

數學示例：降階法

我們在《數學示例：積分／和分因子》中介紹了用「積分／和分因子」求解 1 階變係數線性常微分／差分方程的方法，這些方法並不適用於較高階的方程。但在某些情況下，如果已知某個 2 階方程的一個解，我們可以透過把該方程化約為 1 階方程，然後便可用積分／和分因子來求解這個 1 階方程，並從而得到原方程的通解。這種方法原則上還能在已知某個 n 階方程的一個解的情況下，把該方程迭次化約為 $n - 1$ 階、...、2 階、1 階方程，從而最終得到原方程的通解，故稱**降階法**(reduction of order method)¹。

首先討論具有以下形式的 2 階齊次常微分／差分方程：

$$k_2(x)\phi^2 f(x) + k_1(x)\phi f(x) + k_0(x)f(x) = 0 \quad (1)$$

其中 ϕ 代表算子 D 或 Δ 。請注意這裡討論的差分方程是以 Δ 而非 E 表示的差分方程，這是因為以下介紹的降階法須應用 Δ 的一種與 D 很相似的性質。假設 $f(x)$ 是待求的 (1) 的通解，並且已知 $f_1(x)$ 是 (1) 的一個解。由於 $f(x)$ 包含著與 $f_1(x)$ 線性獨立的部分， $f(x)$ 與 $f_1(x)$ 必也線性獨立， $\frac{f(x)}{f_1(x)}$ 必不等於一個常數，而是一個函數 $g(x)$ ，由此有以下關係：

$$f(x) = f_1(x)g(x) \quad (2)$$

接下來要求 $g(x)$ 。由於當 $\phi = D$ 和 $\phi = \Delta$ 時，其結果略有不同，以下分開討論。

首先討論 $\phi = D$ 的情況。由於假設 $f(x)$ 是 (1) 的通解，把它代入 (1) 應得到 0。但在代入前，須先運用算子 D 的積法則進行以下計算：

$$Df(x) = Df_1(x) \times g(x) + f_1(x) \times Dg(x) \quad (3)$$

$$D^2 f(x) = D^2 f_1(x) \times g(x) + 2Df_1(x) \times Dg(x) + f_1(x) \times D^2 g(x) \quad (4)$$

¹ 「降階法」一名其實有廣狹二義，廣義下的降階法泛指任何能把某 n 階方程轉化為較低階方程以方便求解的方法，狹義下的降階法則是指本文介紹的一種特殊求解方法。

把 (2)、(3) 和 (4) 代入 (1) (須把其中的 ϕ 改為 D)，並加以整理，可得到下式：

$$k_2(x)f_1(x)D^2g(x) + (2k_2(x)Df_1(x) + k_1(x)f_1(x))Dg(x) + (k_2(x)D^2f_1(x) + k_1(x)Df_1(x) + k_0(x)f_1(x))g(x) = 0$$

由於假設 $f_1(x)$ 是 (1) 的一個解，上面第三項必等於 0，由此可知 $g(x)$ 必滿足以下以 $g(x)$ 為未知函數的 2 階齊次方程：

$$k_2(x)f_1(x)D^2g(x) + (2k_2(x)Df_1(x) + k_1(x)f_1(x))Dg(x) = 0 \quad (5)$$

但上式只包含 $D^2g(x)$ 和 $Dg(x)$ 的項而欠缺 $g(x)$ 項，如果設定

$$Dg(x) = h(x) \quad (6)$$

便可把 (5) 改寫成以下以 $h(x)$ 為未知函數的 1 階齊次方程：

$$k_2(x)f_1(x)Dh(x) + (2k_2(x)Df_1(x) + k_1(x)f_1(x))h(x) = 0 \quad (7)$$

接下來只須運用積分因子 (或其他方法) 從上述方程解出 $h(x)$ ，然後便可從前面的設定 (即 (6)) 解出 $g(x)$ ，最後運用 (2)，便可求得 (1) 的通解 $f(x)$ 。

以下讓我們用上述方法求解某些 2 階柯西-歐拉微分方程。根據我們在《數學示例：積分／和分因子》中的討論，若某 2 階柯西-歐拉微分方程的輔助方程有相異實數根或共軛複數根，容易確定該方程的通解。但若有關輔助方程的根為二重實數根，就只能確定該微分方程的一個解，這時便要運用降階法求它的通解。

舉例說，考慮以下 2 階柯西-歐拉微分方程：

$$x^2D^2f(x) - 3xDf(x) + 4f(x) = 0, \quad x \in (0, \infty) \quad (8)$$

根據上述網頁的 (20)，上述方程的輔助方程及其因式分解形式為

$$\begin{aligned} t^2 - 4t + 4 &= 0 \\ (t - 2)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

上述方程有一個二重實數根 2，由此根據上述網頁的 (25)，可知 (8) 的一個解為 $f_1(x) = x^2$ ，並且有 $Df_1(x) = 2x$ 。根據上面的 (2)，現設 (8) 的通解為

$$f(x) = x^2g(x) \quad (10)$$

設定 $Dg(x) = h(x)$ ，並把 x^2 、 $-3x$ 、 x^2 和 $2x$ 分別代入 (7) 左端的 $k_2(x)$ 、 $k_1(x)$ 、 $f_1(x)$ 和 $Df_1(x)$ ，可得：

$$\begin{aligned} (x^2 \times x^2)Dh(x) + (2 \times x^2 \times 2x + (-3x) \times x^2)h(x) \\ = x^4Dh(x) + x^3h(x) \end{aligned}$$

把上面最後一行除以 x^3 (這是可以的, 因為我們規定了 $x \in (0, \infty)$ 此一條件), 便可得到以下以 $h(x)$ 為未知函數的 1 階方程:

$$xDh(x) + h(x) = 0, \quad x \in (0, \infty) \quad (11)$$

接下來可以用積分因子, 或者單憑觀察, 把上式改寫並進而求解:

$$\begin{aligned} D(xh(x)) &= 0 \\ xh(x) &= c_1 \\ h(x) &= \frac{c_1}{x} \end{aligned} \quad (12)$$

把上述結果代入 $Dg(x) = h(x)$, 並繼續求解:

$$\begin{aligned} Dg(x) &= \frac{c_1}{x} \\ g(x) &= c_1 \ln x + c_2 \end{aligned} \quad (13)$$

最後運用 (10), 便可求得 (8) 的通解如下:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2(c_1 \ln x + c_2) \\ &= c_1 x^2 \ln x + c_2 x^2 \end{aligned} \quad (14)$$

接著討論 $\phi = \Delta$ 的情況。類似前面的情況, 我們先假設 (2), 並運用算子 Δ 的積法則進行以下計算 (以下計算應用了 $E\Delta = \Delta E$ 此一事實)²:

$$\Delta f(x) = \Delta f_1(x) \times g(x) + Ef_1(x) \times \Delta g(x) \quad (15)$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta^2 f_1(x) \times g(x) + 2\Delta Ef_1(x) \times \Delta g(x) + E^2 f_1(x) \times \Delta^2 g(x) \quad (16)$$

把 (2)、(15) 和 (16) 代入 (1) (須把其中的 ϕ 改為 Δ), 並加以整理, 可得到下式:

$$\begin{aligned} &k_2(x)E^2 f_1(x)\Delta^2 g(x) + (2k_2(x)\Delta Ef_1(x) + k_1(x)Ef_1(x))\Delta g(x) \\ &+ (k_2(x)\Delta^2 f_1(x) + k_1(x)\Delta f_1(x) + k_0(x)f_1(x))g(x) = 0 \end{aligned}$$

由於假設 $f_1(x)$ 是 (1) 的一個解, 上面第三項必等於 0, 由此可知 $g(x)$ 必滿足以下以 $g(x)$ 為未知函數的 2 階齊次方程:

$$k_2(x)E^2 f_1(x)\Delta^2 g(x) + (2k_2(x)\Delta Ef_1(x) + k_1(x)Ef_1(x))\Delta g(x) = 0 \quad (17)$$

但上式只包含 $\Delta^2 g(x)$ 和 $\Delta g(x)$ 的項而欠缺 $g(x)$ 項, 如果設定

$$\Delta g(x) = h(x) \quad (18)$$

²對任何函數 $f(x)$, 都有 $E\Delta f(x) = f(x+2) - f(x+1)$ 並且 $\Delta Ef(x) = f(x+2) - f(x+1)$, 故有 $E\Delta = \Delta E$ 。

便可把 (17) 改寫成以下以 $h(x)$ 為未知函數的 1 階齊次方程：

$$k_2(x)E^2f_1(x)\Delta h(x) + (2k_2(x)\Delta Ef_1(x) + k_1(x)Ef_1(x))h(x) = 0 \quad (19)$$

接下來只須運用和分因子 (或其他方法) 從上述方程解出 $h(x)$, 然後便可從前面的設定 (即 (18)) 解出 $g(x)$, 最後運用 (2), 便可求得 (1) 的通解 $f(x)$ ³。

接下來讓我們用上述方法求解以下 2 階柯西-歐拉差分方程：

$$(x+1)^2\Delta^2f(x) - 3x\Delta f(x) + 4f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{N} \quad (20)$$

根據《數學示例：積分／和分因子》，上述方程與 (8) 有相同的輔助方程 (9) 和二重實數根 2, 由此根據上述網頁的 (41), 可知 (20) 的一個解為 $f_1(x) = (x+1)^2$, 並且有 $Ef_1(x) = (x+2)^2$, $E^2f_1(x) = (x+3)^2$ 和 $\Delta Ef_1(x) = 2(x+2)$ 。現設 (20) 的通解為

$$f(x) = (x+1)^2g(x) \quad (21)$$

設定 $\Delta g(x) = h(x)$, 並把 $(x+1)^2$ 、 $-3x$ 、 $(x+2)^2$ 、 $(x+3)^2$ 和 $2(x+2)$ 分別代入 (19) 左端的 $k_2(x)$ 、 $k_1(x)$ 、 $Ef_1(x)$ 、 $E^2f_1(x)$ 和 $\Delta Ef_1(x)$, 可得：

$$\begin{aligned} & ((x+1)^2 \times (x+3)^2 \Delta h(x) + (2 \times (x+1)^2 \times 2(x+2) + (-3x) \times (x+2)^2) h(x)) \\ &= (x+3)^4 \Delta h(x) + (x+2)^3 h(x) \end{aligned}$$

把上面最後一行除以 $(x+2)^3$ (這是可以的, 因為我們規定了 $x \in \mathbb{N}$ 此一條件), 便可得到以下以 $h(x)$ 為未知函數的 1 階方程：

$$(x+3)\Delta h(x) + h(x) = 0, \quad x \in \mathbb{N} \quad (22)$$

接下來可以利用 $\Delta = E - I$ 此一關係把上式改寫成 $(x+3)Eh(x) - (x+2)h(x) = 0$, 然後利用和分因子, 或者單憑觀察, 把上式改寫並進而求解：

$$\begin{aligned} \Delta((x+2)h(x)) &= 0 \\ (x+2)h(x) &= c_1 \\ h(x) &= c_1(x+1)^{-1} \end{aligned} \quad (23)$$

把上述結果代入 $\Delta g(x) = h(x)$, 並繼續求解：

$$\begin{aligned} \Delta g(x) &= c_1(x+1)^{-1} \\ g(x) &= c_1\psi(x+2) + c_2 \end{aligned} \quad (24)$$

³2 階差分方程其實還有另一種也稱為「降階法」的求解方法, 但由於這種方法不能推廣至更高階的差分方程, 本文不作介紹。

最後運用 (21)，便可求得 (20) 的通解如下：

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)^2(c_1\psi(x+2) + c_2) \\ &= c_1(x+1)^2\psi(x+2) + c_2(x+1)^2 \end{aligned} \quad (25)$$

給定某個更高階 (設為 n 階) 的齊次方程，如果知道它的一個解，原則上也可應用上述降階法從該方程推導出一個 $n-1$ 階齊次方程。但由於我們不一定懂得如何求解這個方程，所以不一定能通過這個方法找出該方程的通解。不過，在某些特殊情況下，上述方法是可行的，以下讓我們求解兩個 3 階柯西-歐拉方程。

首先考慮以下 3 階柯西-歐拉微分方程：

$$x^3 D^3 f(x) + x D f(x) - f(x) = 0, \quad x \in (0, \infty) \quad (26)$$

根據《數學示例：積分／和分因子》的 (53)，上述方程的輔助方程及其因式分解形式為

$$\begin{aligned} t^3 - 3t^2 + 3t - 1 &= 0 \\ (t-1)^3 &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

上述方程有一個三重實數根 1，由此根據上述網頁的 (25)，可知 (26) 的一個解為 $f_1(x) = x$ 。現設 (26) 的通解為：

$$f(x) = xg(x) \quad (28)$$

運用 D 的積法則，我們有

$$Df(x) = g(x) + xDg(x) \quad (29)$$

$$D^2 f(x) = 2Dg(x) + xD^2 g(x) \quad (30)$$

$$D^3 f(x) = 3D^2 g(x) + xD^3 g(x) \quad (31)$$

把 (28) - (31) 代入 (26)，並加以整理，可得

$$x^4 D^3 g(x) + 3x^3 D^2 g(x) + x^2 Dg(x) = 0$$

把上式除以 x^2 ，並設定 $Dg(x) = h(x)$ ，可得到以下 2 階柯西-歐拉微分方程：

$$x^2 D^2 h(x) + 3x Dh(x) + h(x) = 0, \quad x \in (0, \infty) \quad (32)$$

根據《數學示例：積分／和分因子》的 (20)，上述方程的輔助方程及其因式分解形式為

$$\begin{aligned} t^2 + 2t + 1 &= 0 \\ (t+1)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

上述方程有一個二重實數根 -1 ，由此根據上述網頁的 (25)，可知 (32) 的一個解為 $h_1(x) = x^{-1}$ 。

接著使用前面介紹的降階法求 (32) 的通解 $h(x)$ 。為此，首先注意到 $Dh_1(x) = -x^{-2}$ ，並且設定

$$h(x) = x^{-1}l(x) \quad (34)$$

接著設定 $Dl(x) = m(x)$ ，並把 x^2 、 $3x$ 、 x^{-1} 和 $-x^{-2}$ 分別代入 (7) 左端的 $k_2(x)$ 、 $k_1(x)$ 、 $f_1(x)$ 和 $Df_1(x)$ (須把 (7) 中的 $h(x)$ 改為 $m(x)$)：

$$\begin{aligned} & (x^2 \times x^{-1})Dm(x) + (2 \times x^2 \times (-x^{-2}) + (3x) \times x^{-1})m(x) \\ &= xDm(x) + m(x) \end{aligned}$$

由此得到以下的 1 階方程：

$$xDm(x) + m(x) = 0, \quad x \in (0, \infty) \quad (35)$$

由於上式跟 (11) 非常相似 (只須把 (11) 中的 $h(x)$ 換成 $m(x)$ 便可得到上式)，因此可以沿用前面的計算結果 (12) 和 (13)：

$$m(x) = \frac{c_1}{x} \quad (36)$$

$$l(x) = c_1 \ln x + c_2 \quad (37)$$

運用 (34)，可求得

$$\begin{aligned} h(x) &= x^{-1}(c_1 \ln x + c_2) \\ &= c_1 x^{-1} \ln x + c_2 x^{-1} \end{aligned} \quad (38)$$

至此求得 (32) 的通解 $h(x)$ ，把這個結果代入 $Dg(x) = h(x)$ ，並繼續求解：

$$\begin{aligned} Dg(x) &= c_1 x^{-1} \ln x + c_2 x^{-1} \\ g(x) &= \frac{1}{2}c_1(\ln x)^2 + c_2 \ln x + c_3 \end{aligned} \quad (39)$$

最後運用 (28)，便可求得

$$\begin{aligned} f(x) &= x \left(\frac{1}{2}c_1(\ln x)^2 + c_2 \ln x + c_3 \right) \\ &= \frac{1}{2}c_1 x(\ln x)^2 + c_2 x \ln x + c_3 x \end{aligned}$$

把上式中的 $\frac{1}{2}c_1$ 改寫成另一任意常數 c_4 ，可以把 (26) 的通解寫成以下更簡潔的形式：

$$f(x) = c_4 x(\ln x)^2 + c_2 x \ln x + c_3 x \quad (40)$$

接下來考慮以下 3 階柯西-歐拉差分方程：

$$(x+2)^3 \Delta^3 f(x) + x \Delta f(x) - f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{N} \quad (41)$$

根據《數學示例：積分／和分因子》，上述方程與 (26) 有相同的輔助方程和三重實數根 1，由此根據上述網頁的 (41)，可知 (41) 的一個解為 $f_1(x) = x$ 。現設 (41) 的通解為

$$f(x) = xg(x) \quad (42)$$

運用 Δ 的積法則，我們有：

$$\Delta f(x) = g(x) + (x+1)\Delta g(x) \quad (43)$$

$$\Delta^2 f(x) = 2\Delta g(x) + (x+2)\Delta^2 g(x) \quad (44)$$

$$\Delta^3 f(x) = 3\Delta^2 g(x) + (x+3)\Delta^3 g(x) \quad (45)$$

把 (42) - (45) 代入 (41)，並加以整理，可得

$$(x+3)^4 \Delta^3 g(x) + 3(x+2)^3 \Delta^2 g(x) + (x+1)^2 \Delta g(x) = 0$$

把上式除以 $(x+1)^2$ ，並設定 $\Delta g(x) = h(x)$ ，可得到以下 2 階差分方程：

$$(x+3)^2 \Delta^2 h(x) + 3(x+2)\Delta h(x) + h(x) = 0, \quad x \in \mathbb{N} \quad (46)$$

以上方程跟以下這個 2 階柯西-歐拉差分方程很相似：

$$(x+1)^2 \Delta^2 h(x) + 3x\Delta h(x) + h(x) = 0, \quad x \in \mathbb{N} \quad (47)$$

事實上，(46) 是把 (47) 變係數中的 x 加 2 而得的結果。可以證明，如果 $h(x)$ 是 (47) 的解，那麼 $h(x+2)$ 就是 (46) 的解。根據《數學示例：積分／和分因子》，(47) 與 (32) 有相同的輔助方程和二重實數根 -1 ，由此根據上述網頁的 (41)，可知 (47) 的一個解為 $h(x) = (x-2)^{-1}$ ，由此得 (46) 的一個解為 $h_1(x) = h(x+2) = x^{-1}$ 。

接著使用前面介紹的降階法求 (46) 的通解 $h(x)$ 。為此，首先注意到 $Eh_1(x) = (x+1)^{-1}$ ， $E^2 h_1(x) = (x+2)^{-1}$ 和 $\Delta Eh_1(x) = -(x+1)^{-2}$ ，並且設定

$$h(x) = x^{-1}l(x) \quad (48)$$

接著設定 $\Delta l(x) = m(x)$ ，並把 $(x+3)^2$ 、 $3(x+2)$ 、 $(x+1)^{-1}$ 、 $(x+2)^{-1}$ 和 $-(x+1)^{-2}$ 分別代入 (19) 左端的 $k_2(x)$ 、 $k_1(x)$ 、 $Ef_1(x)$ 、 $E^2 f_1(x)$ 和 $\Delta Ef_1(x)$ (須把 (19) 中的 $h(x)$ 改為 $m(x)$)：

$$\begin{aligned} & ((x+3)^2 \times (x+2)^{-1})\Delta m(x) \\ & + (2 \times (x+3)^2 \times (-(x+1)^{-2}) + 3(x+2) \times (x+1)^{-1})m(x) \\ = & (x+2)\Delta m(x) + m(x) \end{aligned}$$

由此得到以下的 1 階方程：

$$(x+2)\Delta m(x) + m(x) = 0, \quad x \in \mathbb{N} \quad (49)$$

接下來可以利用 $\Delta = E - I$ 此一關係把上式改寫成 $(x+2)Em(x) - (x+1)m(x) = 0$ ，然後利用和分因子，或者單憑觀察，把上式改寫並進而求解：

$$\begin{aligned} \Delta((x+1)m(x)) &= 0 \\ (x+1)m(x) &= c_1 \\ m(x) &= c_1 x^{-1} \end{aligned} \quad (50)$$

把上述結果代入 $\Delta l(x) = m(x)$ ，並繼續求解：

$$\begin{aligned} \Delta l(x) &= c_1 x^{-1} \\ l(x) &= c_1 \psi(x+1) + c_2 \end{aligned} \quad (51)$$

運用 (48)，可求得

$$\begin{aligned} h(x) &= x^{-1}(c_1 \psi(x+1) + c_2) \\ &= c_1 x^{-1} \psi(x+1) + c_2 x^{-1} \end{aligned} \quad (52)$$

至此求得 (46) 的通解 $h(x)$ ，把這個結果代入 $\Delta g(x) = h(x)$ ，並繼續求解：

$$\begin{aligned} \Delta g(x) &= c_1 x^{-1} \psi(x+1) + c_2 x^{-1} \\ g(x) &= c_1 \left(\sum x^{-1} \psi(x+1) \right) + c_2 \psi(x+1) + c_3 \end{aligned} \quad (53)$$

為求上式第一項的和分運算的結果，要應用以下與「雙伽瑪函數」 $\psi(x)$ 和「三伽瑪函數」 $\psi_1(x)$ 有關的結果 (以下兩式分別來自《數學示例：積分／和分運算法則》中的 (22) 和 (27)，須把其中的 h 設定為 1)：

$$\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x} \quad (54)$$

$$\sum (x^{-1})^2 = -\psi_1(x+1) \quad (55)$$

接著用分部和分法求 $\sum x^{-1} \psi(x+1)$ 。為此，設定 $u(x) = \psi(x+1)$ ， $\Delta v(x) = x^{-1}$ ，由此有 $\Delta u(x) = x^{-1}$ ， $v(x) = \psi(x+1)$ 。接著運用上述網頁中的「定理 3」，便可求得

$$\begin{aligned} \sum x^{-1} \psi(x+1) &= (\psi(x+1))^2 - \sum x^{-1} \psi(x+2) \\ &= (\psi(x+1))^2 - \sum x^{-1} (\psi(x+1) + x^{-1}) \\ &= (\psi(x+1))^2 - \sum x^{-1} \psi(x+1) - \sum (x^{-1})^2 \\ 2 \times \sum x^{-1} \psi(x+1) &= (\psi(x+1))^2 + \psi_1(x+1) \\ \sum x^{-1} \psi(x+1) &= \frac{1}{2} ((\psi(x+1))^2 + \psi_1(x+1)) \end{aligned} \quad (56)$$

把上述結果代入 (53)，便可求得

$$g(x) = \frac{1}{2}c_1((\psi(x+1))^2 + \psi_1(x+1)) + c_2\psi(x+1) + c_3 \quad (57)$$

最後運用 (42)，便可求得

$$\begin{aligned} f(x) &= x \left(\frac{1}{2}c_1((\psi(x+1))^2 + \psi_1(x+1)) + c_2\psi(x+1) + c_3 \right) \\ &= \frac{1}{2}c_1x((\psi(x+1))^2 + \psi_1(x+1)) + c_2x\psi(x+1) + c_3x \end{aligned}$$

把上式中的 $\frac{1}{2}c_1$ 改寫成另一任意常數 c_4 ，可以把 (41) 的通解寫成以下更簡潔的形式：

$$f(x) = c_4x((\psi(x+1))^2 + \psi_1(x+1)) + c_2x\psi(x+1) + c_3x \quad (58)$$

以上例子顯示，隨著柯西-歐拉差分方程的「階」增加，其計算會越益繁複，而且將涉及「多伽瑪函數」序列的更多成員 $\psi(x)$ 、 $\psi_1(x)$ 、 $\psi_2(x)$ 等等。

連結至數學專題
連結至周家發網頁