數學示例：黎曼度量

我們在《數學示例：張量與張量場》中介紹了一般張量場的概念。本文主旨是介紹一種特殊張量場－「黎曼度量」，這種張量場是「黎曼幾何」的基礎概念。讀者將會看到，此一概念是傳統幾何學中「點積」、「長度」等概念的推廣。

設 M 為 m 維流形，M 上的一個黎曼度量(Riemannian metric)[1]，以下記作 g，是 M 上的一個具有對稱和正定(positive definite) 這兩種性質的光滑 $(0,2)$ 張量場。在以上定義中，g 的對稱性是指對 M 上任意 m 維向量場 v、w，都有

$$g(v,w) = g(w,v)$$

而 g 的正定性則是指對 M 上任意 m 維向量場 v 和任意點 x，都有 (以下把 g 看成以兩個向量場和一個點作為論元的實值函數)：

$$g(v,v)(x) \geq 0$$

並且 $g(v,v)(x)$ 對任何 x 都等於 0 當且僅當 $v = 0$ (即 v 為恆等於 0 的向量場)。一個附有黎曼度量 g 的流形 M 稱為黎曼流形(Riemannian manifold)，一般記作 (M,g)，「黎曼幾何」就是研究黎曼流形的幾何學分支。

由於 g 是 $(0,2)$ 張量場，因此具有以下形式 (下式使用嚴式求和約定，其中 i 和 j 在 1 至 m 之間取值)[2]：

$$g = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j \qquad (1)$$

在上式中，g_{ij} 是 M 上實值函數，是 g 相對於 $dx^i \otimes dx^j$ 的分量。為方便計算 g 對向量場 v、w 的作用，可以把 g 寫成 $m \times m$ 方陣的形式，以下記作 $[g]$，這個方陣第 i 行第 j 列上的項就是 g_{ij}。可以證明，

$$g(v,w) = [w]^T \times [g] \times [v] \qquad (2)$$

---

[1] 英語詞"metric"在不同數學分支中可以指稱不同的概念，因而也有不同的譯名。在微分幾何和黎曼幾何中，一般譯作「度量」(在物理學上也譯作「度規」)；在泛函分析和點集拓樸中，則一般譯作「距離」(請參閱《數學示例：距離空間》)。

[2] 在微分幾何中，g 又稱為「第一基本形式」(first fundamental form)，其分量 g_{ij} 又稱為「第一基本形式係數」，這就是我們在《數學示例：基本形式係數》中使用 g_{ij} 代表第一基本形式係數的原因。

其中 $\times$ 代表矩陣乘法，$[v]$ 代表把 m 維向量場 v 寫成 $m\times 1$ 列矩陣的形式，$[w]^T$ 則代表把 m 維向量場 w 寫成 $1\times m$ 行矩陣的形式。

舉例說，以下是我們最熟悉的 2 維流形 $\mathbb{R}^2$ 上的黎曼度量，稱為歐幾里得度量(Euclidean metric)：

$$g_I = dx^1\otimes dx^1 + dx^2\otimes dx^2 \qquad (3)$$

請讀者自行驗證以上度量 (以及下文將要介紹的其他度量) 的確具有對稱性和正定性。容易看到 $[g_I]$ 具有 2×2 單位矩陣的形式：

$$[g_I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

現設有 2 維向量場 $v=[v^1,v^2]^T$ 和 $w=[w^1,w^2]^T$，首先根據張量積的定義計算

$$\begin{aligned} g_I(v,w) &= (dx^1\otimes dx^1 + dx^2\otimes dx^2)([v^1,v^2]^T,[w^1,w^2]^T) \\ &= dx^1([v^1,v^2]^T)\times dx^1([w^1,w^2]^T) + dx^2([v^1,v^2]^T)\times dx^2([w^1,w^2]^T) \\ &= v^1w^1 + v^2w^2 \end{aligned}$$

接著根據 (2) 運用矩陣乘法，可得到相同結果 (由於 $[g_I]$ 等於單位矩陣，所以以下第二行可略去 $[g_I]$)：

$$\begin{aligned} g_I(v,w) &= [w]^T\times[g_I]\times[v] \\ &= \begin{bmatrix} w^1 & w^2 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix} \\ &= v^1w^1+v^2w^2 \qquad (5) \end{aligned}$$

根據線性代數中「點積」的定義，我們有 $g_I(v,w)=v\cdot w$，由此可見歐幾里得度量實質等於歐幾里得幾何中的點積，而黎曼度量可被看成點積概念的推廣，也可以說黎曼量度為我們提供一般黎曼流形上的點積。

接著考慮 $\mathbb{R}^2$ 上的另一個黎曼度量及其對應矩陣 (我們姑且把這個度量稱為「拋物面度量」(paraboloid metric)，以下會解釋此名稱的由來)：

$$g_{II} = (1+4(x^1)^2)\, dx^1\otimes dx^1 + 4x^1x^2\,(dx^1\otimes dx^2 + dx^2\otimes dx^1) + (1+4(x^2)^2)\, dx^2\otimes dx^2 \qquad (6)$$

$$[g_{II}] = \begin{bmatrix} 1+4(x^1)^2 & 4x^1x^2 \\ 4x^1x^2 & 1+4(x^2)^2 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

利用矩陣乘法，可求得 g_{II} 對前述兩個 2 維向量場 v 和 w 的作用如下：

$$\begin{aligned} g_{II}(v,w) &= [w]^T \times [g_{II}] \times [v] \\ &= \left[\begin{array}{cc} w^1 & w^2 \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{cc} 1+4(x^1)^2 & 4x^1x^2 \\ 4x^1x^2 & 1+4(x^2)^2 \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} v^1 \\ v^2 \end{array} \right] \\ &= (1+4(x^1)^2)v^1w^1 + 4x^1x^2(v^1w^2+v^2w^1) + (1+4(x^2)^2)v^2w^2 \qquad (8) \end{aligned}$$

接著考慮另一個 2 維流形 $H = \{(x^1, x^2) : x^1, x^2 \in \mathbb{R} \wedge x^2 > 0\}$ 以及 H 上的以下黎曼度量及其對應矩陣：

$$g_{III} = \frac{1}{(x^2)^2}(dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2) \qquad (9)$$

$$[g_{III}] = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{(x^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(x^2)^2} \end{array} \right] \qquad (10)$$

請注意 (H, g_{III}) 可作為「雙曲幾何」(「非歐幾里得幾何」的一種) 的模型，稱為「龐加萊上半平面模型」(Poincare upper-half plane model)，而 g_{III} 則稱為龐加萊度量(Poincare metric)。利用矩陣乘法，容易求得 g_{III} 對前述兩個 2 維向量場 v 和 w 的作用如下：

$$g_{III}(v,w) = \frac{v^1w^1 + v^2w^2}{(x^2)^2} \qquad (11)$$

根據線性代數，我們可以從點積推得向量的模、夾角等的計算公式，而黎曼度量又如前所述是一般黎曼流形上的點積，因此從黎曼度量可以推得一般黎曼流形上向量模、夾角等的計算公式。設 (M, g) 為黎曼流形，v、w 為 M 上某點處的切向量，則 v 的「模」(以下記作 $\|v\|_g$) 以及 v 與 w 之間的「夾角」(以下記作 $\angle_g(v,w)$) 可用以下公式計算 (以下規定 $\cos^{-1}$ 在 $[0°, 180°]$ 中取值)：

$$\|v\|_g = \sqrt{g(v,v)} \qquad (12)$$

$$\angle_g(v,w) = \cos^{-1}\left(\frac{g(v,w)}{\|v\|\|w\|}\right) \qquad (13)$$

此外，v 與 w 正交 (即垂直) 若 $g(v,w) = 0$。

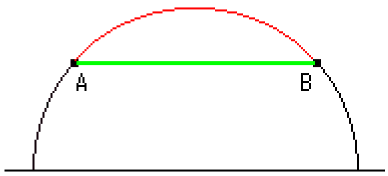
舉例說，考慮黎曼流形 $(\mathbb{R}^2, g_I)$ 上某點處的切向量 $v_I = [1,0]^T$ 和 $w_I = [0,1]^T$。我們知道，在一般歐幾里得幾何下，v_I 和 w_I 都是單位向量，並且這兩個切向量正交；而讀者可自行計算，$\|v_I\|_{g_I} = \|w_I\|_{g_I} = 1$ 並且 $g_I(v_I, w_I) = 0$。由此可見，前面介紹的度量 g_I 正正反映歐幾里得幾何的特性，這就是它稱為「歐幾里得度量」的原因。

接著考慮黎曼流形 $(\mathbb{R}^2, g_{II})$ 以及前述的切向量 v_I 和 w_I。由於 g_{II} 不是歐幾里得度量，並且會隨著 (x^1, x^2) 而變化，我們預期在 $(\mathbb{R}^2, g_{II})$ 上 v_I 和 w_I 的模和夾角會跟上段的結果不同，並且在不同點處會有不同的值。例如在點 $(1,1)$ 處，根據 (8)，可求得 $g(v_I, v_I) = g(w_I, w_I) = 5$ 和 $g(v_I, w_I) = 4$。由此根據 (9) 和 (10)，可得 $\|v_I\| = \|w_I\| = \sqrt{5}$ 和 $\angle(v_I, w_I) = 36.87°$。上述結果顯示，在點 $(1,1)$ 處，v_I 和 w_I 不是單位向量，且非正交。讀者請自行驗證，在點 $(0,0)$ 處，v_I 和 w_I 卻是單位向量，而且正交。

除了計算向量的模外，點積也可用來計算各種幾何量，為簡單起見，以下只介紹曲線的「弧長」。設 $Z : [a,b] \to M;\ t \mapsto Z(t)$ 為 m 維黎曼流形 (M, g) 上某條曲線 c 的參數化形式，則 c 的弧長 (以下記作 $l(c)$) 可用以下公式計算：

$$l(c) = \int_a^b \sqrt{g\left(\frac{dZ}{dt}, \frac{dZ}{dt}\right)}\, dt \qquad (14)$$

在上式中，$\frac{dZ}{dt}$ 應被看成 $Z(t)$ 點處的切向量。前面說過黎曼流形 (H, g_{III}) 可作為雙曲幾何的模型。根據雙曲幾何，此一模型下的「測地線」(geodesic) (即任意兩點之間具有最短弧長的曲線) 是懸垂直線或者以 x^1 軸上的點為圓心的半圓。



舉例說，如果上圖顯示龐加萊上半平面模型的情況，那麼 B 與 A 點之間的測地線不是連接該兩點的綠色直線，而是通過該兩點的紅色圓弧 (而該圓弧是以 x^1 軸上某點為圓心的半圓的一部分)，這即是說紅色圓弧較綠色直線短，此一情況跟歐幾里得幾何中的情況剛好相反。為驗證這一點，首先假設上圖中的半圓是以 $(0,0)$ 點為圓心，半徑為 1 的半圓，其參數化形式如下：

$$Z_{III} : [0, \pi] \to H;\ t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

並假設 B 和 A 點是分別對應著 $t = \frac{\pi}{6}$ 和 $t = \frac{5\pi}{6}$ 的點，即 $B = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ 和 $A = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$。接著運用 (14) 和 (11) 計算上述半圓在 B 與 A 點之間的弧長[3]：

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sqrt{g_{III}\left(\frac{dZ_{III}}{dt}, \frac{dZ_{III}}{dt}\right)}\, dt$$

[3]為計算以下積分，可以應用以下事實：$\frac{1}{\sin t}$ 的「原函數」為 $-\ln|\csc t + \cot t|$。

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sqrt{g_{III}([-\sin t, \cos t]^T, [-\sin t, \cos t]^T)}\, dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sqrt{\frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t}}\, dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{1}{\sin t}\, dt \\
&\approx 2.6339
\end{aligned}
$$

其次寫出從 B 到 A 點的直線的參數化形式如下：

$$
Z_{IV} : [0, 1] \to H;\ \ t \mapsto \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}t, \frac{1}{2} \right)
$$

接著運用 (14) 和 (11) 計算 B 與 A 點之間直線的長度：

$$
\begin{aligned}
& \int_0^1 \sqrt{g_{III}\left(\frac{dZ_{IV}}{dt}, \frac{dZ_{IV}}{dt} \right)}\, dt \\
&= \int_0^1 \sqrt{g_{III}([-\sqrt{3}, 0]^T, [-\sqrt{3}, 0]^T)}\, dt \\
&= \int_0^1 \sqrt{\frac{3+0}{\frac{1}{4}}}\, dt \\
&= \int_0^1 2\sqrt{3}\, dt \\
&\approx 3.4641
\end{aligned}
$$

請讀者自行驗證，在歐幾里得度量 g_I 下，上圖中紅色圓弧的弧長為 $\frac{2\pi}{3} \approx 2.0944$，而綠色直線的長度則為 $\sqrt{3} \approx 1.7321$。上述計算結果顯示，在龐加萊度量下，紅色圓弧較綠色直線短；而在歐幾里得度量下，紅色圓弧則較綠色直線長，由此可見雙曲幾何與歐幾里得幾何的巨大差異。

接下來介紹兩種從已知度量求得新度量的方法，第一種方法只須運用簡單的乘法，這是以下定理的內容。

定理 1：設 g 為流形 M 上的黎曼度量，$f : M \to \mathbb{R}$ 為光滑函數，使得對任何 $x \in M$，都有 $f(x) > 0$，則 fg 也是 M 上的黎曼度量 (其中 fg 代表這樣的 $(0, 2)$ 張量場：若 $g(x) = g_{ij}(x)\, dx^i \otimes dx^j$，則 $fg(x) = f(x)g_{ij}(x)\, dx^i \otimes dx^j$)。

現在讓我們運用上述定理。首先考慮 2 維流形 H 和歐幾里得度量 g_I，g_I 顯然

可以作為 H 的黎曼度量。其次考慮光滑函數 $f: H \to \mathbb{R}$; $f(x^1, x^2) = \frac{1}{(x^2)^2}$。由於對任何 $(x^1, x^2) \in H$，都有 $x^2 > 0$，故必有 $f(x^1, x^2) > 0$。由此根據上述定理，可知 fg_I 也是 H 上的黎曼度量，但

$$
\begin{aligned}
fg_I &= \frac{1}{(x^2)^2} \times (dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2) \\
&= g_{III}
\end{aligned}
$$

由此證得前述的龐加萊度量 g_{III} 確是 H 上的黎曼度量。

第二種方法須應用我們在《數學示例：前推與拉回》中介紹的「前推」和「拉回」運算，這是以下定理的內容 (在以下定理中，ψ_* 和 ψ^* 分別代表 ψ 的前推和拉回)。

定理 2：設 g 為流形 N 上的黎曼度量，$\psi: M \to N$ 是把流形 M 映射到 N 的光滑一一函數，使得於 M 的任何點處，ψ_* 都是一一的，則 $\psi^* g$ 是 M 上的黎曼度量。

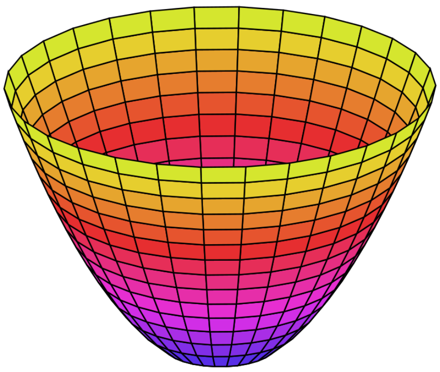
現在讓我們運用上述定理。首先取 3 維流形 $\mathbb{R}^3$ 上的歐幾里得度量：

$$
g_{IV} = dy^1 \otimes dy^1 + dy^2 \otimes dy^2 + dy^3 \otimes dy^3 \qquad (15)
$$

接著引入以下函數：

$$
\psi_{IV}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\ \psi_{IV}(x^1, x^2) = (y^1, y^2, y^3),\ \text{其中} y^1 = x^1,\ y^2 = x^2,\ y^3 = (x^1)^2 + (x^2)^2 \qquad (16)
$$

請注意上述函數的映象是「拋物面」$\{(y^1, y^2, y^3) \in \mathbb{R}^3 : y^3 = (y^1)^2 + (y^2)^2\}$，以下是拋物面的圖象：



容易看到上述函數是光滑一一函數。為方便以下使用「代入法」，我們先從上式求得以下「外導數」：

$$
dy^1 = dx^1, \quad dy^2 = dx^2, \quad dy^3 = 2x^1 dx^1 + 2x^2 dx^2 \qquad (17)
$$

根據我們在《數學示例：前推與拉回》所介紹求前推的方法，對 $\mathbb{R}^2$ 中的任意點 $x=(x^1,x^2)$ 和 x 點處的任意切向量 $[v^1,v^2]^T$，都有 (在以下計算中，$D(\psi_{IV})$ 代表 ψ_{IV} 的「雅可比矩陣」)：

$$\begin{aligned}
\psi_{IV*}[v^1,v^2]^T &= D(\psi_{IV})|_x \times [v^1,v^2]^T \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x^1 & 2x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\
&= [v^1,v^2,2x^1v^1+2x^2v^2]^T
\end{aligned}$$

上式顯示，於 $\mathbb{R}^2$ 的任何點處，ψ_{IV*} 都是一一的。至此證得「定理 2」的前提成立，由此可知「定理 2」的結論必然成立，即 $\psi_{IV}{}^*g_{IV}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的黎曼度量。根據我們在《數學示例：前推與拉回》所介紹求拉回的「代入法」，為求 $\psi_{IV}{}^*g_{IV}$，只需把 (17) 中的 dy^1、dy^2 和 dy^3 代入 (15) 等號右端：

$$\begin{aligned}
& \psi_{IV}{}^*g_{IV} \\
=\; & dx^1\otimes dx^1 + dx^2\otimes dx^2 + (2x_1dx_1+2x_2dx_2)\otimes(2x_1dx_1+2x_2dx_2) \\
=\; & dx^1\otimes dx^1 + dx^2\otimes dx^2 + 4(x^1)^2\,dx^1\otimes dx^1 + 4x^1x^2\,dx^1\otimes dx^2 \\
& +4x^1x^2\,dx^2\otimes dx^1 + 4(x^2)^2\,dx^2\otimes dx^2 \\
=\; & (1+4(x^1)^2)\,dx^1\otimes dx^1 + 4x^1x^2\,(dx^1\otimes dx^2 + dx^2\otimes dx^1) + (1+4(x^2)^2)\,dx^2\otimes dx^2 \\
=\; & g_{II}
\end{aligned}$$

由此證得前述的 g_{II} 確是 $\mathbb{R}^2$ 上的黎曼度量，這也就是 g_{II} 稱為「拋物面度量」的原因。

設 g 為黎曼度量，$[g]$ 為其矩陣。根據線性代數的知識，從 g (以及 $[g]$) 的正定性可以推知 $[g]$ 必是可逆的，即必存在 $[g]^{-1}$。有趣的是，從 $[g]^{-1}$ 可以得到一個光滑 $(2,0)$ 張量場，以下記作 g^{-1}，稱為 g 的逆度量(inverse metric) 或共軛度量(conjugate metric)。為免使符號過於複雜，以下約定在寫出 g^{-1} 的分量時，一律略去 -1，即寫成 g^{ij} (而非 $(g^{-1})^{ij}$)[4]，因此 g^{-1} 具有以下形式：

$$g^{-1} = g^{ij}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes\frac{\partial}{\partial x^j} \qquad (18)$$

可以證明 $[g]^{-1}$ 也是對稱的。以前面討論過的 g_{III} 為例，由於

$$[g_{III}]^{-1} = \begin{bmatrix} (x^2)^2 & 0 \\ 0 & (x^2)^2 \end{bmatrix} \qquad (19)$$

[4]由於 g^{ij} 的指標採上標形式，可知它必定代表 $(2,0)$ 張量場 (而非 $(0,2)$ 張量場) 的分量，因此即使略去 -1，也不會把 g^{ij} 誤作為 $(0,2)$ 張量場 g 的分量。

可知

$$g_{III}{}^{-1} = (x^2)^2 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \qquad (20)$$

由於 $[g]$ 與 $[g]^{-1}$ 互為逆矩陣，我們有以下矩陣等式：

$$[g]^{-1} \times [g] = [g] \times [g]^{-1} = I_m$$

其中 I_m 代表 $m \times m$ 單位矩陣。上述矩陣等式可用張量場分量 (配以求和約定) 寫成以下形式：

$$g^{ik}\, g_{kj} = g_{jk}\, g^{ki} = \delta^i_j \qquad (21)$$

其中 δ^i_j 就是我們在《數學示例：愛恩斯坦求和約定》中介紹的克羅內克 δ 函數，只不過這裡把 i 和 j 分別寫成上、下標形式，其定義跟上述網頁中的 (18) 基本相同，即

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & 若 i = j \\ 0, & 若 i \neq j \end{cases}$$

公式 (21) 是與 δ^i_j 有關的重要公式，以下是與 δ^i_j 有關的另一條重要公式：

$$dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial}{\partial x^j}(dx^i) = \delta^i_j \qquad (22)$$

以下我們將廣泛使用 (21) 和 (22)，請讀者重溫《數學示例：愛恩斯坦求和約定》中介紹與 δ^i_j 和求和約定有關的運算法則。

我們在《數學示例：霍奇星與音樂同構》中介紹了兩個「音樂同構」：「降號」$\flat$ 和「升號」$\sharp$，前者可用來把向量場變換成微分 1 形式，後者則可用來把微分 1 形式變換成向量場。有趣的是，上述兩個變換可分別用黎曼度量 g 及其逆度量 g^{-1} 來表示。設 g 為流形 M 的黎曼度量，$v = v^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ 和 $w = w^l \frac{\partial}{\partial x^l}$ 為 M 上的任意向量場，那麼我們有

$$\flat v(w) = g(v, w) \qquad (23)$$

上式是合理的，因為在等號左端，把微分 1 形式 $\flat v$ 作用於向量場 w，所得結果是一個實值函數；而在等號右端，把 $(0, 2)$ 張量場 g 作用於兩個向量場 v 和 w，所得結果也是一個實值函數。接下來讓我們用上式求 $\flat v$ 的分量。一方面，由於 $\flat v$ 是微分 1 形式，它應具有 $\flat v = v_k\, dx^k$ 的形式，其中 v_k 是 $\flat v$ 的待定分量[5]。現在把 $\flat v$ 作用於 w，可得

$$\flat v(w) \;\; = \;\; v_k\, dx^k \left(w^l \frac{\partial}{\partial x^l} \right)$$

[5]根據上述網頁，把 $\flat$ 和 $\sharp$ 分別作用於向量場 v 和微分 1 形式 α，所得結果 $\flat v$ 和 $\sharp\alpha$ 的分量分別等於 v 和 α 的原有分量，但此一簡單結果只適用於 g 是歐幾里得度量的情況。當 g 不是歐幾里得度量時，$\flat v$ 和 $\sharp\alpha$ 的分量不一定等於 v 和 α 的原有分量。

$$\begin{aligned} &= v_k w^l \, \delta^k_l \\ &= v_l w^l \end{aligned}$$

另一方面，把 $g = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$ 作用於 v 和 w，可得

$$\begin{aligned} g(v, w) &= g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j \left(v^k \frac{\partial}{\partial x^k}, w^l \frac{\partial}{\partial x^l} \right) \\ &= g_{ij}\, v^k w^l \, dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right) \times dx^j \left(\frac{\partial}{\partial x^l} \right) \\ &= g_{ij}\, v^k w^l \, \delta^i_k \, \delta^j_l \\ &= g_{kl}\, v^k w^l \end{aligned}$$

從 (23) 和以上計算結果，可得

$$v_l = g_{kl}\, v^k \qquad (24)$$

上式提供了 $\flat v$ 的分量 v_l 的計算公式。舉例說，設 $v = [v^1, v^2]^T$ 為 2 維黎曼流形 (H, g_{III}) 上的向量場，那麼根據上式，

$$\begin{aligned} \flat v &= [(g_{III})_{k1}\, v^k, (g_{III})_{k2}\, v^k] \\ &= \left[\frac{v^1}{(x^2)^2}, \frac{v^2}{(x^2)^2} \right] \end{aligned}$$

現設 g^{-1} 為 g 的逆度量，$\alpha = \alpha_k\, dx^k$ 和 $\beta = \beta_l\, dx^l$ 為 M 上的任意微分 1 形式，那麼我們有

$$\beta(\sharp\alpha) = g^{-1}(\beta, \alpha) \qquad (25)$$

上式也是合理的，因為在等號左端，把微分 1 形式 β 作用於向量場 $\sharp\alpha$，所得結果是一個實值函數；而在等號右端，把 $(2, 0)$ 張量場 g^{-1} 作用於兩個微分 1 形式 β 和 α，所得結果也是一個實值函數。接下來讓我們用上式求 $\sharp\alpha$ 的分量。一方面，由於 $\sharp\alpha$ 是向量場，它應具有 $\sharp\alpha = \alpha^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ 的形式，其中 α^k 是 $\sharp\alpha$ 的待定分量。現在把 β 作用於 $\sharp\alpha$，可得

$$\begin{aligned} \beta(\sharp\alpha) &= \beta_l\, dx^l \left(\alpha^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \\ &= \alpha^k \beta_l \, \delta^l_k \\ &= \alpha^l \beta_l \end{aligned}$$

另一方面，把 $g^{-1} = g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$ 作用於 β 和 α，可得

$$\begin{aligned} g^{-1}(\beta, \alpha) &= g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\beta_l\, dx^l, \alpha_k\, dx^k \right) \\ &= g^{ij} \alpha_k \beta_l \frac{\partial}{\partial x^i}(dx^l) \times \frac{\partial}{\partial x^j}(dx^k) \\ &= g^{ij} \alpha_k \beta_l \, \delta^l_i \, \delta^k_j \\ &= g^{lk} \alpha_k \beta_l \end{aligned}$$

從 (25) 和以上計算結果，可得

$$\alpha^l = g^{lk}\,\alpha_k \qquad (26)$$

上式提供了 $\sharp\alpha$ 的分量 α^l 的計算公式。舉例說，設 $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2]$ 為 2 維黎曼流形 (H, g_{III}) 上的微分 1 形式，那麼根據上式 (請注意以下計算要應用 $[g_{III}]^{-1}$，即 (19))，

$$\begin{aligned} \sharp\alpha &= [(g_{III})^{1k}\,\alpha_k, (g_{III})^{2k}\,\alpha_k]^T \\ &= [(x^2)^2\alpha_1, (x^2)^2\alpha_2]^T \end{aligned}$$

前面說過，黎曼度量 g 及其逆度量 g^{-1} 可分別用來表示降號 $\flat$ 和升號 $\sharp$ 運算，這一點可從公式 (24) 和 (26) 直觀地看到。從 (24) 可以看到，把 g_{kl} 作用於 v^k，其結果是用 g_{kl} 的下標 k「抵消」了 v 的上標 k，並把 v 的原有上標 k「降」為下標 l。類似地，從 (26) 可以看到，把 g^{lk} 作用於 α_k，其結果是用 g^{lk} 的上標 k「抵消」了 α 的下標 k, 並把 α 的原有下標 k「升」為上標 l。

連結至數學專題
連結至周家發網頁