數學示例：變項分離法

我們在《數學示例：含任意函數的解》中介紹了求解偏微分／差分方程通解的方法，本文主旨是介紹另一種可用來求解某些偏微分／差分方程「邊值問題」或「初值-邊值問題」的方法，稱為變項分離法(separation of variables method)，這種方法的主要原理是假設 m 元未知函數 $f(x_1, \ldots, x_m)$ 可寫成以下形式：

$$f(x_1, \ldots, x_m) = X_1(x_1) \times \ldots \times X_m(x_m) \qquad (1)$$

其中的 X_i $(1 \leq i \leq m)$ 為僅包含一個論元 x_i 的函數，把上式右端代入方程中，從而設法把原來的偏微分／差分方程轉化為 m 個常微分／差分方程。把這些方程逐一求解後並把結果相乘，便得到原來方程的解。

我們先從齊次方程齊次邊值問題說起，考慮以下 2 階偏微分方程初值-邊值問題。請注意以下問題既包含邊界條件，又包含初始條件 (以下用；號區隔這兩類條件)，故稱初值-邊值問題(initial-boundary value problem)：

$$\begin{aligned}&3(D_x)^2 f(x, y) + D_y f(x, y) = 0, \;\; x \in (-\pi, \pi),\\ &f(-\pi, y) - f(\pi, y) = 0, D_x f(-\pi, y) - D_x f(\pi, y) = 0; \;\; f(x, 0) = 2\sin(3x)\end{aligned} \qquad (2)$$

為求解上述方程，先假設 $f(x, y)$ 可寫成以下形式：

$$f(x, y) = X(x) \times Y(y) \qquad (3)$$

把 (3) 代入 (2) 第一行中的方程，把全式除以 $3X(x) \times Y(y)$，並加以整理，可得以下等式：

$$\begin{aligned}3D^2X(x) \times Y(y) + X(x) \times DY(y) &= 0\\ -\frac{D^2X(x)}{X(x)} &= \frac{DY(y)}{3Y(y)}\end{aligned}$$

由於上式等號左、右兩端分別為僅包含論元 x 和 y 的函數，只有當這兩個函數值等於同一個任意常數 (設為 λ 時)，上述等式才能成立，因此我們有

$$\frac{D^2X(x)}{X(x)} = -\lambda, \;\; \frac{DY(y)}{3Y(y)} = \lambda \qquad (4)$$

從以上兩個等式可得到以下兩個常微分方程：

$$D^2X(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad (5)$$

$$DY(y) - 3\lambda Y(y) = 0 \qquad (6)$$

我們先處理 (5)，把 (3) 代入 (2) 中的兩個邊界條件，把全式除以 $Y(y)$，並把結果加入到 (5) 中，可得到以下 2 階常微分方程邊值問題：

$$D^2X(x)+\lambda X(x) = 0, \;\; x \in (-\pi, \pi), \;\; X(-\pi)-X(\pi) = 0, DX(-\pi)-DX(\pi) = 0 \qquad (7)$$

請注意上式包含可變化的參數 λ，隨著 λ 變化，上述邊值問題有時只有平凡解 $X(x) = 0$，有時則有非平凡解，因此先要找出所有令上式有非平凡解的 λ，然後再求相對應的非平凡解，這樣的 λ 和相對應的非平凡解正是我們在《數學示例：斯圖姆-劉維爾理論》中介紹的「特徵值」和「特徵函數」，因此可用該網頁的方法求解上述問題。事實上，上述問題實質上等於該網頁 (37) 中的邊值問題。根據上述網頁的 (38)，(7) 有以下特徵值和特徵函數：

$$\begin{array}{lll} \lambda_0 = 0, & X_0(x) = 1 & \\ \lambda_n = n^2 \;\; (n = 1, 2, \ldots), & X_{n,1}(x) = \cos(nx), & X_{n,2}(x) = \sin(nx) \end{array} \qquad (8)$$

接下來把 (8) 中的特徵值 λ_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ 逐一代入 (6)，並運用《數學示例：基本解集》中介紹的方法，以求得對應每個 λ_n，(6) 的解如下：

$$\begin{array}{ll} \lambda_0 = 0, & Y_0(y) = 1 \\ \lambda_n = n^2 \;\; (n = 1, 2, \ldots), & Y_n(y) = e^{3n^2y} \end{array} \qquad (9)$$

至此求得對應不同特徵值 λ 的 $X(x)$ 和 $Y(y)$。根據 (3)，把對應的 $X(x)$ 和 $Y(y)$ 相乘，便可得到 (2) (撇除其初始條件) 的一個解。由於這些解的任何線性組合都是解，可以把 (2) (撇除其初始條件) 的解寫成以下一般形式：

$$f(x, y) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_{n,1}e^{3n^2y} \cos(nx) + c_{n,2}e^{3n^2y} \sin(nx)) \qquad (10)$$

其中 c_0、$c_{n,1}$、$c_{n,2}$ 等是任意常數。接著把 (2) 中的初始條件代入上式，可得

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_{n,1} \cos(nx) + c_{n,2} \sin(nx)) = 2 \sin(3x) \qquad (11)$$

比較上式等號兩端的係數，容易求得除了 $c_{3,2} = 2$ 外，上式中所有其他係數都等於 0。把上述結果代入 (10)，便可最終求得 (2) 的解為

$$f(x, y) = 2e^{27y} \sin(3x) \qquad (12)$$

在上例中，很容易便解出 (11) 中的各個係數，在其他情況下，求解係數的過程會較複雜，需要應用《數學示例：傅立葉級數》中介紹的「傅立葉級數」概念。舉例說，考慮以下 x 和 y 的階分別為 2 和 1 的偏差分方程初值-邊值問題：

$$E_x f(x,y) - 2f(x,y) + (E_x)^{-1} f(x,y) + E_y f(x,y) = 0,\ \ x \in \{(0),1,2,3,(4)\},$$
$$f(0,y) = 0, f(4,y) = 0;\ \ f(x,0) = x^3 - 4x^2 \qquad (13)$$

像上例一樣，先假設 $f(x,y)$ 可寫成 (3) 的形式。把 (3) 代入 (13) 第一行中的方程，把全式除以 $X(x) \times Y(y)$，並加以整理，可得以下等式：

$$\frac{EX(x)}{X(x)} - 2 + \frac{E^{-1}X(x)}{X(x)} = -\lambda,\ \ \frac{EY(y)}{Y(y)} = \lambda \qquad (14)$$

從以上兩個等式可得到以下兩個常差分方程：

$$EX(x) + (\lambda - 2)X(x) + E^{-1}X(x) = 0 \qquad (15)$$

$$EY(y) - \lambda Y(y) = 0 \qquad (16)$$

我們先處理 (15)，把 (3) 代入 (13) 中的兩個邊界條件，把全式除以 $Y(y)$，並把結果加入到 (15) 中，可得到以下 2 階常差分方程邊值問題：

$$EX(x) + (\lambda - 2)X(x) + E^{-1}X(x) = 0,\ \ x \in \{(0),1,2,3,(4)\},\ \ X(0) = 0, X(4) = 0 \qquad (17)$$

上述問題實質上等於《數學示例：斯圖姆-劉維爾理論》(17) 中的邊值問題。根據上述網頁的 (19)，(17) 有以下特徵值和特徵函數：

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 2 - \sqrt{2}, & X_1(x) = \sin(\frac{\pi x}{4}) \\ \lambda_2 = 2, & X_2(x) = \sin(\frac{\pi x}{2}) \\ \lambda_3 = 2 + \sqrt{2}, & X_3(x) = \sin(\frac{3\pi x}{4}) \end{array} \qquad (18)$$

為方便後面另一例題的計算，以下也提供 (17) 的特徵值序列和特徵函數正交歸一序列 (等於《數學示例：傅立葉級數》中的 (18))：

$$(2-\sqrt{2}, 2, 2+\sqrt{2}),\ \ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right)\right) \qquad (19)$$

接下來把 (18) 中的特徵值 λ_n $(n = 1,2,3)$ 逐一代入 (16)，容易求得對應每個 λ_n，我們有 (16) 的解如下：

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 2 - \sqrt{2}, & Y_1(y) = (2 - \sqrt{2})^y \\ \lambda_2 = 2, & Y_2(y) = 2^y \\ \lambda_3 = 2 + \sqrt{2}, & Y_3(y) = (2 + \sqrt{2})^y \end{array} \qquad (20)$$

根據 (3)，把對應的 $X(x)$ 和 $Y(y)$ 相乘並且寫出這些乘積的線性組合，由此可以把 (13) (撇除其初始條件) 的解寫成以下一般形式：

$$f(x,y) = c_1(2-\sqrt{2})^y \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) + c_2 2^y \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + c_3(2+\sqrt{2})^y \sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right) \qquad (21)$$

接著把 (13) 中的初始條件代入上式，可得

$$c_1 \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + c_3 \sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right) = x^3 - 4x^2 \qquad (22)$$

為求解上式中的三個常數，可以運用《數學示例：傅立葉級數》中介紹的方法。事實上，我們在該網頁已求解上述問題，根據該網頁的 (21)，我們有 $c_1 = -4-3\sqrt{2}, c_2 = 3, c_3 = 4-3\sqrt{2}$。把上述結果代入 (21)，便可最終求得 (13) 的解為

$$\begin{aligned} f(x,y) \;\; &= \;\; (-4-3\sqrt{2})(2-\sqrt{2})^y \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) + 3 \times 2^y \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \\ &\quad + (4-3\sqrt{2})(2+\sqrt{2})^y \sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right) \qquad (23) \end{aligned}$$

以上的例子都只涉及 2 元函數，接下來看一個涉及 3 元函數的例子，請考慮以下 3 元偏微分方程邊值問題：

$$\begin{aligned} &(D_x)^2 f(x,y,z) + (D_y)^2 f(x,y,z) + (D_z)^2 f(x,y,z) = 0, \;\; x,y,z \in (0,1), \\ &f(0,y,z) = 0, f(1,y,z) = 0, f(x,0,z) = 0, f(x,1,z) = 0, \\ &f(x,y,0) = 0, f(x,y,1) = \pi^2 xy \qquad (24) \end{aligned}$$

類似前面的情況，假設 $f(x,y,z)$ 可寫成以下形式：

$$f(x,y,z) = X(x) \times Y(y) \times Z(z) \qquad (25)$$

把 (25) 代入 (24) 第一行中的方程，把全式除以 $X(x) \times Y(y) \times Z(z)$，並加以整理，可得以下等式：

$$-\frac{D^2 X(x)}{X(x)} - \frac{D^2 Y(y)}{Y(y)} = \frac{D^2 Z(z)}{Z(z)}$$

類似前面的情況，上式等號左右兩端必然等於同一個常數。不僅如此，由於上式等號左端是兩個分別僅包含論元 x 和 y 的函數之和，這兩個函數值必然也都是常數。總上所述，我們有以下等式：

$$\frac{D^2 X(x)}{X(x)} = -\lambda, \;\; \frac{D^2 Y(y)}{Y(y)} = -\mu, \;\; \frac{D^2 Z(z)}{Z(z)} = \lambda + \mu \qquad (26)$$

從以上三個等式可得到以下三個常微分方程：

$$D^2X(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad (27)$$

$$D^2Y(y) + \mu Y(y) = 0 \qquad (28)$$

$$D^2Z(z) - (\lambda + \mu)Z(z) = 0 \qquad (29)$$

我們先處理 (27)，把 (25) 代入 (24) 第二行中的首兩個邊界條件，把全式除以 $Y(y) \times Z(z)$，並把結果加入到 (27) 中，可得到以下 2 階常微分方程邊值問題：

$$D^2X(x) + \lambda X(x) = 0, \;\; x \in (0, 1), \;\; X(0) = 0, X(1) = 0 \qquad (30)$$

接著可以沿用《數學示例：斯圖姆-劉維爾理論》中的方法求解上述問題。讀者可自行驗證，當 $\lambda = 0$ 和 $\lambda < 0$ 時，上述問題只有平凡解 $X(x) = 0$；當 $\lambda = n^2\pi^2$ 時 (其中 $n \in \mathbb{Z}$)，上述問題有非平凡解 $X(x) = \sin(n\pi x)$，由此可見 (30) 有以下特徵值和特徵函數：

$$\lambda_n = n^2\pi^2 \;\; (n \in \mathbb{Z}), \;\; X_n(x) = \sin(n\pi x) \qquad (31)$$

為方便以下計算，這裡運用《數學示例：傅立葉級數》中的 (1) 求上述特徵函數的範數如下：

$$\|\sin(n\pi x)\| = \sqrt{\int_0^1 \sin^2(n\pi x)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (32)$$

從以上結果可得到 (30) 的特徵值序列和特徵函數正交歸一序列如下：

$$(n^2\pi^2)_{n\in\mathbb{N}}, \;\; \left(\sqrt{2}\sin(n\pi x)\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (33)$$

類似地，從 (28) 和 (24) 第二行中的末兩個邊界條件可以得到一個類似 (30) 的 2 階常微分方程邊值問題，這個問題有以下特徵值序列和特徵函數正交歸一序列：

$$(m^2\pi^2)_{m\in\mathbb{N}}, \;\; \left(\sqrt{2}\sin(m\pi y)\right)_{m\in\mathbb{N}} \qquad (34)$$

接下來把 (33) 和 (34) 中的特徵值 $n^2\pi^2$ 和 $m^2\pi^2$ $(n, m \in \mathbb{N})$ 分別代入 (29) 中的 λ 和 μ，把 (25) 代入 (24) 第三行中的第一個邊界條件，把全式除以 $X(x) \times Y(y)$，並把結果加入到 (29) 中，可得到以下 2 階常微分方程邊值問題：

$$D^2Z(z) - (n^2 + m^2)\pi^2 Z(z) = 0, \;\; z \in (0, 1), \;\; Z(0) = 0 \qquad (35)$$

上述方程 (撇除邊界條件) 的通解為 $Z(z) = c_1 e^{\sqrt{n^2+m^2}\pi z} + c_2 e^{-\sqrt{n^2+m^2}\pi z}$，但為方便以下計算，我們把這個通解改寫成以下形式[1]：

$$Z(z) = c_3 \cosh\left(\sqrt{n^2+m^2}\pi z\right) + c_4 \sinh\left(\sqrt{n^2+m^2}\pi z\right) \qquad (36)$$

把 $Z(0) = 0$ 代入上式，可得 $c_3 = 0$。由此可知，對應每個有序對 (n, m) $(n, m \in \mathbb{N})$，我們有 (35) 的解 (略去任意常數) 如下：

$$Z_{n,m}(z) = \sinh\left(\sqrt{n^2+m^2}\pi z\right) \qquad (37)$$

根據 (25)，把對應的 $X(x)$、$Y(y)$ 和 $Z(z)$ 相乘並且寫出這些乘積的線性組合，由此可以把 (24) (撇除其最後一個邊界條件) 的解寫成以下一般形式：

$$f(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{n,m} \sin(n\pi x)\sin(m\pi y)\sinh\left(\sqrt{n^2+m^2}\pi z\right) \qquad (38)$$

接著把 (24) 第三行中的第二個邊界條件代入上式，可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{n,m} \sinh\left(\sqrt{n^2+m^2}\pi\right)\sin(n\pi x)\sin(m\pi y) = \pi^2 xy \qquad (39)$$

為解出上式中的 $c_{n,m}$,先要寫出 $\pi^2 xy$ 關於 (33) 和 (34) 中兩個正交歸一序列成員的二重傅立葉級數展開式,即寫出 $\pi^2 xy = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} d_{n,m}\sqrt{2}\sin(n\pi x)\times \sqrt{2}\sin(m\pi y)$。運用《數學示例：傅立葉級數》中的 (56)，可以計算 $d_{n,m}$ 如下：

$$d_{n,m} = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1} \pi^2 xy \times \sqrt{2}\sin(n\pi x)\times\sqrt{2}\sin(m\pi y) = \frac{2\times(-1)^{n+m}}{nm} \qquad (40)$$

由此有

$$\pi^2 xy = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\times(-1)^{n+m}}{nm} \times \sqrt{2}\sin(n\pi x)\times\sqrt{2}\sin(m\pi y) \qquad (41)$$

把上式右端代入 (39) 右端，可就每對 n、m 得到以下方程：

$$c_{n,m}\sinh\left(\sqrt{n^2+m^2}\pi\right) = \frac{4\times(-1)^{n+m}}{nm} \qquad (42)$$

[1] 根據雙曲函數的定義，我們有 $e^x = \cosh x + \sinh x$ 和 $e^{-x} = \cosh x - \sinh x$，因此可以把 e^x 和 e^{-x} 的任意線性組合改寫成 $\cosh x$ 和 $\sinh x$ 的任意線性組合。

由此可解出 $c_{n,m}=\frac{4\times(-1)^{n+m}}{nm\sinh(\sqrt{n^2+m^2}\pi)}$。把上述結果代入 (38)，便可最終求得 (24) 的解為

$$f(x,y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4\times(-1)^{n+m}}{nm\sinh\left(\sqrt{n^2+m^2}\pi\right)}\sin(n\pi x)\sin(m\pi y)\sinh\left(\sqrt{n^2+m^2}\pi z\right)\qquad(43)$$

以上討論的都是齊次偏微分／偏差分方程齊次邊值問題，接下來讓我們討論如何處理非齊次邊界條件及／或非齊次方程。對於非齊次邊界條件，可以把《數學示例：傅立葉級數》中處理非齊次邊界條件的方法推廣到偏微分／差分方程，其要旨是把未知函數 f 寫成兩部分之和：$f=g+h$，其中 h 是某個滿足非齊次條件的簡單函數 (通常是多項式)。把 $g+h$ 代入原有問題的 f，便可把原來的非齊次邊值問題轉化為齊次邊值問題。

舉例說，考慮以下 x 和 y 的階分別為 2 和 1 的非齊次偏差分方程初值-非齊次邊值問題：

$$E_xf(x,y)-2f(x,y)+(E_x)^{-1}f(x,y)+E_yf(x,y)-2x=0,\;\; x\in\{(0),1,2,3,(4)\},$$
$$f(0,y)=0,f(4,y)=8;\;\; f(x,0)=x^3-4x^2\qquad(44)$$

為處理上列非齊次邊界條件，把未知函數 $f(x,y)$ 寫成以下形式：

$$f(x,y)=g(x,y)+h(x,y)\qquad(45)$$

其中 $h(x,y)$ 是滿足上列非齊次邊界條件的簡單函數。最簡單的情況是假設 $h(x,y)$ 具有以下常係數 1 次多項式的形式：$h(x,y)=s_1x+s_2$。把邊界條件 $h(0,y)=0,h(4,y)=8$ 代入這個 $h(x,y)$，可求得 $s_1=2,s_2=0$，由此有

$$h(x,y)=2x\qquad(46)$$

把 (45) 和 (46) 代入 (44)，可得

$$E_xg(x,y)+2(x+1)-2g(x,y)-2(2x)+(E_x)^{-1}g(x,y)+2(x-1)$$
$$+E_yg(x,y)+2x-2x=0,\;\; x\in\{(0),1,2,3,(4)\},$$
$$g(0,y)+2\times 0=0,g(4,y)+2\times 4=8;\;\; g(x,0)+2x=x^3-4x^2\qquad(47)$$

把上式加以整理，可得以下齊次偏差分方程初值-齊次邊值問題：

$$E_xg(x,y)-2g(x,y)+(E_x)^{-1}g(x,y)+E_yg(x,y)=0,\;\; x\in\{(0),1,2,3,(4)\},$$
$$g(0,y)=0,g(4,y)=0;\;\; g(x,0)=x^3-4x^2-2x\qquad(48)$$

若撇除其初始條件，上述問題與 (13) 大致相等 (僅須把 (13) 中的 f 改為 g)。根據前面的討論，可知上述問題 (撇除其初始條件) 的解等於 (21) 的右端，即：

$$g(x,y)=c_1(2-\sqrt{2})^y\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)+c_22^y\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)+c_3(2+\sqrt{2})^y\sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right)\qquad(49)$$

接著把 (48) 中的初始條件代入上式，可得

$$c_1 \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + c_3 \sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right) = x^3 - 4x^2 - 2x \qquad (50)$$

為解出上式中的 c_i $(1 \leq i \leq 3)$，先要寫出 $x^3 - 4x^2 - 2x$ 關於 (19) 中的正交歸一序列成員的傅立葉級數展開式, 即寫出 $x^3 - 4x^2 - 2x = d_1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\frac{\pi x}{4}) + d_2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\frac{\pi x}{2}) + d_3 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\frac{3\pi x}{4})$。運用《數學示例：傅立葉級數》中的 (9)，可以計算 d_i $(1 \leq i \leq 3)$ 如下：

$$\begin{array}{l} d_1 = \sum_1^3 \left((x^3 - 4x^2 - 2x) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right) = -10 - 6\sqrt{2} \\ d_2 = \sum_1^3 \left((x^3 - 4x^2 - 2x) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) = 5\sqrt{2} \\ d_3 = \sum_1^3 \left((x^3 - 4x^2 - 2x) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right)\right) = -10 + 6\sqrt{2} \end{array} \qquad (51)$$

由此有

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 - 2x &= (-10 - 6\sqrt{2}) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) + 5\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \\ &\quad + (-10 + 6\sqrt{2}) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right) \qquad (52) \end{aligned}$$

把上式右端代入 (50) 右端，可求得 $c_1 = -6 - 5\sqrt{2}, c_2 = 5, c_3 = 6 - 5\sqrt{2}$。把上述結果代入 (49)，便可求得 (48) 的解為

$$\begin{aligned} g(x,y) &= (-6 - 5\sqrt{2})(2 - \sqrt{2})^y \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) + 5 \times 2^y \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \\ &\quad + (6 - 5\sqrt{2})(2 + \sqrt{2})^y \sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right) \qquad (53) \end{aligned}$$

最後，利用 (45)、(46) 和 (53)，便可求得 (44) 的解為

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (-6 - 5\sqrt{2})(2 - \sqrt{2})^y \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) + 5 \times 2^y \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \\ &\quad + (6 - 5\sqrt{2})(2 + \sqrt{2})^y \sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right) + 2x \qquad (54) \end{aligned}$$

對於非齊次方程，可以沿用前面的做法，把未知函數 f 寫成 (3) 的形式，並求與這個非齊次方程相關的齊次方程的特徵值和特徵函數。接著把未知函數寫成特徵函數的線性組合，並把方程的非齊次項寫成傅立葉級數展開式；然後把上述線性組合和展開式代入原來的方程，以解出未知函數。舉例說，考慮以下 2 階非齊次偏微分方程初值-齊次邊值問題：

$$\begin{gathered} (D_x)^2 f(x,y) - D_y f(x,y) + \frac{\pi}{2}(1-x)y = 0, \;\; x \in (0,1), \\ f(0,y) = 0, f(1,y) = 0; \;\; f(x,0) = \frac{1}{\pi^3}(x-1) \qquad (55) \end{gathered}$$

為求解上述問題, 首先假設 $f(x,y)$ 可寫成 (3) 的形式。把 (3) 代入與 (55) 相相關的齊次方程 (即 $(D_x)^2 f(x,y) - D_y f(x,y) = 0$), 把全式除以 $X(x) \times Y(y)$, 並加以整理, 可得以下等式：

$$\frac{D^2 X(x)}{X(x)} = -\lambda, \ \ \frac{DY(y)}{Y(y)} = -\lambda \qquad (56)$$

從上面第一個等式可得到以下常微分方程：

$$D^2 X(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad (57)$$

把 (3) 代入 (55) 中的兩個邊界條件, 把全式除以 $Y(y)$, 並把結果加入到 (57) 中, 可得到以下 2 階常微分方程邊值問題：

$$D^2 X(x) + \lambda X(x) = 0, \ \ x \in (0,1), \ \ X(0) = 0, X(1) = 0 \qquad (58)$$

由於上述問題與 (30) 完全相同, 可知上述問題的特徵值序列和特徵函數正交歸一序列等於前面的 (33)。

由於 (55) 是非齊次方程, 接下來不能沿用前面的方法處理 (56) 中的另一個等式。但仍可假設對應每個 λ_n, 都有一個待求的 $Y_n(y)$, 使得 (55) 的解可以表示成上述特徵函數與這些 $Y_n(y)$ 的以下線性組合 (以下把 (33) 中正交歸一序列成員的係數 $\sqrt{2}$ 吸收入 $Y_n(y)$ 中)：

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin(n\pi x) \qquad (59)$$

另一方面, 也寫出 (55) 中非齊次項 $\frac{\pi}{2}(1-x)y$ 的傅立葉級數展開式, 即寫出 $\frac{\pi}{2}(1-x)y = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sqrt{2} \sin(n\pi x)$。為此, 運用《數學示例：傅立葉級數》中的 (9) 求 d_n 如下：

$$d_n = \int_{x=0}^{x=1} \left(\frac{\pi}{2}(1-x)y \times \sqrt{2} \sin(n\pi x) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}n} y \qquad (60)$$

由此可得

$$\frac{\pi}{2}(1-x)y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}n} y \times \sqrt{2} \sin(n\pi x) \qquad (61)$$

把 (59) 和 (61) 代入 (55) 的第一行並加以整理, 可得

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 \pi^2 Y_n(y) + DY_n(y) - \frac{1}{n} y \right) \sin(n\pi x) = 0 \qquad (62)$$

由於在 $x \in (0,1)$ 的情況下，$\sin(n\pi x)$ 不等於零函數，從上式可就每個 n 得到以下以 $Y_n(y)$ 為未知函數的 1 階常係數非齊次常微分方程：

$$DY_n(y) + n^2\pi^2 Y_n(y) - \frac{1}{n}y = 0 \qquad (63)$$

可以求得以上方程的通解為：

$$Y_n(y) = c_n e^{-n^2\pi^2 y} + \frac{1}{n^3\pi^2}y - \frac{1}{n^5\pi^4} \qquad (64)$$

其中 c_n 是任意常數。把以上結果代入 (59)，可得 (55) (撇除其初始條件) 的通解如下：

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{-n^2\pi^2 y} + \frac{1}{n^3\pi^2}y - \frac{1}{n^5\pi^4}\right)\sin(n\pi x) \qquad (65)$$

接著把 (55) 中的初始條件代入上式，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n - \frac{1}{n^5\pi^4}\right)\sin(n\pi x) = \frac{1}{\pi^3}(x-1) \qquad (66)$$

為解出 c_n，可以寫出上式右端的傅立葉級數展開式，即寫出 $\frac{1}{\pi^3}(x-1) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sqrt{2}\sin(n\pi x)$。為此，再次運用上述網頁的 (9) 求 b_n 如下：

$$b_n = \int_{x=0}^{x=1}\left(\frac{1}{\pi^3}(x-1)\times\sqrt{2}\sin(n\pi x)\right) = -\frac{\sqrt{2}}{n\pi^4} \qquad (67)$$

由此可得

$$\frac{1}{\pi^3}(x-1) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\sqrt{2}}{n\pi^4}\times\sqrt{2}\sin(n\pi x)\right) \qquad (68)$$

把上式右端代入 (66) 右端，可就每個 n 得到以下方程：

$$c_n - \frac{1}{n^5\pi^4} = -\frac{2}{n\pi^4} \qquad (69)$$

由此可解出 $c_n = \frac{1-2n^4}{n^5\pi^4}$。把上述結果代入 (65)，便最終求得 (55) 的解為

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-2n^4}{n^5\pi^4}e^{-n^2\pi^2 y} + \frac{1}{n^3\pi^2}y - \frac{1}{n^5\pi^4}\right)\sin(n\pi x) \qquad (70)$$

連結至數學專題
連結至周家發網頁