2} = 0 \quad (59)$$

根據定義，上述方程的階是 $2 - 1 = 1$ 。事實上，可以透過代入 $x + 1 = y$ ，然後又代入 $y = x$ 把上述方程改寫成前面 (28) 的形式，並用前述求解 1 階非線性常差分方程的方法求解。

其次，如果給定 2 階非線性常差分方程不含 x 項，那麼由於 E 算子沒有像 D 算子那樣的「鏈式法則」，不能應用前面處理第二類 2 階非線性常微分方程的方法求解這類差分方程。

連結至數學專題
連結至周家發網頁