數學示例：斯圖姆-劉維爾理論

我們在《數學示例：方程與解》中介紹了「微分／差分方程邊值問題」的概念，指出這些方程不一定有解；即使有解，其解也可能並非唯一解。本文主旨是介紹某些稱為「自伴算子微分／差分方程」的邊值問題以及相關的求解方法，有關這類方程的理論稱為斯圖姆-劉維爾理論(Sturm-Liouville Theory)。

首先介紹具有以下形式的「自伴算子微分方程」邊值問題：

$$\begin{aligned}&T_D f(x) + \lambda w(x) f(x) = 0,\ \ x \in (a, b),\\ &\text{其中}T_D f(x) = D(u(x) D f(x)) + v(x) f(x),\\ &a_{11} f(a) + a_{12} D f(a) + b_{11} f(b) + b_{12} D f(b) = 0,\\ &a_{21} f(a) + a_{22} D f(a) + b_{21} f(b) + b_{22} D f(b) = 0 \qquad (1)\end{aligned}$$

上式第一和第二行中的 T_D 是一種自伴算子(self-adjoint operator，下文會解釋此名稱的由來)，其中 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是給定的係數，$w(x)$ 是給定的權重函數(weight function)，λ 則是一個參數 (即變數)。運用算子 D 的積法則，可以把 (1) 的第一行展開成下式：

$$u(x) D^2 f(x) + D u(x) D f(x) + (v(x) + \lambda w(x)) f(x) = 0 \qquad (2)$$

(1) 的第三和第四行則是邊界條件，其中 a_{11}、...、b_{22} 是給定的常數。以下規定 $p(x)$ 和 $w(x)$ 在 (a, b) 上須取正值，而 $[a_{11}, a_{12}, b_{11}, b_{12}]^T$ 與 $[a_{21}, a_{22}, b_{21}, b_{22}]^T$ 互相線性獨立 (把它們看成向量)。由於 (1) 是「齊次方程齊次邊值問題」，即其方程和邊界條件都沒有不含 f 的項，不論 λ 取甚麼值，(1) 都有 $f(x) = 0$ 這個「平凡解」。現在我們的問題是，λ 在取何值的情況下 (1) 有「非平凡解」？以下借用線性代數的術語把這樣的 λ 值稱為 (1) 的特徵值(eigenvalue)，並把相關的非平凡解稱為特徵函數(eigenfunction)[1]。

舉例說，如在 (1) 中取 $a = 1$，$b = e$，$u(x) = x$，$v(x) = 0$，$w(x) = \frac{1}{x}$，

[1]請注意 (1) 第一行中的等式 $T_D f(x) + \lambda w(x) f(x) = 0$ 有點類似線性代數中的等式 $Mv - \lambda v = 0$，其中的 λ 和 v 分別稱為矩陣 M 的「特徵值」和「特徵向量」，因此之故，人們把 (1) 中的 λ 和 $f(x)$ 分別稱為自伴算子 T_D 的「特徵值」和「特徵函數」。

$a_{11}=b_{21}=1$，$a_{12}=b_{11}=b_{12}=a_{21}=a_{22}=b_{22}=0$，便可得到以下自伴算子微分方程：

$$D(xDf(x))+\left(\frac{\lambda}{x}\right)f(x)=0,\ \ x\in(1,e),\ \ f(1)=0,\ \ f(e)=0 \qquad (3)$$

為方便求解，先把上述自伴算子微分方程改寫成「標準形式」的 2 階微分方程如下：

$$x^2D^2f(x)+xDf(x)+\lambda f(x)=0,\ \ x\in(1,e),\ \ f(1)=0,\ \ f(e)=0 \qquad (4)$$

如把 λ 當作確定的實數，那麼 (4) 是「2 階柯西-歐拉微分方程」。根據《數學示例：積分／和分因子》的 (20)，(4) 的輔助方程及其根為

$$\begin{aligned} t^2+\lambda &= 0 \\ t &= \pm\sqrt{-\lambda} \qquad (5) \end{aligned}$$

接下來考慮三種情況：(i) $-\lambda=0$、(ii) $-\lambda>0$ 和 (iii) $-\lambda<0$，並看看 (4) 在哪種情況下有非平凡解。在情況 (i) (亦即 $\lambda=0$) 下，(5) 提供一個二重實數根 $t=0$，根據《數學示例：降階法》，(4) 中的方程的通解是 $f(x)=c_1+c_2\ln x$。把此一結果代入 (4) 中的邊界條件，可得到以下方程組：

$$\begin{cases} c_1=0 \\ c_1+c_2=0 \end{cases}$$

解上述方程組，可得 $c_1=c_2=0$，即 (4) 的特解是平凡解 $f(x)=0$。由此可知，0 不是 (4) 的特徵值。

在情況 (ii) (亦即 $\lambda<0$) 下，不妨設 $\lambda=-\alpha^2$ (其中 $\alpha>0$)。由此從 (5) 可得到兩個相異實數根 $t=\pm\alpha$，因此 (4) 中的方程的通解是 $f(x)=c_1x^{\alpha}+c_2x^{-\alpha}$。把此一結果代入 (4) 中的邊界條件，可得到以下方程組：

$$\begin{cases} c_1+c_2=0 \\ c_1e^{\alpha}+c_2e^{-\alpha}=0 \end{cases}$$

把上面第一個方程代入第二個方程，可得 $c_1(e^{\alpha}-e^{-\alpha})=0$。讀者請自行驗證，僅當 $\alpha=0$ 才有 $e^{\alpha}=e^{-\alpha}$，但我們在上面設定了 $\alpha>0$，因此上述方程組的解只能是 $c_1=c_2=0$，即 (4) 的特解是平凡解 $f(x)=0$。由此可知，任何負實數都不是 (4) 的特徵值。

在情況 (iii) (亦即 $\lambda>0$) 下，不妨設 $\lambda=\alpha^2$ (其中 $\alpha>0$)。由此從 (5) 可得到一對互相共軛的複數根 $t=\pm\alpha i$，因此 (4) 中的方程的通解是

$f(x)=c_1\cos(\alpha\ln x)+c_2\sin(\alpha\ln x)$。把此一結果代入 (4) 中的邊界條件，可得到以下方程組：

$$\begin{cases} c_1=0 \\ c_1\cos\alpha+c_2\sin\alpha=0 \end{cases}$$

把上面第一個方程代入第二個方程，可得 $c_2\sin\alpha=0$。為得到非平凡解，必須假設 $c_2\neq 0$，由此必有

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= 0 \\ \alpha &= n\pi \ \ (n\in\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

上述計算顯示，(4) 有非平凡解：$f(x)=c_2\sin(n\pi\ln x)$。惟請注意，雖然任何整數 n 都可滿足上式，但上面設定了 $\lambda>0$，而 $\lambda=\alpha^2=n^2\pi^2$。此外，$n$ 和 $-n$ 可給出相同的 λ 值。為滿足上述條件和避免出現重複的值，不妨規定 n 為正整數。總括而言，對應每個正整數 $n=1,2,\ldots$，各有 (4) 的一個特徵值 λ_n 和相應的特徵函數 $f_n(x)$ 如下[2]：

$$\lambda_n=n^2\pi^2,\ \ f_n(x)=\sin(n\pi\ln x) \qquad (6)$$

根據上述結果，我們知道邊值問題

$$x^2D^2f(x)+xDf(x)+\pi^2f(x)=0,\ \ x\in(1,e),\ \ f(1)=0,\ \ f(e)=0$$

有非平凡解 $f_1(x)=c\sin(\pi\ln x)$，因為 $\pi^2=1^2\pi^2$ 是特徵值；而邊值問題

$$x^2D^2f(x)+xDf(x)+2\pi^2f(x)=0,\ \ x\in(1,e),\ \ f(1)=0,\ \ f(e)=0$$

則只有平凡解 $f(x)=0$，因為不存在正整數 n 使得 $2\pi^2=n^2\pi^2$。

以上介紹的「自伴算子微分方程」(2) 跟以下「標準形式」的 2 階線性齊次常微分方程在形式上有顯著差異：

$$k_2(x)D^2f(x)+k_1(x)Df(x)+(k_0(x)+\lambda s(x))f(x)=0 \qquad (7)$$

現在的問題是，給定以上「標準形式」的微分方程，能否把它轉化成「自伴算子微分方程」？為解答這個問題，首先須注意 (2) 具有以下特點：$Df(x)$ 的係數 $Du(x)$ 剛好等於 $D^2f(x)$ 的係數 $u(x)$ 的導數。在一般情況下，(7) 中的 $k_1(x)$ 不一定等於 $k_2(x)$ 的導數，因而不具備 (2) 的形式。但可以把 (7) 全式乘以一個待求函數 $h(x)$，使得

$$D(k_2(x)h(x))=k_1(x)h(x) \qquad (8)$$

[2]請注意在線性代數中，把特徵向量乘以任何常數，所得結果仍是特徵向量，但為簡單起見，在寫出某矩陣的特徵向量時會略去任意常數。同樣，把特徵函數乘以任何常數，所得結果仍是特徵函數，但為簡單起見，以下在寫出特徵函數時會略去任意常數。

並設定

$$u(x) = k_2(x)h(x),\ \ v(x) = k_0(x)h(x),\ \ w(x) = s(x)h(x) \qquad (9)$$

所得結果便具有 (2) 的形式，因此接下來的任務是從 (8) 解出 $h(x)$，亦即求解以下 1 階線性方程：

$$k_2(x)Dh(x) + (Dk_2(x) - k_1(x))h(x) = 0 \qquad (10)$$

舉例說，考慮以下標準形式的微分方程：

$$D^2f(x) + Df(x) + \lambda f(x) = 0 \qquad (11)$$

把上式與 (7) 比較，這裡有 $k_2(x) = k_1(x) = 1$，$k_0(x) = 0$，$s(x) = 1$，因此根據 (10)，要求解以下 1 階線性方程：

$$Dh(x) - h(x) = 0 \qquad (12)$$

由於上式是常係數方程，容易求得上式的一個解為 $h(x) = e^x$。接著根據 (9) 設定

$$u(x) = e^x,\ \ v(x) = 0,\ \ w(x) = e^x$$

把上述設定代入 (1)，可得到

$$D(e^xDf(x)) + \lambda e^xf(x) = 0 \qquad (13)$$

請讀者自行驗證，上式等於把 (11) 全式乘以 e^x 所得的結果。換句話說，通過把 (11) 乘以 e^x，我們把 (11) 轉化成自伴算子微分方程。

接著介紹具有以下形式的「自伴算子差分方程」：

$$\begin{aligned}&T_\Delta f(x) + \lambda w(x)f(x) = 0,\ \ x \in \{(a), a+1, \ldots, b-1, (b)\},\\ &\text{其中}T_\Delta f(x) = \Delta(E^{-1}u(x)\Delta E^{-1}f(x)) + v(x)f(x),\\ &a_{11}f(a) + a_{12}f(a+1) + b_{11}f(b-1) + b_{12}f(b) = 0,\\ &a_{21}f(a) + a_{22}f(a+1) + b_{21}f(b-1) + b_{22}f(b) = 0 \qquad (14)\end{aligned}$$

上式中的 T_Δ 也是一種「自伴算子」。根據算子 Δ 的定義，可以把 (14) 的的第一行展開成下式：

$$u(x)Ef(x) + (v(x) - u(x) - E^{-1}u(x) + \lambda w(x))f(x) + E^{-1}u(x)E^{-1}f(x) = 0 \qquad (15)$$

請注意上述方程的定義域寫成 $x \in \{(a), a+1, \ldots, b-1, (b)\}$ 的形式，代表自變項 x 主要在 $\{a+1,, \ldots, b-1\}$ 內取值，但在計算 (15) 在 $x = a+1$ 和 $x = b-1$ 的值以及確定 (14) 中的邊界條件時，還需要 $f(a)$、$f(b)$ 和

$u(a)$ 的值，因此 a 和 b 可被看成上述方程的「附加論域」，被置於 ( ) 內。此外，(14) 中的其他函數、常數跟 (1) 的函數、常數有相同的限制條件，而前面介紹的「特徵值」和「特徵函數」概念也適用於 (14) 這種差分方程。

舉例說，如在 (14) 中取 $a=0$，$b=4$，$u(x)=w(x)=1$，$v(x)=0$，$a_{11}=b_{22}=1$，$a_{12}=b_{11}=b_{12}=a_{21}=a_{22}=b_{21}=0$，便可得到以下自伴算子差分方程：

$$\Delta^2E^{-1}f(x)+\lambda f(x)=0,\ \ x\in\{(0),1,2,3,(4)\},\ \ f(0)=0,\ \ f(4)=0 \qquad (16)$$

為方便求解，先把上述自伴算子差分方程改寫成「標準形式」的 2 階差分方程如下：

$$Ef(x)+(\lambda-2)f(x)+E^{-1}f(x)=0,\ \ x\in\{(0),1,2,3,(4)\},\ \ f(0)=0,\ \ f(4)=0 \qquad (17)$$

如把 λ 當作確定的實數，那麼 (17) 是「2 階線性常係數差分方程」。根據《數學示例：基本解集》的 (6)，(17) 的輔助方程及其根為

$$\begin{aligned} t^2+(\lambda-2)t+1 &= 0 \\ t &= \frac{2-\lambda\pm\sqrt{\lambda(\lambda-4)}}{2} \end{aligned} \qquad (18)$$

接下來考慮三種情況：(i) $\lambda(\lambda-4)=0$、(ii) $\lambda(\lambda-4)>0$ 和 (iii) $\lambda(\lambda-4)<0$，並看看 (17) 在哪種情況下有非平凡解。在情況 (i) (亦即 $\lambda=0$ 或 $\lambda=4$) 下，不妨設 $2-\lambda=2\alpha$ (亦即設 $\alpha=\pm1$)。由此從 (18) 可得到一個二重實數根 $t=\alpha$，因此 (17) 中的方程的通解是 $f(x)=c_1\alpha^x+c_2x\alpha^x$。把此一結果代入 (17) 中的邊界條件，可得到以下方程組：

$$\begin{cases} c_1=0 \\ c_1\alpha^4+4c_2\alpha^4=0 \end{cases}$$

解上述方程組，可得 $c_1=c_2=0$，即 (17) 的特解是平凡解 $f(x)=0$。由此可知，0 和 4 都不是 (17) 的特徵值。

在情況 (ii) (亦即 $\lambda<0$ 或 $\lambda>4$) 下，不妨設 $2-\lambda=2\alpha$ (由此有 $\alpha>1$ 或 $\alpha<-1$ 以及 $\lambda=2-2\alpha$)。從 (18) 可得到兩個相異實數根 $t=\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-1}$，因此 (17) 中的方程的通解是 $f(x)=c_1(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})^x+c_2(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})^x$。把此一結果代入 (17) 中的邊界條件，可得到以下方程組：

$$\begin{cases} c_1+c_2=0 \\ c_1(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})^4+c_2(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})^4=0 \end{cases}$$

把上面第一個方程代入第二個方程，可得 $c_1((\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})^4-(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})^4)=0$。讀者請自行驗證，僅當 $\alpha=0$、$\alpha=\pm1$ 或 $\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 才有 $(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})^4=$

$(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})^4$，但我們在上面設定了 $\alpha>1$ 或 $\alpha<-1$，因此上述方程組的解只能是 $c_1=c_2=0$，即 (17) 的特解是平凡解 $f(x)=0$。由此可知，任何小於 0 或大於 4 的實數都不是 (17) 的特徵值。

在情況 (iii) (亦即 $0<\lambda<4$) 下，不妨設 $2-\lambda=2\cos\theta$ (由此有 $-1<\cos\theta<1$ 以及 $\lambda=2-2\cos\theta$)。從 (18) 可得到一對互相共軛的複數根 $t=\cos\theta\pm i\sin\theta$, 因此 (17) 中的方程的通解是 $f(x)=c_1\cos(\theta x)+c_2\sin(\theta x)$。把此一結果代入 (17) 中的邊界條件，可得到以下方程組：

$$\begin{cases} c_1=0 \\ c_1\cos(4\theta)+c_2\sin(4\theta)=0 \end{cases}$$

把上面第一個方程代入第二個方程，可得 $c_2\sin(4\theta)=0$。為得到非平凡解，必須假設 $c_2\neq 0$，由此必有

$$\begin{aligned} \sin(4\theta) &= 0 \\ \theta &= \frac{n\pi}{4}\ \ (n\in\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

上述計算顯示，(17) 有非平凡解：$f(x)=c_2\sin(\frac{n\pi x}{4})$。惟請注意，雖然任何整數 n 都可滿足上式，但由於上面設定了 $0<\lambda<4$，而 $\lambda=2-2\cos\theta=2-2\cos(\frac{n\pi}{4})$。此外，不同整數可給出相同的 λ 值。為滿足上述條件和避免出現重複的值，只需選定三個整數，不妨選定 $n=1,2,3$。總括而言，對應 $n=1,2,3$ 這三個正整數，各有 (17) 的一個特徵值 λ_n 和相應的特徵函數 $f_n(x)$ 如下：

$$\begin{array}{ll} \lambda_1=2-\sqrt{2}, & f_1(x)=\sin(\frac{\pi x}{4}) \\ \lambda_2=2, & f_2(x)=\sin(\frac{\pi x}{2}) \\ \lambda_3=2+\sqrt{2}, & f_3(x)=\sin(\frac{3\pi x}{4}) \end{array} \qquad (19)$$

以上介紹的「自伴算子差分方程」(15) 跟以下「標準形式」的 2 階線性齊次常差分方程在形式上有顯著差異：

$$k_2(x)Ef(x)+(k_1(x)+\lambda s(x))f(x)+k_0(x)E^{-1}f(x)=0 \qquad (20)$$

現在的問題是，給定以上「標準形式」的差分方程，能否把它轉化成「自伴算子差分方程」? 為解答這個問題，首先須注意 (15) 具有以下特點：$Ef(x)$ 的係數 $u(x)$ 剛好等於 $E^{-1}f(x)$ 的係數 $E^{-1}u(x)$ 的移位。在一般情況下，(20) 中的 $k_2(x)$ 不一定等於 $k_0(x)$ 的移位，因而不具備 (15) 的形式。但可以把 (20) 全式乘以一個待求函數 $h(x)$，使得

$$E(k_0(x)h(x))=k_2(x)h(x) \qquad (21)$$

並設定

$$u(x)=k_2(x)h(x),\ \ v(x)=k_1(x)h(x)+u(x)+E^{-1}u(x),\ \ w(x)=s(x)h(x) \qquad (22)$$

所得結果便具有 (15) 的形式，因此接下來的任務是從 (21) 解出 $h(x)$，亦即求解以下 1 階線性方程：

$$Ek_0(x)Eh(x) - k_2(x)h(x) = 0 \qquad (23)$$

舉例說，考慮以下標準形式的差分方程：

$$2Ef(x) + \lambda f(x) + E^{-1}f(x) = 0 \qquad (24)$$

把上式與 (20) 比較，這裡有 $k_2(x) = 2$，$k_1(x) = 0$，$s(x) = k_0(x) = 1$，因此根據 (23)，要求解以下 1 階線性方程：

$$Eh(x) - 2h(x) = 0 \qquad (25)$$

由於上式是常係數方程，容易求得上式的一個解為 $h(x) = 2^x$。接著根據 (22) 設定

$$u(x) = 2^{x+1},\ \ v(x) = 0 + 2^{x+1} + 2^x = 3 \times 2^x,\ \ w(x) = 2^x$$

把上述設定代入 (14)，可得到

$$\Delta(2^x \Delta E^{-1}f(x)) + (3 \times 2^x + 2^x\lambda)f(x) = 0 \qquad (26)$$

請讀者自行驗證，上式等於把 (24) 全式乘以 2^x 所得的結果。換句話說，通過把 (24) 乘以 2^x，我們把 (24) 轉化成自伴算子差分方程。

以上介紹了算子 T_D 和 T_Δ，為進一步討論這兩個算子的性質，以下先引入函數之間的內積(inner product) 概念[3]。設 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 為有相同定義域的實值函數，則 $f_1(x)$ 與 $f_2(x)$ 的內積，以下記作 $\langle f_1, f_2\rangle$，可因應 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 的定義域的性質而定義如下：若 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 的定義域是連續區間 (a, b)，則

$$\langle f_1, f_2\rangle = \int_a^b f_1(x)f_2(x) \qquad (27)$$

若 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 的定義域是離散集合 $\{(a), a+1, \ldots, b-1, (b)\}$，則

$$\langle f_1, f_2\rangle = \sum_{a+1}^{b-1} f_1(x)f_2(x) \qquad (28)$$

我們有以下定理。

定理 1：設 $\langle\ \rangle$ 如上定義，

[3]讀者可參閱《數學示例：內積空間》以進一步了解此一概念。

(i) 設 T_D 為 (1) 中的算子，並且 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 滿足 (1) 中的邊界條件，則有

$$\langle T_D f_1, f_2\rangle = \langle f_1, T_D f_2\rangle \qquad (29)$$

(ii) 設 T_Δ 為 (14) 中的算子，並且 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 滿足 (14) 中的邊界條件，則有

$$\langle T_\Delta f_1, f_2\rangle = \langle f_1, T_\Delta f_2\rangle \qquad (30)$$

請注意上述定理中的關係 (29) 和 (30) 正符合泛函分析中「自伴算子」概念的定義[4]，正因如此，以上把 T_D 和 T_Δ 稱為自伴算子。

接下來讓我們驗證「定理 1(ii)」，為此，我們使用以下特定自伴算子：$T_\Delta f(x) = \Delta^2 E^{-1} f(x)$ 以及以下兩個在 $\{(0), 1, 2, 3, (4)\}$ 中有定義並且滿足邊界條件 $f_1(0) = f_1(4) = 0$ 和 $f_2(0) = f_2(4) = 0$ 的特定函數 (其中 $f_1(x)$ 的定義頗為任意)：

$$f_1(x) = ((0 \mapsto 0); 1 \mapsto 23; 2 \mapsto -2; 3 \mapsto 15; (4 \mapsto 0)) \qquad (31)$$

$$f_2(x) = x^3 - 4x^2,\ \ x \in \{(0), 1, 2, 3, (4)\} \qquad (32)$$

為方便以下計算，現把 $f_i(x)$、$\Delta f_i(x)$ 和 $\Delta^2 f_i(x)$ 在各點處的值列於以下「差分表」：

x	$f_1(x)$	$\Delta f_1(x)$	$\Delta^2 f_1(x)$	$f_2(x)$	$\Delta f_2(x)$	$\Delta^2 f_2(x)$
0	0	23	-48	0	-3	-2
1	23	-25	42	-3	-5	4
2	-2	17	-32	-8	-1	10
3	15	-15	-	-9	9	-
4	0	-	-	0	-	-

接著計算上述兩個內積如下：

$$\begin{aligned}\langle T_\Delta f_1, f_2\rangle &= \sum_1^3 \Delta^2 E^{-1} f_1(x) \times f_2(x)\\ &= \Delta^2 f_1(0) f_2(1) + \Delta^2 f_1(1) f_2(2) + \Delta^2 f_1(2) f_2(3)\\ &= 96\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle f_1, T_\Delta f_2\rangle &= \sum_1^3 f_1(x) \times \Delta^2 E^{-1} f_2(x)\\ &= f_1(1)\Delta^2 f_2(0) + f_1(2)\Delta^2 f_2(1) + f_1(3)\Delta^2 f_2(2)\\ &= 96\end{aligned}$$

[4]讀者可參閱《數學示例：希爾伯特伴隨》以進一步了解此一概念。

以上結果顯示 $\langle T_\Delta f_1, f_2\rangle = \langle f_1, T_\Delta f_2\rangle$，「定理 1(ii)」乃得驗證。

在介紹自伴算子的其他性質前，須先對前面定義的「內積」加以推廣。設 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 為定義 (27) 和 (28) 中的函數，則 $f_1(x)$ 與 $f_2(x)$關於權重函數 $w(x)$ 的內積(inner product with respect to the weight function $w(x)$)，以下記作 $\langle f_1, f_2\rangle_w$，可因應 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 的定義域的性質而定義如下：若 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 的定義域是 (a, b)，則

$$\langle f_1, f_2\rangle_w = \int_a^b w(x) f_1(x) f_2(x) \qquad (33)$$

若 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 的定義域是 $\{(a), a+1, \ldots, b-1, (b)\}$，則

$$\langle f_1, f_2\rangle_w = \sum_{a+1}^{b-1} w(x) f_1(x) f_2(x) \qquad (34)$$

此外，我們還從線性代數中借來「正交」(orthogonal) 的概念並略加修改。我們說實值函數 $f_1(x)$ 與 $f_2(x)$關於權重函數 $w(x)$ 正交(orthogonal with respect to the weight function $w(x)$)，如果

$$\langle f_1, f_2\rangle_w = 0 \qquad (35)$$

以下定理提供自伴算子方程的特徵值和特徵函數的一些重要性質。

定理 2：方程 (1) 和 (14) 有有限多個或可數無窮多個特徵值，這些特徵值全為實數，對應於不同特徵值的特徵函數關於權重函數 $w(x)$ 正交。

接下來讓我們用前面討論過的微分方程 (3) 的兩個特定特徵函數驗證上述定理，這個方程的權重函數是 $w(x) = \frac{1}{x}$。此外，根據 (6)，可知 $f_1(x) = \sin(\pi \ln x)$ 和 $f_2(x) = \sin(2\pi \ln x)$ 是對應於不同特徵值的特徵函數。由此有

$$\langle f_1, f_2\rangle_w = \int_1^e \frac{\sin(\pi \ln x)\sin(2\pi \ln x)}{x} \qquad (36)$$

接著用代入積分法求上述定積分。為此，設定 $f(x) = \sin x \sin 2x$ 和 $g(t) = \pi \ln t$，由此有 $Dg(t) = \frac{\pi}{t}$，這樣上式右端便具有 $\frac{1}{\pi}\int_1^e f(g(t)) \times Dg(t)$ 的形式。根據《數學示例：積分／和分運算法則》中的「定理 2(ii)」，這個積分等於 $\frac{1}{\pi}\int_{g(1)}^{g(e)} f(x)$，由此可以繼續求解如下：

$$\begin{aligned}\langle f_1, f_2\rangle_w &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x \sin 2x \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 x \cos x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{3\pi}\left[\sin^3 x\right]_0^\pi \\
&= 0
\end{aligned}
$$

以上結果顯示，$f_1(x)$ 與 $f_2(x)$ 關於 $w(x)$ 正交，「定理 2」乃得驗證。

「定理 2」告訴我們對應於不同特徵值的特徵函數的正交性。可是，某些方程的某些特徵值可能對應著多於一個互相線性獨立的特徵函數。在此情況下，「定理 2」並不保證這些特徵函數的相互正交性。不過，我們總可以借用線性代數中的「格拉姆-施密特正交化過程」(Gram–Schmidt orthogonalization process) 從這些特徵函數推導出一組互相正交的特徵函數。在某些特殊情況下，所有互相線性獨立的特徵函數 (包括對應於同一個特徵值互相線性獨立的特徵函數) 都互相正交，因而無需進行上述過程。

舉例說，考慮以下具有「周期 (periodic) 邊界條件」的微分方程：

$$D^2f(x)+\lambda f(x)=0,\ \ x\in(-\pi,\pi),\ \ f(-\pi)-f(\pi)=0,\ \ Df(-\pi)-Df(\pi)=0 \tag{37}$$

請注意上述方程的兩個邊界條件可以寫成 $f(-\pi)=f(\pi)$ 和 $Df(-\pi)=Df(\pi)$ 的形式，故稱「周期邊界條件」。請讀者自行驗證，運用前面介紹的方法，可求得上述方程的特徵值和特徵函數如下：

$$
\begin{array}{ll}
\lambda_0=0, & f_0(x)=1 \\
\lambda_n=n^2\ \ (n=1,2,\ldots), & f_{n,1}(x)=\cos(nx),\ \ f_{n,2}(x)=\sin(nx)
\end{array}
\tag{38}
$$

上述結果顯示，當 $n=1,2,\ldots$ 時，每個特徵值 n^2 各對應著兩個互相線性獨立的特徵函數 $\cos(nx)$ 和 $\sin(nx)$。根據「定理 2」，可知 $f_0(x)$ 與 $f_{n,i}(x)$ (其中 $n\neq 0$ 並且 $i=1,2$) 互相正交以及 $f_{m,i}(x)$ 與 $f_{n,j}(x)$ (其中 $m,n\neq 1$，$m\neq n$ 並且 $i=1,2$) 互相正交。除此以外，就這個特定方程而言，對每個 $n\neq 1$，$f_{n,1}(x)$ 與 $f_{n,2}(x)$ 也互相正交。具體地說，我們有以下定積分結果 (請注意這個方程的權重函數是 $w(x)=1$)：

$$
\begin{array}{ll}
\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)=0 & \int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)=0 \\
\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)=0 & \int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)\sin(nx)=0 \quad (m\neq n) \\
\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\sin(nx)=0 & \int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)\cos(nx)=0 \quad (m\neq n) \\
\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(nx)=0 &
\end{array}
\tag{39}
$$

請讀者自行驗證上述結果。

連結至數學專題
連結至周家發網頁