數學示例：前推與拉回

我們在《數學示例：k 向量與 k 餘向量》中介紹了 k 向量、k 餘向量、k 向量場和微分 k 形式。不同流形上的這些數學對象互不相干，但在某些應用中，我們需要把某一流形某一點處的 k 向量／ k 餘向量轉化為另一流形某一點處的同類數學對象，或者把某一流形的 k 向量場／微分 k 形式轉化為另一流形上的同類數學對象，本文主旨是介紹進行這種轉化的兩種運算－前推與拉回。以下只介紹 $k > 0$ 的情況下的前推與拉回。

不過，為實現上述轉化，首先要有兩個流形上的點之間的轉化，即數學上常見的函數關係。由於接下來要對這些函數進行導數運算，以下假設這些函數都是可微的。舉例說，以下便是把 $\mathbb{R}^2$ 映射到 $\mathbb{R}^3$ 的可微函數：

$$\psi_I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\ \ \psi_I(y_1, y_2) = (y_1 + y_2, y_1 - y_2, y_1 y_2) \qquad (1)$$

這個函數把 $\mathbb{R}^2$ 上的點 $(-2, 3)$ 映射為 $\mathbb{R}^3$ 上的點 $(1, -5, -6)$。為清晰區分不同流形，以下使用不同符號來代表函數定義域和對應域上的可變點，以上面的 ψ_I 為例，我們用 (y_1, y_2) 來代表定義域 $\mathbb{R}^2$ 上的可變點，並用 (x_1, x_2, x_3) 來代表對應域 $\mathbb{R}^3$ 上的可變點，因此上式右端可以看成下式的簡寫：

$$\psi_I(y_1, y_2) = (x_1, x_2, x_3),\ \text{其中}\ x_1 = y_1 + y_2,\ x_2 = y_1 - y_2,\ x_3 = y_1 y_2 \qquad (2)$$

一般地，給定 m 維流形 M 和 n 維流形 N 上的點之間的函數 $\psi : M \to N$，可以把 M 上的點 p 映射為 N 上的點 $\psi(p)$。如用 $(y_1, \ldots, y_m)$ 代表 M 上的可變點，並用 $(x_1, \ldots, x_n)$ 代表 N 上的可變點，那麼可以把這個函數寫成以下形式：

$$\begin{aligned} \psi : M \to N; \quad & \psi(y_1, \ldots, y_m) = (x_1, \ldots, x_n),\ \text{其中} \\ & x_1 = x_1(y_1, \ldots, y_m),\ \ldots,\ x_n = x_n(y_1, \ldots, y_m) \end{aligned} \qquad (3)$$

上式第二行各個等號左端的 x_i $(1 \leq x_i \leq n)$ 代表 N 上可變點的第 i 個坐標，等號右端的 x_i 則代表第 i 坐標依賴於 y_1、...、y_m 的函數關係。換句話說，這些 (等號右端的) x_i 可被看成包含 m 個輸入和 n 個輸出的函數 ψ 的第 i 個「分量」(component)，而這些分量中的每一個本身又是一個包含 m 個輸入和 1 個輸出的函數。

我們知道，於點 p 和 $\psi(p)$ 處各自「寄生」著兩個 k 切空間 $\bigwedge^k T_pM$ 和 $\bigwedge^k T_{\psi(p)}N$，而這兩個 k 切空間各自包含著眾多 k 切向量。現在我們的問題是，能否從 ψ 推導出一個把 $\bigwedge^k T_pM$ 中的 k 切向量映射為 $\bigwedge^k T_{\psi(p)}N$ 中 k 切向量的函數？答案是肯定的，流形分析把此一函數稱為 ψ 的前推(pushforward)，記作 ψ_* (這裡的 $*$ 號是處於下標位置)。換句話說，透過引入前推概念，我們從函數 $\psi : M \to N$ 推導出另一個函數 $\psi_* : \bigwedge^k T_pM \to \bigwedge^k T_{\psi(p)}N$。

接下來看如何定義和計算 ψ_*。但在此之前，須先介紹一個特殊矩陣。設有如 (3) 所示的函數 ψ，那麼如前所述，ψ 可被看成由 n 個分量 x_1、...、x_n 組成。由於這些分量中的每一個都是可微函數，我們可以求它們關於 y_1、...、y_m 的偏導數，從而求得 ψ 的雅可比矩陣(Jacobian matrix)，這是指以下的 $n \times m$ 矩陣：

$$D(\psi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_m} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

在流形分析中，可以利用下式計算 $\psi_*(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k)$ (其中 $v_1, \ldots, v_k \in T_pM$)：

$$\psi_*(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) = (D(\psi)|_p \times v_1) \wedge \ldots \wedge (D(\psi)|_p \times v_k) \qquad (5)$$

在上式中，$D(\psi)|_p$ 代表把 p 點的坐標代入 $D(\psi)$ 中的變項所得到的不含變項的矩陣，$\times$ 號代表矩陣乘法 (這裡把 T_pM 中的切向量看成列矩陣)。

以前面討論過的 ψ_I 為例，如 (2) 所示，這個函數可被看成由 3 個分量組成。由此可知 ψ_I 的雅可比矩陣 $D(\psi_I)$ 是一個 3×2 矩陣，根據 (4)，可求得

$$D(\psi_I) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ y_2 & y_1 \end{bmatrix}$$

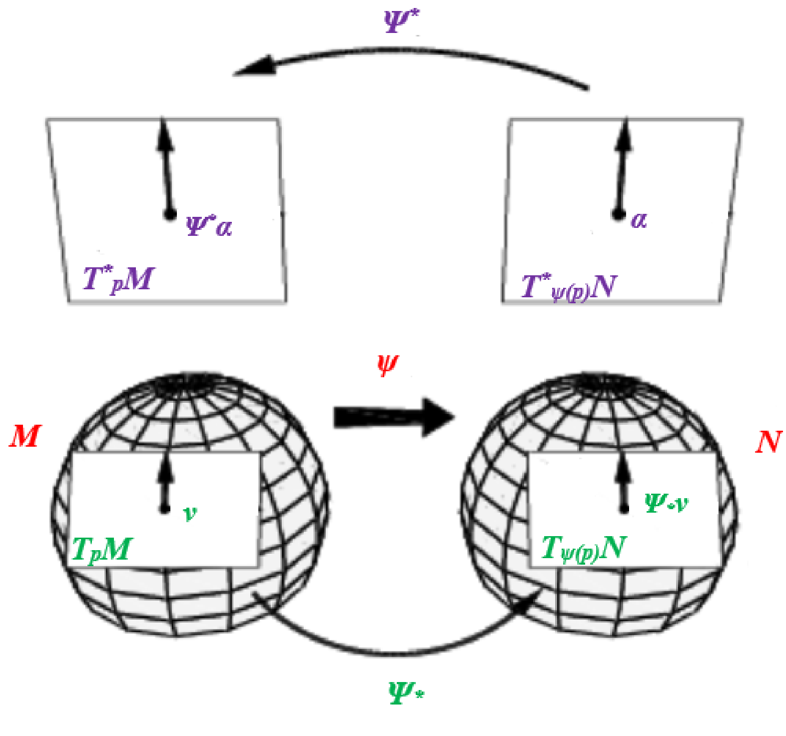
現考慮 $\mathbb{R}^2$ 上的點 $(-2, 3)$ 以及切空間 $T_{(-2,3)}\mathbb{R}^2$ 中的切向量 $[7, -8]^T$，根據前面的討論，前推 $(\psi_I)_*$ 把這個切向量映射為切空間 $T_{(1,-5,-6)}\mathbb{R}^3$ 中的切向量 $(\psi_I)_*[7, -8]^T$[1]，我們可以用 (5) 進行以下計算：

$$\begin{aligned} (\psi_I)_*[7, -8]^T &= D(\psi_I)|_{(-2,3)} \times [7, -8]^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \end{bmatrix} \\ &= [-1, 15, 37]^T \end{aligned}$$

[1]為免使用過多括號，這裡沿用流形分析的習慣，把前推 ψ_* 作用於切向量 v 的結果寫作 $\psi_* v$，而非 $\psi_*(v)$，除非 v 是一個複雜的數式。

於點 p 和 $\psi(p)$ 處除了 k 切空間外，還各自「寄生」著兩個 k 餘切空間 $\bigwedge^k T_p^*M$ 和 $\bigwedge^k T_{\psi(p)}^*N$，而這兩個 k 餘切空間各自包含著眾多 k 餘切向量。現在我們的問題是，能否從 ψ 推導出一個把 $\bigwedge^k T_{\psi(p)}^*N$ 中的 k 餘切向量映射為 $\bigwedge^k T_p^*M$ 中 k 餘切向量的函數？答案是肯定的，流形分析把此一函數稱為 ψ 的拉回(pullback)，記作 ψ^* (這裡的 $*$ 號是處於上標位置)。換句話說，透過引入拉回概念，我們從函數 $\psi : M \to N$ 推導出另一函數 $\psi^* : \bigwedge^k T_{\psi(p)}^*N \to \bigwedge^k T_p^*M$。

下圖展示「拉回」與「前推」的區別：



上圖顯示兩個流形 M 和 N，以及 M 上一點 p 和 N 上對應點 $\psi(p)$ 處的切空間和餘切空間[2]。上圖中的三個箭頭代表這些流形和空間之間的函數關係，包括從 M 到 N 的函數 ψ、從切空間 T_pM 到 $T_{\psi(p)}N$ 的前推函數 ψ_* (這個函數把 T_pM 中的切向量 v 映射為 $T_{\psi(p)}N$ 中的切向量 ψ_*v)，以及從餘切空間 $T_{\psi(p)}^*N$ 到 T_p^*M 的拉回函數 ψ^* (這個函數把 $T_{\psi(p)}^*N$ 中的餘切向量 α 映射為 T_p^*M 中的餘切向量 $\psi^*\alpha$)。從上圖可以看到，ψ_* 跟

[2]請注意根據《數學示例：k 向量與 k 餘向量》，$T_pM = \bigwedge^1 T_pM$，$T_{\psi(p)}^*N = \bigwedge^1 T_{\psi(p)}^*N$ 等等。另外，嚴格地說，上圖應把切空間和餘切空間置於同一點上 (因為它們「寄生」於同一點)，這裡把餘切空間拉出來放在流形之上，是為了讓讀者看清楚上圖。

ψ 有相同的指向, 而 ψ^* 卻與 ψ 反向, 因此 ψ_* 是「前推」, 而 ψ^* 卻是「拉回」[3]。

接下來看如何定義和計算 ψ^*。設有函數 $\psi : M \to N$ 以及 $\bigwedge^k T^*_{\psi(p)}N$ 中的 k 餘切向量 α，那麼根據前面的介紹，把 ψ^* 作用於 α 的結果 $\psi^*\alpha$ [4]應是 $\bigwedge^k T^*_p M$ 中的 k 餘切向量。根據 k 餘切向量的定義，$\psi^*\alpha$ 是這樣的函數，其輸入是 T_pM 中的 k 個切向量 v_1、...、v_k，而其輸出 $\psi^*\alpha(v_1, \ldots, v_k)$ [5]則是一個實數，這個實數可用下式求得：

$$\psi^*\alpha(v_1, \ldots, v_k) = \alpha(\psi_* v_1, \ldots, \psi_* v_k) \qquad (6)$$

上式右端的式子是合理的，因為該式的論元是 $\psi_* v_1$、...、$\psi_* v_k$，而根據前推的定義，$\psi_* v_1$、...、$\psi_* v_k$ 是切空間 $T_{\psi(p)}N$ 中的切向量，正可作為 α 的論元 (因為 $\alpha \in \bigwedge^k T^*_{\psi(p)}N$)。

公式 (6) 告訴我們把 $\psi^*\alpha$ 作用於 k 個切向量的結果，但在實際應用中，我們常常要求 $\psi^*\alpha$ 而非它們作用於 k 個切向量的結果。以下提供兩種求 $\psi^*\alpha$ 的方法，第一種方法可稱為「解未知項法」。由於 $\psi^*\alpha$ 是 $\bigwedge^k T^*_p M$ 中的 k 餘切向量，可知 $\psi^*\alpha$ 必具有以下形式 (下式來自《數學示例：k 向量與 k 餘向量》中的 (28))：

$$\psi^*\alpha = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m} c_{i_1 \ldots i_k} dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k} \qquad (7)$$

其中 $c_{i_1 \ldots i_k}$ 是未知的實數, 因此如能求得這些 $c_{i_1 \ldots i_k}$ 的值, 並把這些值代入上式, 便可得到 $\psi^*\alpha$。為求這些值, 可以把上式右端作用於 $T^*_p M$ 中的 k 個適當單位向量, 同時又把這些單位向量代入 (6) 中的 $(v_1, \ldots, v_k)$, 從而解出 $c_{i_1 \ldots i_k}$。

以下用兩個實例說明此方法，仍以前面的函數 ψ_I 和 $\mathbb{R}^2$ 上的點 $(-2, 3)$ 為例，首先考慮 $T^*_{(1,-5,-6)}\mathbb{R}^3$ 中的餘切向量

$$\alpha_I = -9dx_1 + 10dx_3 \qquad (8)$$

根據前面的討論，可知 $(\psi_I)^*\alpha_I$ 應是 $T^*_{(-2,3)}\mathbb{R}^2$ 中的餘切向量，故根據 (7)，必具有以下形式：

$$(\psi_I)^*\alpha_I = c_1 dy_1 + c_2 dy_2 \qquad (9)$$

[3]為何「拉回」ψ^* 的映射方向與 ψ 相反？這是因為「拉回」可被看成線性代數中「對偶」變換 (dual transformation) 的推廣。根據線性代數，若 T 是把向量空間 V 映射到 W 的線性變換，則 T 的對偶變換，記作 T^*，把對偶空間 W^* 映射到 V^*，這裡 T^* 的映射方向也與 T 相反。

[4]為免使用過多括號，這裡沿用流形分析的習慣，把拉回 ψ^* 作用於餘切向量 α 的結果寫作 $\psi^*\alpha$，而非 $\psi^*(\alpha)$，除非 α 是一個複雜的數式。

[5]請注意 $\psi^*\alpha(v_1, \ldots, v_k)$ 應被理解為 $(\psi^*\alpha)(v_1, \ldots, v_k)$ 而非 $\psi^*(\alpha(v_1, \ldots, v_k))$，即應被理解為把 $\psi^*\alpha$ 作用於 $(v_1, \ldots, v_k)$，而非把 ψ^* 作用於 $\alpha(v_1, \ldots, v_k)$。

其中 c_1 和 c_2 是未知的實數。接下來把 $(\psi_I)^*\alpha_I$ 分別作用於 $T^*_{(-2,3)}\mathbb{R}^2$ 中的單位向量 $[1,0]^T$ 和 $[0,1]^T$。一方面，根據 dy_1 和 dy_2 的定義，我們有

$$\begin{aligned}(\psi_I)^*\alpha_I([1,0]^T) &= (c_1dy_1+c_2dy_2)([1,0]^T)\\ &= c_1dy_1([1,0]^T)+c_2dy_2([1,0]^T)\\ &= c_1\times 1+c_2\times 0\\ &= c_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\psi_I)^*\alpha_I([0,1]^T) &= (c_1dy_1+c_2dy_2)([0,1]^T)\\ &= c_1dy_1([0,1]^T)+c_2dy_2([0,1]^T)\\ &= c_1\times 0+c_2\times 1\\ &= c_2\end{aligned}$$

另一方面，根據 (6) 和 (5)，我們又有

$$\begin{aligned}(\psi_I)^*\alpha_I([1,0]^T) &= \alpha_I((\psi_I)_*[1,0]^T)\\ &= \alpha_I(D(\psi_I)|_{(-2,3)}\times[1,0]^T)\\ &= \alpha_I([1,1,3]^T)\\ &= (-9dx_1+10dx_3)([1,1,3]^T)\\ &= (-9)(1)+(10)(3)\\ &= 21\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\psi_I)^*\alpha_I([0,1]^T) &= \alpha_I((\psi_I)_*[0,1]^T)\\ &= \alpha_I(D(\psi_1)|_{(-2,3)}\times[0,1]^T)\\ &= \alpha_I([1,-1,-2]^T)\\ &= (-9dx_1+10dx_3)([1,-1,-2]^T)\\ &= (-9)(1)+(10)(-2)\\ &= -29\end{aligned}$$

綜合以上計算結果，可得 $c_1=21, c_2=-29$，把此一結果代入 (9)，便可得到

$$(\psi_I)^*\alpha_I = 21dy_1-29dy_2 \qquad (10)$$

其次考慮 $\bigwedge^2 T^*_{(1,-5,-6)}\mathbb{R}^3$ 中的 2 餘切向量

$$\alpha_{II} = -19dx_1\wedge dx_3 \qquad (11)$$

類似上一例子，$(\psi_I)^*\alpha_{II}$ 應是 $\bigwedge^2 T^*_{(-2,3)}\mathbb{R}^2$ 中的 2 餘切向量，故根據 (7)，必具有以下形式：

$$(\psi_I)^*\alpha_{II} = c\,dy_1\wedge dy_2 \qquad (12)$$

其中 c 是未知的實數。接下來把 $(\psi_I)^*\alpha_{II}$ 作用於 $T^*_{(-2,3)}\mathbb{R}^2$ 中的兩個單位向量 $[1,0]^T$ 和 $[0,1]^T$。一方面，根據 $dy_1 \wedge dy_2$ 的定義，我們有

$$\begin{aligned}(\psi_I)^*\alpha_{II}([1,0]^T,[0,1]^T) &= cdy_1 \wedge dy_2([1,0]^T,[0,1]^T)\\ &= c\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ &= c\end{aligned}$$

另一方面，根據 (6) 和 (5)，我們又有

$$\begin{aligned}(\psi_I)^*\alpha_{II}([1,0]^T,[0,1]^T) &= \alpha_{II}((\psi_I)_*[1,0]^T,(\psi_I)_*[0,1]^T)\\ &= \alpha_{II}(D(\psi_I)|_{(-2,3)}\times[1,0]^T, D(\psi_I)|_{(-2,3)}\times[0,1]^T)\\ &= \alpha_{II}([1,1,3]^T,[1,-1,-2]^T)\\ &= -19dx_1\wedge dx_3([1,1,3]^T,[1,-1,-2]^T)\\ &= -19\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}\\ &= 95\end{aligned}$$

從以上計算結果可得 $c = 95$，把此一結果代入 (12)，便可得到

$$(\psi_I)^*\alpha_{II} = 95dy_1\wedge dy_2 \qquad (13)$$

第二種求 $\psi^*\alpha$ 的方法可稱為「代入法」，其方法是先根據函數 (3) 和 M 上實值函數的外導數的定義求 dx_1、...、dx_n，接著把剛才求得的 dx_1、...、dx_n 代入 α，並把 p 點的坐標代入 $(y_1,\ldots,y_m)$，所得結果就是 $\psi^*\alpha$。

以下讓我們用上述方法再算一次 $(\psi_I)^*\alpha_I$ 和 $(\psi_I)^*\alpha_{II}$。先從 (2) 求得

$$dx_1 = dy_1 + dy_2,\quad dx_2 = dy_1 - dy_2,\quad dx_3 = y_2dy_1 + y_1dy_2 \qquad (14)$$

把剛才求得的 dx_1、dx_2 和 dx_3 代入 (8) 等號右端, 並把 $(-2,3)$ 代入 (y_1,y_2), 所得結果就是 $(\psi_I)^*\alpha_I$：

$$\begin{aligned}(\psi_I)^*\alpha_I &= -9(dy_1+dy_2)+10(y_2dy_1+y_1dy_2)\\ &= -9(dy_1+dy_2)+10(3dy_1-2dy_2)\\ &= 21dy_1-29dy_2 \qquad (15)\end{aligned}$$

上述計算結果與前面 (10) 中的結果一致。接著又把剛才求得的 dx_1、dx_2 和 dx_3 代入 (11) 等號右端, 並把 $(-2,3)$ 代入 (y_1,y_2), 所得結果就是 $(\psi_I)^*\alpha_{II}$：

$$\begin{aligned}(\psi_I)^*\alpha_{II} &= -19(dy_1+dy_2)\wedge(y_2dy_1+y_1dy_2)\\ &= -19(dy_1+dy_2)\wedge(3dy_1-2dy_2)\\ &= 95dy_1\wedge dy_2 \qquad (16)\end{aligned}$$

上述計算結果與前面 (13) 中的結果一致。

在以上兩種計算 $\psi^*\alpha$ 的方法中，「代入法」較為直接簡單，所以以下我們將主要使用這種方法。不過，「解未知項法」有其理論意義，以下我們會使用此一方法證明一個與拉回相關的重要定理。

我們知道 k 向量場和微分 k 形式分別是把流形 M 上的點 p 映射為 $\bigwedge^k T_pM$ 中的 k 切向量和 $\bigwedge^k T_p^*M$ 中的 k 餘切向量的函數，因此我們可以借助上述函數的作用來定義 k 向量場的前推運算和微分 k 形式的拉回運算。

首先介紹 k 向量場的前推運算，設 ψ 為 (3) 所示的函數，v 為 $\Gamma(\bigwedge^k TM)$ 中的 k 向量場，則 v 的前推，記作 ψ_*v，是 $\Gamma(\bigwedge^k TN)$ 中的 k 向量場。跟前面的情況相似，可以利用下式計算 $\psi_*(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k)$ (其中 $v_1, \ldots, v_k \in \Gamma(TM)$)(請把下式跟 (5) 作一比較)：

$$\psi_*(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) = (D(\psi) \times v_1) \wedge \ldots \wedge (D(\psi) \times v_k) \qquad (17)$$

用上式計算的結果是以 y_1、...、y_m 作為變項的數式，因此我們還要把這些數式轉換成以 x_1、...、x_n 作為變項的數式，其方法是利用 (3) 把 y_1、...、y_m 表達成 x_1、...、x_n 的函數，即求 ψ^{-1}，由此可見只有可逆函數 ψ 才可計算 ψ_*v。

現設 ψ 為可逆函數，可以證明對任何 $(y_1, \ldots, y_m) \in M$，以下關係成立：

$$\psi_*v(\psi(y_1, \ldots, y_m)) = \psi_*(v(y_1, \ldots, y_m)) \qquad (18)$$

上式等號左端代表把 $\Gamma(\bigwedge^k TN)$ 中的 k 向量場 ψ_*v 作用於 N 上的點 $\psi(y_1, \ldots, y_m)$，右端則代表把前推函數 ψ_* 作用於 $\bigwedge^k T_{(y_1,\ldots,y_m)}M$ 中的 k 切向量 $v(y_1, \ldots, y_m)$，這兩者的結果都是 $\bigwedge^k T_{\psi(y_1,\ldots,y_m)}N$ 中的 k 切向量。

舉例說，考慮以下函數：

$$\psi_{II} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ \ \psi_{II}(y_1, y_2) = (x_1, x_2),\ \text{其中} x_1 = y_1 + y_2,\ x_2 = y_1 - y_2 \qquad (19)$$

容易看到，這是一個可逆函數，以下是其逆函數：

$$\psi_{II}{}^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ \ \psi_{II}{}^{-1}(x_1, x_2) = (y_1, y_2),\ \text{其中} y_1 = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y_2 = \frac{x_1 - x_2}{2} \qquad (20)$$

現設有 $\Gamma(T\mathbb{R}^2)$ 中的以下向量場：

$$v_I(y_1, y_2) = [2y_2, 4y_1]^T \qquad (21)$$

我們可以利用 (17) 和 (19) 計算 $(\psi_{II})_* v_I$ 如下：

$$\begin{aligned}
(\psi_{II})_* v_I &= D(\psi_{II}) \times v_I \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2y_2 \\ 4y_1 \end{bmatrix} \\
&= [2y_2 + 4y_1, 2y_2 - 4y_1]^T \\
&= \left[2 \times \frac{x_1 - x_2}{2} + 4 \times \frac{x_1 + x_2}{2}, 2 \times \frac{x_1 - x_2}{2} - 4 \times \frac{x_1 + x_2}{2} \right]^T \\
&= [3x_1 + x_2, -x_1 - 3x_2]^T
\end{aligned}$$

為驗證 (21)，一方面我們運用上述結果計算 $(\psi_{II})_* v_I(\psi_{II}(-2,3)) = (\psi_{II})_* v_I$ $(1,-5) = [-2,14]^T$。另一方面我們運用前面的 (5) 計算 $(\psi_{II})_*(v_I(-2,3)) = (\psi_{II})_*[6,-8]^T = [-2,14]^T$。由此得 $(\psi_{II})_* v_I(\psi_{II}(-2,3)) = (\psi_{II})_*(v_I(-2,3))$，(21) 乃得驗證。

接著介紹微分 k 形式的拉回運算, 設 ψ 為 (3) 所示的函數, α 為 $\Gamma(\bigwedge^k T^*N)$ 中的微分 k 形式，則 α 的拉回，記作 $\psi^*\alpha$，是 $\Gamma(\bigwedge^k T^*M)$ 中的微分 k 形式。根據微分 k 形式的定義，$\psi^*\alpha$ 是這樣的函數，把 M 上的可變點 $y = (y_1, \ldots, y_m)$ 和 T_yM 中的 k 個切向量 v_1、...、v_k 先後輸入 $\psi^*\alpha$，會輸出一個實數，這個實數可用下式求得 (請把下式跟 (6) 作一比較)：

$$\psi^*\alpha(y_1, \ldots, y_m)(v_1, \ldots, v_k) = \alpha(\psi(y_1, \ldots, y_m))(\psi_* v_1, \ldots, \psi_* v_k) \qquad (22)$$

上式右端的式子是合理的, 因為該式的論元是 $\psi(y_1, \ldots, y_m)$、$\psi_* v_1$、...、$\psi_* v_k$，其中 $\psi(y_1, \ldots, y_m)$ 是 N 上的點，$\psi_* v_1$、...、$\psi_* v_k$ 則是切空間 $T_{\psi(y)}N$ 中的 k 個切向量，正可作為 α 的論元 (因為 $\alpha \in \Gamma(\bigwedge^k T^*N)$)。

公式 (22) 只告訴我們把 $\psi^*\alpha(y_1, \ldots, y_m)$ 作用於 k 個切向量的結果，但在實際應用中，我們常常要求 $\psi^*\alpha(y_1, \ldots, y_m)$ 而非它們作用於 k 個切向量的結果。為此，可以運用前面介紹的「解未知項法」或「代入法」。此外，可以證明對任何 $(y_1, \ldots, y_m) \in M$，以下關係成立：

$$\psi^*\alpha(y_1, \ldots, y_m) = \psi^*(\alpha(\psi(y_1, \ldots, y_m))) \qquad (23)$$

上式等號左端代表把 $\Gamma(\bigwedge^k T^*M)$ 中的微分 k 形式 $\psi^*\alpha$ 作用於 M 上的點 $(y_1, \ldots, y_m)$，右端則代表把拉回函數 ψ^* 作用於 $\bigwedge^k T^*_{\psi(y_1,\ldots,y_m)}N$ 中的 k 餘切向量 $\alpha(\psi(y_1, \ldots, y_m))$，這兩者的結果都是 $\bigwedge^k T^*_{(y_1,\ldots,y_m)}M$ 中的 k 餘切向量。

舉例說，考慮前面討論過的函數 ψ_I 和 $\Gamma(\bigwedge^k T^*\mathbb{R}^3)$ 中的以下微分 2 形式：

$$\alpha_{III}(x_1, x_2, x_3) = {x_3}^2 dx_1 \wedge dx_2 + (x_1 + x_2) dx_2 \wedge dx_3 \qquad (24)$$

以下運用代入法，把 (2) 中有關 x_1、x_2 和 x_3 的等式以及 (14) 中有關 dx_1、dx_2 和 dx_3 的等式代入上式等號右端，所得結果就是 $(\psi_I)^*\alpha_{III}(y_1, y_2)$：

$$\begin{aligned} & (\psi_I)^*\alpha_{III}(y_1, y_2) \\ = \ & (y_1y_2)^2(dy_1 + dy_2) \wedge (dy_1 - dy_2) \\ & +(y_1 + y_2 + y_1 - y_2)(dy_1 - dy_2) \wedge (y_2dy_1 + y_1dy_2) \\ = \ & (-2{y_1}^2{y_2}^2 + 2{y_1}^2 + 2y_1y_2)dy_1 \wedge dy_2 \qquad (25) \end{aligned}$$

為驗證 (23)，一方面我們運用上述結果計算 $(\psi_I)^*\alpha_{III}(-2, 3) = -76dy_1 \wedge dy_2$。另一方面我們運用代入法計算 $(\psi_I)^*(\alpha_{III}(\psi_I(-2, 3))) = (\psi_I)^*(\alpha_{III}(1, -5, -6)) = (\psi_I)^*(36dx_1 \wedge dx_2 - 4dx_2 \wedge dx_3) = -76dy_1 \wedge dy_2$。由此得 $(\psi_I)^*\alpha_{III}(-2, 3) = (\psi_I)^*(\alpha_{III}(\psi_I(-2, 3)))$，(23) 乃得驗證。

最後，讓我們介紹和證明一個與拉回相關的定理，此一定理在微分形式的積分運算中有重要應用。

定理 1：設 ψ 為 (3) 所示的函數 (其中 $m \leq n$)，α 為 $\Gamma(\bigwedge^m T^*N)$ 中具有以下形式的微分 m 形式：

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n} \alpha_{i_1\ldots i_m}(x_1, \ldots, x_n)dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_m} \qquad (26)$$

則

$$\begin{aligned} \psi^*\alpha(y_1, \ldots, y_m) \ = \ & \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_m\leq n} \alpha_{i_1\ldots i_m}(\psi(y_1, \ldots, y_m))dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_m} \\ & \left(\left[\frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial y_1}\right]^T, \ldots, \left[\frac{\partial x_1}{\partial y_m}, \ldots \frac{\partial x_n}{\partial y_m}\right]^T\right) dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_m \qquad (27) \end{aligned}$$

舉例說，考慮前面討論過的函數 ψ_I 和微分 2 形式 α_{III}。根據上述定理，可求得

$$\begin{aligned} (\psi_I)^*\alpha_{III}(y_1, y_2) \ = \ & ((y_1y_2)^2dx_1 \wedge dx_2 + (y_1 + y_2 + y_1 - y_2)dx_2 \wedge dx_3) \\ & \left(\left[\frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \frac{\partial x_2}{\partial y_1}, \frac{\partial x_3}{\partial y_1}\right]^T, \left[\frac{\partial x_1}{\partial y_2}, \frac{\partial x_2}{\partial y_2}, \frac{\partial x_3}{\partial y_2}\right]^T\right) dy_1 \wedge dy_2 \\ = \ & \left({y_1}^2{y_2}^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} + 2y_1 \begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} \end{vmatrix}\right) dy_1 \wedge dy_2 \\ = \ & \left({y_1}^2{y_2}^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2y_1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ y_2 & y_1 \end{vmatrix}\right) dy_1 \wedge dy_2 \\ = \ & (-2{y_1}^2{y_2}^2 + 2{y_1}^2 + 2y_1y_2)dy_1 \wedge dy_2 \qquad (28) \end{aligned}$$

上述結果與前面用代入法求得的結果 (見 (25)) 相同。

接著用前面介紹的「解未知項法」證明上述定理。由於 $\psi^*\alpha$ 應是 $\Gamma(\bigwedge^m T^*M)$ 中的微分 m 形式，故必具有以下形式：

$$\psi^*\alpha(y_1,\ldots,y_m) = f(y_1,\ldots,y_m)dy_1\wedge\ldots\wedge dy_m \qquad (29)$$

其中 $f(y_1,\ldots,y_m)$ 是未知的函數。接下來把 $\psi^*\alpha(y_1,\ldots,y_m)$ 作用於 m 個 $m\times 1$ 單位向量 e_1、...、e_m，其中 e_i $(1\le i\le m)$ 是第 i 個分量為 1、其餘 $m-1$ 個分量均為 0 的向量 (例如如果 $m=3$，則 $e_1=[1,0,0]^T$，$e_2=[0,1,0]^T$，$e_3=[0,0,1]^T$)。一方面，根據 $dy_1\wedge\ldots\wedge dy_m$ 的定義，我們有

$$\begin{aligned}\psi^*\alpha(y_1,\ldots,y_m)(e_1,\ldots,e_m) &= f(y_1,\ldots,y_m)dy_1\wedge\ldots\wedge dy_m(e_1,\ldots,e_m)\\ &= f(y_1,\ldots,y_m)\begin{vmatrix}1 & \cdots & 0\\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}\\ &= f(y_1,\ldots,y_m)\end{aligned}$$

另一方面，根據 (22) 和 (17)，我們又有

$$\begin{aligned}\psi^*\alpha(y_1,\ldots,y_m)(e_1,\ldots,e_m) &= \alpha(\psi(y_1,\ldots,y_m))(\psi_*e_1,\ldots,\psi_*e_m)\\ &= \alpha(\psi(y_1,\ldots,y_m))(D(\psi)e_1,\ldots,D(\psi)e_m)\end{aligned}$$

接著應用 (26) 所提供的 $\alpha(x_1,\ldots,x_n)$ 和 (4) 所提供的 $D(\psi)$，便可得到[6]

$$\begin{aligned}\psi^*\alpha(y_1,\ldots,y_m)(e_1,\ldots,e_m) = &\sum_{1\le i_1<\ldots<i_m\le n}\alpha_{i_1\ldots i_m}(\psi(y_1,\ldots,y_m))dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_m}\\ &\left(\left[\frac{\partial x_1}{\partial y_1},\ldots,\frac{\partial x_n}{\partial y_1}\right]^T,\ldots,\left[\frac{\partial x_1}{\partial y_m},\ldots\frac{\partial x_n}{\partial y_m}\right]^T\right)\end{aligned}$$

綜合以上計算結果，可知 $f(y_1,\ldots,y_m)$ 等於上式，把此一結果代入 (29)，便可得到 (27)，「定理 1」乃得證。

連結至數學專題
連結至周家發網頁

[6]請注意根據 (3)，$\psi(y_1,\ldots,y_m)=(x_1,\ldots,x_n)$，所以我們可以把 (26) 中的 $(x_1,\ldots,x_n)$ 改寫為 $\psi(y_1,\ldots,y_m)$。