## 數學示例:可分變項與可分核

我們在《數學示例:積分/和分因子》中介紹了用積分/和分因子求解 1 階線性常微分/差分方程的通用方法,上述方法不適用於非線性方程。不過,對於具有某些特定形式的 1 階方程,我們仍有特定的求解方法。本文主旨是介紹具有這些特定形式的微分/差分/積分/和分方程的求解方法。

本文討論的微分方程是具有<mark>可分變項</mark>(separable variable) 的 1 階常微分方程 (這種方程亦可稱為「可分方程」separable equation), 這是指可表示成以下形式的方程:

$$Df(x) = g(x) \times h(f(x)) \tag{1}$$

其中 g(x) 代表某個以 x 作為變項的已知函數,h(f(x)) 代表某個以未知函數 f(x) 作為變項的的已知函數。由於上式右端可被寫成上述兩個函數的乘積,故稱「可分」。舉例說,以下非線性微分方程

$$Df(x) - (f(x))^{2} + 4 = 0 (2)$$

是可分的,因為可以把上式改寫成以下形式:

$$Df(x) = (f(x))^2 - 4 (3)$$

由此可以看到, 就 (2) 而言, g(x) = 1,  $h(x) = x^2 - 4$ 。

為求解 (1), 先把它寫成以下形式:

$$\left(\frac{1}{h(x)} \circ f(x)\right) \times Df(x) = g(x) \qquad (4)$$

接著根據求導數算子 D 與不定積分算子  $\int$  的互逆性以及求導數的「鏈式法則」(見《數學示例:微分/差分運算法則》中的「定理 1(iii)」),把上式改寫並繼續求解如下 $^1$ :

$$\left(D\left(\int \frac{1}{h(x)}\right) \circ f(x)\right) \times Df(x) = g(x)$$

<sup>1—</sup>般有關微分方程的教科書是把 Df(x) 寫成  $\frac{df}{dx}$ , 並從而把 (4) 寫成  $\frac{df}{h(f)} = g(x)dx$  的形式,然後對等號兩端同時進行不定積分運算,從而推導出 (5)。本文不採用  $\frac{df}{dx}$  的形式,所以不採用上述推導方法。

$$D\left(\left(\int \frac{1}{h(x)}\right) \circ f(x)\right) = g(x)$$
$$\left(\int \frac{1}{h(x)}\right) \circ f(x) = \int g(x) \qquad (5)$$

如能從上式解出 f(x) (不一定是「初等函數解」,即表示成初等函數的組合的解),所得結果就是 (1) 的 (通常意義下的) 解,稱為<mark>顯式解</mark>(explicit solution),否則可以把上式 (經化簡後) 看成 (1) 的 (寬泛意義下的) 解,稱為<mark>隱式解</mark>(implicit solution)。

以 (2) 為例,根據前面的討論,該方程可以改寫成 (3) 的形式。把 g(x) = 1 和  $h(x) = x^2 - 4$  代入 (5),並進行計算如下<sup>2</sup>:

$$\left(\int \frac{1}{x^2 - 4}\right) \circ f(x) = \int 1$$

$$\left(\int \left(\frac{1}{4(x - 2)} - \frac{1}{4(x + 2)}\right)\right) \circ f(x) = \int 1$$

$$\left(\frac{1}{4} \ln|x - 2| - \frac{1}{4} \ln|x + 2|\right) \circ f(x) = x + c_1$$

$$\left(\frac{1}{4} \ln|f(x) - 2| - \frac{1}{4} \ln|f(x) + 2|\right) = x + c_1$$

$$\ln\left|\frac{f(x) - 2}{f(x) + 2}\right| = 4x + 4c_1$$

$$\frac{f(x) - 2}{f(x) + 2} = \pm e^{4c_1}e^{4x}$$

把上面最後一行中的  $\pm e^{4c_1}$  換成另一任意常數  $c_2$ ,便可把上面最後一行寫成較簡潔的形式:

$$\frac{f(x) - 2}{f(x) + 2} = c_2 e^{4x} \qquad (6)$$

從上式解出 f(x), 便可得到 (2) 的顯式通解如下:

$$f(x) = \frac{2 + 2c_2e^{4x}}{1 - c_2e^{4x}} \tag{7}$$

接下來看一個只能求得隱式解的非線性微分方程的例子:

$$(e^{2f(x)} + 1)Df(x) - xe^{f(x)} = 0 (8)$$

 $<sup>^2</sup>$ 以下計算要應用分解「部分分式」(partial fraction) 的技巧, 即假設  $\frac{1}{x^2-4}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2}$ , 然後解出 a 和 b。

上式可以改寫成以下形式:

$$Df(x) = x \times \frac{e^{f(x)}}{e^{2f(x)} + 1}$$
 (9)

由此可以看到就 (8) 而言,g(x) = x, $h(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+1}$ 。 把上述的 g(x) 和 h(x) 代入 (5),並進行計算如下:

$$\left(\int \frac{e^{2x} + 1}{e^x}\right) \circ f(x) = \int x$$

$$\left(\int (e^x + e^{-x})\right) \circ f(x) = \int x$$

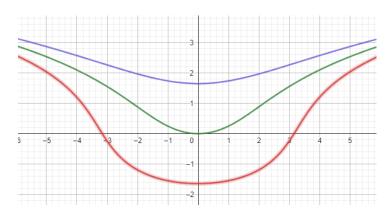
$$(e^x - e^{-x}) \circ f(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$e^{f(x)} - e^{-f(x)} = \frac{1}{2}x^2 + c \qquad (10)$$

由於無法從上式解出 f(x), 可以把上式看作 (8) 的隱式通解。如用 y 坐標表示 f(x) 的值,那麼上式可被看成代表以下帶有參數 c 的二維曲線族:

$$e^{y} - e^{-y} - \frac{1}{2}x^{2} = c \qquad (11)$$

下圖展示上述曲線取 c=0 (綠色)、c=5 (藍色) 和 c=-5 (紅色) 時的圖象:



由於差分運算沒有類似「鏈式法則」的運算法則,我們不能為差分方程推導出(5)那樣的結果。不過,如果某個差分方程可以改寫成以下形式<sup>3</sup>:

$$Eh(f(x)) - h(f(x)) = g(x) \qquad (12)$$

 $<sup>^3</sup>$ 過程中可能需要運用 Eh(f(x))=h(Ef(x)) 此一關係,這是合理的,因為根據 E 的定義,Eh(f(x)) 和 h(Ef(x)) 都等於 h(f(x+1))。

便可根據  $E-I=\Delta$  此一定義, 把上式改寫並繼續求解如下:

$$\Delta h(f(x)) = g(x)$$

$$h(f(x)) = \sum g(x) \qquad (13)$$

如能從上式解出 f(x) (不一定是初等函數解),所得結果就是原方程的顯式解,否則可以把上式 (經化簡後) 看成原方程的隱式解。

舉例說,考慮以下非線性差分方程 (以下方程等於《數學示例:方程與解》中的(17)):

$$Ef(x) - f(x) + xf(x)Ef(x) = 0 (14)$$

這個方程可以改寫成以下形式:

$$\frac{1}{Ef(x)} - \frac{1}{f(x)} = x$$
 (15)

上式具有 (12) 的形式 (其中  $h(x) = \frac{1}{x}$ , g(x) = x), 因此可以用上述方法繼續求解如下:

$$\Delta\left(\frac{1}{f(x)}\right) = x$$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$f(x) = \frac{2}{x^2 + 2c} \qquad (16)$$

上面最後一行就是 (14) 的顯式通解。

接下來看一個其解並非初等函數解的非線性差分方程的例子:

$$2^{Ef(x)} - x2^{f(x)} = 0, \ x \in \mathbb{N}$$
 (17)

我們把上式一步一步改寫如下:

$$2^{Ef(x)} = x2^{f(x)} 
\frac{2^{Ef(x)}}{2^{f(x)}} = x 
2^{Ef(x)-f(x)} = x 
Ef(x) - f(x) = \log_2 x$$
 (18)

上面最後一行具有 (12) 的形式 (其中 h(x) = x,  $g(x) = \log_2 x$ ),因此可以用上述方法繼續求解如下:

$$\Delta f(x) = \log_2 x$$
  
$$f(x) = \log_2 \Gamma(x) + c \qquad (19)$$

上面最後一行就是 (17) 的顯式通解,請注意這不是初等函數解 (因為  $\Gamma(x)$  不是初等函數)。

接下來討論具有<mark>可分核</mark>(separable kernel) 的「弗雷德霍姆積分方程」,這是 指具有以下一般形式的積分方程:

$$f(x) + \int_{t=a}^{t=b} K(x,t)\Phi(f(t)) + g(x) = 0$$
 (20)

其中 a 和 b 是常數,  $\Phi$  是以未知函數 f(x) 作為論元的給定 (線性或非線性) 函數, g(x) 是以 x 作為論元的給定函數 (以下把這個函數稱為「非齊次項」), K(x,t) 則是給定的可寫成以下形式的「可分核」:

$$K(x,t) = h_1(x)k_1(t) + \ldots + h_n(x)k_n(x)$$
 (21)

上式由有限個項相加而成,其中每一項都是某個以x 作為變項的函數  $h_i(x)$  與另一個以t 作為變項的函數  $k_i(t)$  的乘積。

在 (20) 中,如果 g(x) = 0,有關方程稱為「齊次方程」,否則稱為「非齊次方程」。容易看到,零函數必然是齊次方程的解,因此以下只討論非齊次方程。由於 (20) 中的積分是關於 t 的積分,我們可以把可分核中每一項的  $h_i(x)$  抽到積分算子外面,即把 (20) 中的方程寫成以下形式:

$$f(x) + \left(h_1(x) \int_{t=a}^{t=b} k_1(t) \Phi(f(t))\right) + \dots + \left(h_n(x) \int_{t=a}^{t=b} k_n(t) \Phi(f(t))\right) + g(x) = 0$$
 (22)

由於上式中的 n 個積分都是關於 t 的定積分,而所有被積函數都只包含變項 t. 這些定積分的結果必然是常數。現在如定義以下常數:

$$c_{1} = \int_{t=a}^{t=b} k_{1}(t)\Phi(f(t))$$

$$\vdots$$

$$c_{n} = \int_{t=a}^{t=b} k_{n}(t)\Phi(f(t))$$

$$(23)$$

那麼可以把 (22) 進一步改寫成

$$f(x) = -c_1 h_1(x) - \dots - c_n h_n(x) - g(x)$$
 (24)

從上式可以看到,如能確定  $c_1$ 、…、 $c_n$ ,那麼上式就是 (20) 的解。為確定上述  $c_i$ ,可以把 (24) 代入 (23),並從而解出  $c_i$ 。

舉例說,考慮以下線性積分方程<sup>4</sup>(以下方程等於《數學示例:方程與解》中的 (12)):

$$f(x) - \int_{t=0^{+}}^{t=1} \ln(xt)f(t) - 1 = 0, \ x \in (0, \infty)$$
 (25)

上述方程的可分核  $-\ln(xt)$  可以改寫成包含兩項的形式: $-\ln x - \ln t$ ,由此有  $h_1(x) = -\ln x$ 、 $k_1(t) = 1$ 、 $h_2(x) = -1$  和  $k_2(t) = \ln t$ 。根據 (23),定義以下常數:

$$c_{1} = \int_{t=0^{+}}^{t=1} f(t) \quad (26)$$

$$c_{2} = \int_{t=0^{+}}^{t=1} \ln t f(t) \quad (27)$$

由此可把 (25) 中的方程改寫成

$$f(x) = c_1 \ln x + c_2 + 1 \qquad (28)$$

為解出  $c_1$  和  $c_2$ , 把上式依次代入 (26) 和 (27) 並計算如下:

$$c_{1} = \int_{t=0^{+}}^{t=1} (c_{1} \ln t + c_{2} + 1)$$

$$= [c_{1}(t \ln t - t) + (c_{2} + 1)t]_{0^{+}}^{1}$$

$$= -c_{1} + c_{2} + 1 \quad (29)$$

$$c_2 = \int_{t=0^+}^{t=1} (c_1(\ln t)^2 + (c_2+1)\ln t)$$
  
=  $[c_1(t(\ln t)^2 - 2t\ln t + 2t) + (c_2+1)(t\ln t - t)]_{0^+}^{1}$   
=  $2c_1 - c_2 - 1$  (30)

從 (29) 和 (30), 我們有以下 1 次方程組:

$$\begin{cases} 2c_1 - c_2 = 1\\ -2c_1 + 2c_2 = -1 \end{cases}$$
 (31)

$$\lim_{s\to 0^+} \int_{t-s}^{t=1} \ln(xt) f(t)$$

 $<sup>^4</sup>$ (25) 中的積分下限  $0^+$  代表這個積分實際上是以下「右極限」(即有關函數從 0 的右邊 趨向 0 的極限值):

解此方程組,可得  $c_1 = \frac{1}{2}$ ,  $c_2 = 0$ 。把此一結果代入 (28),便可得到 (25) 的解如下:

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln x + 1 \qquad (32)$$

接下來考慮以下非線性積分方程 (以下方程等於《數學示例:方程與解》中的 (18)):

$$f(x) - \frac{1}{2} \int_{t=0}^{t=1} x t(f(t))^2 - \frac{7}{8} x = 0$$
 (33)

上述方程的可分核  $-\frac{1}{2}xt$  僅包含一項,由此有  $h(x) = -\frac{1}{2}x$  和 k(t) = t。根據 (23),定義以下常數:

$$c = \int_{t=0}^{t=1} t(f(t))^2 \qquad (34)$$

由此可把 (33) 中的方程改寫成

$$f(x) = \frac{1}{2}cx + \frac{7}{8}x$$
$$= \left(\frac{1}{2}c + \frac{7}{8}\right)x \qquad (35)$$

為解出 c, 把上式代入 (34) 並計算如下:

$$c = \int_{t=0}^{t=1} t \left( \left( \frac{1}{2}c + \frac{7}{8} \right) t \right)^{2}$$

$$= \left( \frac{1}{2}c + \frac{7}{8} \right)^{2} \int_{t=0}^{t=1} t^{3}$$

$$= \left( \frac{1}{2}c + \frac{7}{8} \right)^{2} \left[ \frac{t^{4}}{4} \right]_{0}^{1}$$

$$= \left( \frac{1}{2}c + \frac{7}{8} \right)^{2} \times \frac{1}{4}$$
 (36)

從上面最後一行,可得到以下2次方程:

$$\frac{1}{16}c^2 - \frac{25}{32}c + \frac{49}{256} = 0$$

$$(4c - 1)(4c - 49) = 0 (37)$$

解上述方程, 可得  $c=\frac{1}{4}$  和  $c=\frac{49}{4}$  這兩個根。把這兩個根依次代入 (35), 便可得到 (33) 的兩個解如下:

$$f(x) = x, \quad f(x) = 7x \qquad (38)$$

上述解題技巧也適用於具有可分核的「弗雷德霍姆和分方程」, 這是指具有以下一般形式的和分方程:

$$f(x) + \sum_{t=a}^{t=b} K(x,t)\Phi(f(t)) + g(x) = 0$$
 (39)

其中的 K(x,t) 也具有 (21) 的形式。在 (39) 中,如果 g(x) = 0,有關方程稱為「齊次方程」,否則稱為「非齊次方程」。類似積分方程的情況,以下只討論非齊次方程,並且把可分核中每一項的  $h_i(x)$  抽到和分算子外面,即把 (39) 中的方程寫成以下形式:

$$f(x) + \left(h_1(x)\sum_{t=a}^{t=b} k_1(t)\Phi(f(t))\right) + \ldots + \left(h_n(x)\sum_{t=a}^{t=b} k_n(t)\Phi(f(t))\right) + g(x) = 0$$
 (40)

接著如定義以下常數:

$$c_{1} = \sum_{t=a}^{t=b} k_{1}(t)\Phi(f(t))$$

$$\vdots$$

$$c_{n} = \sum_{t=a}^{t=b} k_{n}(t)\Phi(f(t))$$

$$(41)$$

便可以把 (40) 進一步改寫成 (下式等於前面的 (24)):

$$f(x) = -c_1 h_1(x) - \dots - c_n h_n(x) - g(x)$$
 (42)

如能確定  $c_1$ 、…、 $c_n$ ,那麼 (42) 就是 (39) 的解。為確定上述  $c_i$ ,可以把 (42) 代入 (41),並從而解出  $c_i$ 。

舉例說,考慮以下線性和分方程 (以下方程等於《數學示例:方程與解》中的 (15)):

$$f(x) - \sum_{t=0}^{t=4} (1+xt)f(t) - 1 = 0$$
 (43)

上述方程的可分核 -1 - xt 包含兩項,由此有  $h_1(x) = -1$ 、 $k_1(t) = 1$ 、 $h_2(x) = -x$  和  $k_2(t) = t$ 。根據 (41),定義以下常數:

$$c_1 = \sum_{t=0}^{t=4} f(t) \qquad (44)$$

$$c_2 = \sum_{t=0}^{t=4} t f(t) \qquad (45)$$

由此可把 (43) 中的方程改寫成

$$f(x) = c_1 + c_2 x + 1 \qquad (46)$$

為解出  $c_1$  和  $c_2$ , 把上式依次代入 (44) 和 (45) 並計算如下<sup>5</sup>:

$$c_1 = \sum_{t=0}^{t=4} (c_1 + c_2 t + 1)$$

$$= \left[ (c_1 + 1)t + \frac{c_2 t^2}{2} \right]_0^5$$

$$= 5c_1 + 5 + 10c_2 \quad (47)$$

$$c_{2} = \sum_{t=0}^{t=4} t(c_{1} + c_{2}t + 1)$$

$$= \sum_{t=0}^{t=4} ((c_{1} + 1)t + c_{2}t^{2})$$

$$= \left[ \frac{(c_{1} + 1)t^{2}}{2} + \frac{c_{2}t(t - 1)(2t - 1)}{6} \right]_{0}^{5}$$

$$= 10c_{1} + 10 + 30c_{2} \quad (48)$$

從 (47) 和 (48), 我們有以下 1 次方程組:

$$\begin{cases}
-4c_1 - 10c_2 = 5 \\
-10c_1 - 29c_2 = 10
\end{cases} (49)$$

解此方程組,可得  $c_1 = -\frac{45}{16}$ ,  $c_2 = \frac{5}{8}$ 。 把此一結果代入 (46),便可得到 (43) 的解如下:

$$f(x) = \frac{5}{8}x - \frac{29}{16} \qquad (50)$$

接下來考慮以下非線性和分方程:

$$f(x) + \sum_{t=0}^{t=20} t(f(t))^2 - 1 = 0$$
 (51)

$$\sum t^2 = \frac{t(t-1)(2t-1)}{6} + c$$

 $<sup>\</sup>overline{\phantom{a}}$ 5以下計算要應用《數學示例:積分/和分運算法則》中的 (6) (但須把其中的 x 改為 t, 設定 h=1, 並把任意周期函數 p(x) 改為任意常數 c):

上述方程的可分核 t 僅包含一項,由此有 h(x) = 1 和 k(t) = t。根據 (41),定義以下常數:

$$c = \sum_{t=0}^{t=20} t(f(t))^2 \qquad (52)$$

由此可把 (51) 中的方程改寫成

$$f(x) = 1 - c \qquad (53)$$

為解出 c, 把上式代入 (52) 並計算如下:

$$c = \sum_{t=0}^{t=20} t(1-c)^{2}$$

$$= (1-c)^{2} \left[\frac{t^{2}}{2}\right]_{0}^{21}$$

$$= 210(1-c)^{2} (54)$$

從上面最後一行,可得到以下2次方程:

$$210c^{2} - 421c + 210 = 0$$
  
$$(15c - 14)(14c - 15) = 0$$
 (55)

解上述方程,可得  $c=\frac{14}{15}$  和  $c=\frac{15}{14}$  這兩個根。把這兩個根依次代入 (53),便可得到 (51) 的兩個解如下:

$$f(x) = \frac{1}{15}, \quad f(x) = -\frac{1}{14}$$
 (56)

請注意以上兩個解都是常值函數6。

## 連結至數學專題連結至周家發網頁

 $^{6}(51)$  其實也可以用以下方法求解:由於在確定函數 f(x) 後, $\sum_{t=0}^{t=20} t(f(t))^{2}$  是常數,(51) 實質具有以下形式:f(x) = 常數,因此待求函數 f(x) 必然是常值函數,故可先設定 f(x) = k。把此一設定代入 (51),可得

$$k + k^2 \sum_{t=0}^{t=20} t - 1 = 0$$

從上式可得到以下 2 次方程:

$$210k^2 + k - 1 = 0$$

解上述方程,同樣可得(56)所示結果。