數學示例：積拓樸與商拓樸

我們在《數學示例：拓樸空間》中指出拓樸空間 $(X, \mathcal{T}_X)$ 是由集合 X 連同該集合的拓樸 $\mathcal{T}_X$ (即 X 的所有開子集組成的集合) 構成的數學結構。根據集合論，從一個或多個集合可以得到新的集合，例如子集、笛卡爾積、商集等，這些新集合配上適當的拓樸也可構成拓樸空間，我們在《數學示例：開集與閉集》中介紹了如何從子集推導出子空間拓樸，本章的主旨是介紹如何從笛卡爾積和商集推導出積拓樸和商拓樸。

首先討論笛卡爾積的情況，考慮拓樸空間 $(X, \mathcal{T}_X)$ 和 $(Y, \mathcal{T}_Y)$。根據集合論，我們可以把集合 X 和 Y 組成「笛卡爾積」(Cartesian product) $X \times Y$，這是由所有有序對 (x, y) 組成的集合，其中 $x \in X$ 並且 $y \in Y$。為使 $X \times Y$ 變成拓樸空間，要定義適當的拓樸。我們在《數學示例：拓樸空間》中介紹了一種借助「拓樸基」間接定義拓樸的方法，因此為確定 $X \times Y$ 的拓樸，可以先確定 $X \times Y$ 的拓樸基，而這個拓樸基又可以根據 X 和 Y 的拓樸基來確定，這是以下定理的內容。

定理 1：設 $\mathcal{B}_X$ 為 X 的拓樸基，$\mathcal{B}_Y$ 為 Y 的拓樸基，則

$$\mathcal{B}_{X \times Y} = \{B_1 \times B_2 : B_1 \in \mathcal{B}_X \ \wedge \ B_2 \in \mathcal{B}_Y\}$$

構成 $X \times Y$ 的一個拓樸基。

舉例說，根據我們在《數學示例：拓樸空間》的討論，$\mathbb{R}$ 上全體開球 (即半徑為非零有限實數的開區間) 構成 $\mathbb{R}$ 的一個拓樸基 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$，由此根據上述定理，可知以下集合構成 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 的一個拓樸基：

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \{B_1 \times B_2 : B_1, B_2 \text{為 } \mathbb{R} \text{ 上的開球}\}$$

上述集合包括二維實數平面上的各種「開長方面」(僅包含由長方邊包圍的二維平面，但不包含其邊界)，例如 $(0, 1) \times (0, 2)$ 等。

另外，根據上述網頁中的「定理 1」，給定 X 的某個拓樸基 $\mathcal{B}_X$，則 $\mathcal{B}_X$ 中任意多個成員的并集組成的集合構成 X 的一個拓樸。把此一定理應用於笛卡爾積 $X \times Y$，可知 $\mathcal{B}_{X \times Y}$ 中任意多個成員的并集組成的集合構

成 $X \times Y$ 的一個拓樸 $\mathcal{T}_{X \times Y}$，由此形成一個拓樸空間 $(X \times Y, \mathcal{T}_{X \times Y})$，稱為「積拓樸空間」，一般簡稱積空間(product space)，而 $\mathcal{T}_{X \times Y}$ 則稱為積拓樸(product topology)。舉例說，$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 便構成一個積空間，其積拓樸包括任意多個「開長方面」的并集，例如 $(0,1) \times (0,2) \cup (-2,-1) \times (4,5)$ 便是 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上由兩個開長方面組成的開集。

我們在《數學示例：拓樸空間》中也曾討論拓樸空間 $\mathbb{R}^2$。若僅從集合方面看，$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 與 $\mathbb{R}^2$ 相同，兩者都是由全體實數有序對組成的集合。但從拓樸基方面看，這兩者卻有所不同。根據上面的討論，$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 的拓樸基 $\mathcal{B}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$ 包括所有「開長方面」；而根據上述網頁的討論，$\mathbb{R}^2$ 的拓樸基 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ 則包括所有「開圓盤」(即二維平面上的「開球」)。不過，$\mathcal{B}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$ 與 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ 雖然是不同的拓樸基，但它們所生成的拓樸 $\mathcal{T}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$ 和 $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$ 卻是相同的。為證明這一點，要應用以下定理。

定理 2：設 $(X, \mathcal{T})$ 和 $(X, \mathcal{T}')$ 為拓樸空間，$\mathcal{B}$ 為 $\mathcal{T}$ 的拓樸基，$\mathcal{B}'$ 為 $\mathcal{T}'$ 的拓樸基，則 $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ 當且僅當以下兩點均成立：

(i) 對任何 $x \in X$ 和任何 $\mathcal{B}$ 的成員 B (其中 $x \in B$)，都有 $\mathcal{B}'$ 的成員 B'，使得 $x \in B' \subseteq B$

(ii) 對任何 $x \in X$ 和任何 $\mathcal{B}'$ 的成員 B' (其中 $x \in B'$)，都有 $\mathcal{B}$ 的成員 B，使得 $x \in B \subseteq B'$

接下來讓我們運用上述定理證明 $\mathcal{T}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$。首先考慮 (i)，我們要證明對任何實數有序對 (x,y) 和任何包括 (x,y) 的開長方面 R，都有某個開圓盤 D，使得 $(x,y) \in D \subseteq R$。根據我們在《數學示例：拓樸空間》中介紹的 $\mathbb{R}^n$ 上開集的定義[1]，若開長方面 R 是包括 (x,y) 的開集，則必有某個以 (x,y) 為中心的開圓盤 $B((x,y),r)$，使得 $(x,y) \in B((x,y),r) \subseteq R$，(i) 乃得證。

其次考慮 (ii)，我們要證明對任何實數有序對 (x,y) 和任何包括 (x,y) 的開圓盤 D，都有某個開長方面 R，使得 $(x,y) \in R \subseteq D$。根據上段所述 $\mathbb{R}^n$ 上開集的定義，若開圓盤 D 是包括 (x,y) 的開集，則必有某個以 (x,y) 為中心的開圓盤 $B((x,y),r)$，使得 $(x,y) \in B((x,y),r) \subseteq D$。接著便可確定開長方面 $(x - \frac{r}{2}, x + \frac{r}{2}) \times (y - \frac{r}{2}, y + \frac{r}{2})$，讀者可自行驗證，這個開長方面滿足 $(x,y) \in (x - \frac{r}{2}, x + \frac{r}{2}) \times (y - \frac{r}{2}, y + \frac{r}{2}) \subseteq B((x,y),r) \subseteq D$，(ii) 乃得證。

我們還可以把以上介紹的由兩個拓樸空間組成的積空間推廣為 n 個 (其中 n 是有限正整數) 拓樸空間組成的積空間。舉例說，由 n 個 $\mathbb{R}$ 可以組成積空間 $\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$，並且可以證明，這個積空間等同於 n 維實數空間 $\mathbb{R}^n$。

[1]該定義是說，$\mathbb{R}^n$ 的子集 U 是開集，若對 U 的任何元素 x，都可找到一個包括 x 的開球 $B(x,r)$，使得 $B(x,r) \subseteq U$。

接著討論商集的情況，設有某集合 X 以及其上的某個「等價關係」(equivalence relation)，以下記作 $\sim$。根據集合論，X 的全體元素會按照 $\sim$ 被劃分成一個個「等價類」(equivalence class)，這些等價類組成 X 關於 $\sim$ 的一個「商集」(quotient set), 記作 $X/\sim$, 請注意商集是由 X 的子集組成的集合[2]。

集合 X 及其商集 $X/\sim$ 可以表達為以下「投射」(projection) 函數 $\mathrm{Proj}_\sim$：

$$\mathrm{Proj}_\sim : X \to X/\sim;\ \ \mathrm{Proj}_\sim(x) = [x] \qquad (1)$$

在上式中，$[x]$ 代表 x 所屬的那個等價類。上式的意思是 $\mathrm{Proj}_\sim$ 把 X 中的元素 x 映射為等價類 $[x]$。請注意 $\mathrm{Proj}_\sim$ 是到上函數 (因為 X 中任何元素都屬於至少一個等價類)，儘管不一定是一一函數 (因為 X 中不同元素可以屬於同一個等價類)。

舉例說, 在整數集 $\mathbb{Z}$ 上,「除以 3 後所得餘數相同」便是一個等價關係, 以下記作 $\sim_1$。按照這個等價關係, $\mathbb{Z}$ 被劃分為三個等價類：(i) 除以 3 後餘數為 0 的整數組成的等價類, 這個等價類可記作 $[0]$, 它包括 0、3、-3 等整數；(ii) 除以 3 後餘數為 1 的整數組成的等價類, 這個等價類可記作 $[1]$, 它包括 1、4、-2 等整數；(iii) 除以 3 後餘數為 2 的整數組成的等價類，這個等價類可記作 $[2]$, 它包括 2、5、-1 等整數。根據以上討論, 我們有 $\mathbb{Z}/\sim_1 = \{[0], [1], [2]\}$。此外，我們還有 $\mathrm{Proj}_{\sim_1}(1) = \mathrm{Proj}_{\sim_1}(4) = \mathrm{Proj}_{\sim_1}(-2) = [1]$，請注意 $[1]$ 也可寫成 $[4]$、$[-2]$ 等等。

等價關係的本質就是把某集合中兩個本來不同的元素視作相同。在拓樸學上, 這相當於把某空間中本來處於不同位置的兩點黏合起來成為一點。舉例說，考慮閉區間 $[0, 1]$，如果在 $[0, 1]$ 上定義以下等價關係：

$$x \sim_2 y \ \text{ iff } \ x = y \vee |x - y| = 1$$

上述等價關係把 $[0, 1]$ 中的實數劃分為以下等價類：0 和 1 組成一個等價類 (以下記作 $[0]$)，其他實數則僅與自己組成等價類，例如 $[0.5] = \{0.5\}$ 等等。由此我們有

$$[0, 1]/\sim_2 = \{[x] : x \in (0, 1)\} \cup \{[0]\}$$

從黏合的角度看，上述等價關係也可看成把上述閉區間中的 0 和 1 這兩點黏合起來成為一點 (其餘點則不變)。從直觀上看，對閉區間 $[0, 1]$ 進行上述黏合，會得到一個圓邊。用拓樸學的語言來表述，也可以說上述黏合的結果是一個與圓邊同胚的空間。如用 S^1 代表以原點為圓心、半徑為 1 的圓邊，此即

$$[0, 1]/\sim_2 \cong S^1 \qquad (2)$$

[2]有關「等價關係」、「等價類」和「商集」的詳細介紹，請參閱《感受伽羅瓦：等價關係與分數域》。

請注意由於 $[0,1]$ 與 S^1 有不同的長度和形狀 (前者是平直的，後者則是彎曲的)，如要把 $[0,1]$ 黏合而成 S^1，必須把 $[0,1]$ 拉伸和扭曲，而以上這些操作在拓樸學中是容許的。以下是 (2) 的同胚函數：

$$f : [0,1]/\sim_2 \to S^1; \quad f([x]) = e^{i2\pi x} \qquad (3)$$

請注意上式把 S^1 的元素寫成複數的形式，其中 $e^{i2\pi x}$ 對應著坐標為 $(\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ 的點。根據上式，我們有 $f([0]) = e^0$，對應著 $(1,0)$ 這一點，$f([\frac{1}{4}]) = e^{i\frac{\pi}{2}}$，對應著 $(0,1)$ 這一點等等。

以上只討論了商集，接著我們要把商集提升為「商拓樸空間」，一般簡稱商空間(quotient space)[3]。為此，我們要確定上述商集的拓樸如下。設有拓樸空間 $(X, \mathcal{T}_X)$、商集 $X/\sim$ 以及投射函數 $\text{Proj}_\sim$，U 為 $X/\sim$ 的子集 (即由 X 的某些等價類組成的集合)，則 U 是 $X/\sim$ 上的開集當且僅當 $\text{Proj}_\sim{}^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$，即 $\text{Proj}_\sim{}^{-1}(U)$ 是 X 上的開集。上述開集 U 組成的集合就是 $X/\sim$ 的拓樸，稱為商拓樸(quotient topology)，可記作 $\mathcal{T}_{X/\sim}$，而 $(X/\sim, \mathcal{T}_{X/\sim})$ 則構成一個商空間。

以前面討論過的 $[0,1]$ 為例，我們可以把這個閉區間看成 $\mathbb{R}$ 的子空間，那麼根據《數學示例：開集與閉集》中對子空間拓樸的討論，可以把 $[0,1]$ 上的開集定義為 $\mathbb{R}$ 上的開集與 $[0,1]$ 的交集，接下來讓我們判斷 $[0,1]/\sim_2$ 上的某些子集是否開集。首先考慮 $S_1 = \{[x] : x \in (0, \frac{1}{4}) \cup (\frac{3}{4}, 1)\} \cup \{[0]\}$，由於

$$\begin{aligned} \text{Proj}_{\sim_2}{}^{-1}(S_1) &= \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, 1\right) \cup \{0,1\} \\ &= \left[0, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, 1\right] \end{aligned}$$

而上面最後一行的集合是 $[0,1]$ 上的開集 (因為它等於 $\mathbb{R}$ 上的開集 $(-1, \frac{1}{4}) \cup (\frac{3}{4}, 2)$ 與 $[0,1]$ 的交集)，因此根據上面的定義，S_1 是 $[0,1]/\sim_2$ 上的開集。其次考慮 $S_2 = \{[x] : x \in (0, \frac{1}{2})\} \cup \{[0]\}$，由於

$$\begin{aligned} \text{Proj}_{\sim_2}{}^{-1}(S_2) &= \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \{0,1\} \\ &= \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \{1\} \end{aligned}$$

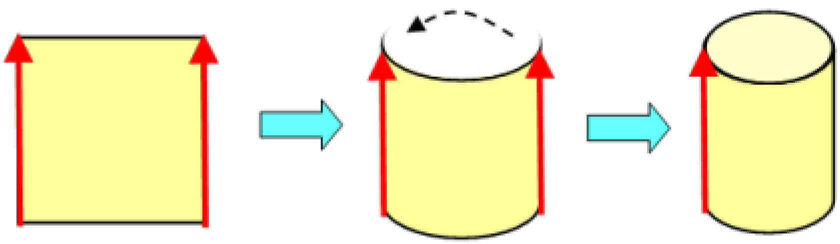
而上面最後一行的集合不是 $[0,1]$ 上的開集 (請注意單元集 $\{1\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的閉集，這是因為其補集 $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的開集)，因此 S_2 不是

[3]在拓樸學中，商空間又稱為「等化空間」(identification space)，這是因為這種空間是把某拓樸空間中的某些點視作等同 (相當於把它們黏合起來) 而得的空間。

$[0,1]/\sim_2$ 上的開集。

根據同胚關係 (2)，從 $[0,1]/\sim_2$ 上的開集，可以得到 S^1 上的開集，反之亦然。現在讓我們驗證前面討論過的 S_1 和 S_2 在 S^1 上分別對應著開集和非開集。首先考慮 S_1，根據同胚函數 (3)，可知 S_1 對應著按逆時針方向從 $e^{i\frac{3\pi}{2}}$ 到 $e^{i\frac{\pi}{2}}$ 的「開圓弧」(不包括兩個邊界點)，這個圓弧顯然是 S^1 上的開集。其次考慮 S_2，根據 (3)，可知 S_2 對應著按逆時針方向從 e^0 到 $e^{i\pi}$ 的半閉半開圓弧 (包括 e^0 但不包括 $e^{i\pi}$)，這個圓弧顯然不是 S^1 上的開集。

接下來討論一些特殊圖形，這些圖形可以表示成笛卡爾積或商集的形式，因此以下的討論將會用到前面介紹的有關笛卡爾積和商集的知識，但為免討論內容過於繁複，以下不會詳細討論這些圖形的拓樸。首先考慮圓柱面，這是指空心圓柱體的二維曲面 (不包括被圓柱面包圍的三維空間，也不包括圓柱體頂部和底部的圓盤)。為得到圓柱面，我們可以把某個閉正方面的某一對邊 (左右或上下) 黏合起來，下圖展示透過黏合閉正方面的左右兩邊 (標有紅色箭頭) 得到圓柱面的過程：



上圖中兩個紅色箭頭朝向相同方向，如要使這對箭頭在黏合後保持同向，便要把左上方與右上方黏合，左下方與右下方黏合等等。我們可以用兩種方法處理圓柱面，第一種方法是把它處理成笛卡爾積。由於閉正方面可以表示成兩個閉區間 $[0,1]$ 的積：

$$[0,1]\times[0,1] \qquad (4)$$

而圓柱面可被看成把上述笛卡爾積中的一個 $[0,1]$ 變成 S^1(這相當於把正方面的某一對邊黏合在一起) 而得的圖形，因此圓柱面可以表示成以下笛卡爾積：

$$S^1\times[0,1] \qquad (5)$$

第二種方法是把圓柱面處理成商集，為此，我們要定義 (4) 所示正方面上的以下等價關係：

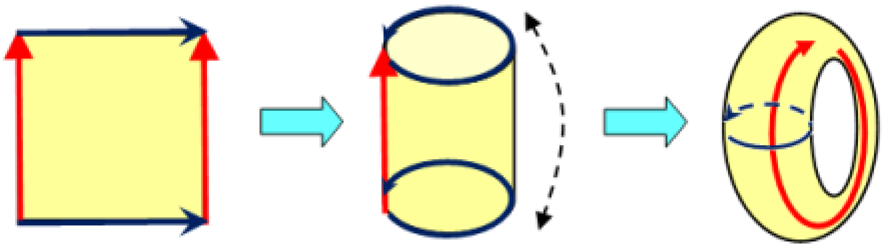
$$(x,y)\sim_3(x',y') \text{ iff } |x-x'|\in\{0,1\}\wedge y=y' \qquad (6)$$

上述等價關係的作用是把 (4) 上的 $(0,0)$ 與 $(1,0)$ 這兩點黏合起來，把 $(0,0.5)$ 與 $(1,0.5)$ 黏合起來，把 $(0,1)$ 與 $(1,1)$ 黏合起來等等。讀者可自行

驗證，上述等價關係正好表示上圖所示的把正方面變成圓柱面的黏合過程，因此利用以上等價關係，可以把圓柱面表示成以下商集：

$$([0,1] \times [0,1])/\sim_3 \qquad (7)$$

其次考慮環面(torus)，即甜甜圈或者沙灘水泡的形狀 (僅包括其外殼)。為得到環面，可以把某個圓柱面的兩邊黏合起來，下圖展示從長方面得到圓柱面，然後再得到環面的過程：



上圖中兩個紅色箭頭和兩個黑色箭頭各自朝向相同方向，如同圓柱面的情況，這兩對箭頭在黏合後也要保持同向。跟圓柱面相似，我們也可以用兩種方法處理環面，第一種方法是把它處理成笛卡爾積。由於環面可被看成把 (5) 中的剩餘一個 $[0,1]$ 變成 S^1(這相當於把圓柱面的兩邊黏合在一起)而得的圖形，因此環面可以表示成以下笛卡爾積：

$$S^1 \times S^1 \qquad (8)$$

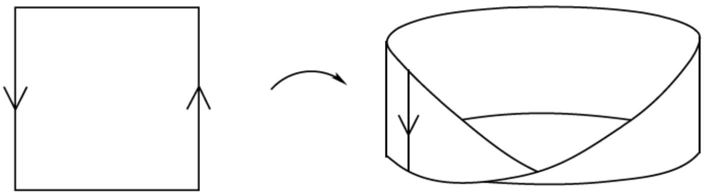
第二種方法是把環面處理成商集，為此，我們要定義 (4) 所示正方面上的以下等價關係：

$$(x,y) \sim_4 (x', y') \text{ iff } |x - x'| \in \{0,1\} \wedge |y - y'| \in \{0,1\} \qquad (9)$$

上述等價關係的作用是把 (4) 上的 $(0,0)$、$(0,1)$、$(1,0)$ 和 $(1,1)$ 這四點黏合起來，並且把 $(0,0.5)$ 與 $(1,0.5)$ 黏合起來，把 $(0.5,0)$ 與 $(0.5,1)$ 黏合起來等等。讀者可自行驗證，上述等價關係正好表示上圖所示的把正方面變成環面的黏合過程，因此利用以上等價關係，可以把環面表示成以下商集：

$$([0,1] \times [0,1])/\sim_4 \qquad (10)$$

回顧上面把正方面演變為圓柱面的變化圖，可以看到正方面上的一對紅色箭頭朝向相同的方向。如果把其中一個箭頭改變方向，便會得到一對朝向相反方向的箭頭。現在如仍要把這對邊黏合，並且使這對箭頭在黏合後同向，便要把其中一條邊扭轉，然後再把它與另一條邊黏合起來，這樣將得到一種有別於圓柱面的圖形，稱為莫比烏斯帶(Möbius strip)，下圖展示莫比烏斯帶的製作方法：



上圖正方面上左右兩邊的箭頭朝向相反方向，如把其中一條邊扭轉，然後把它與另一條邊黏合，便可使黏合後兩邊上的箭頭朝向相同方向，所得圖形就是莫比烏斯帶。

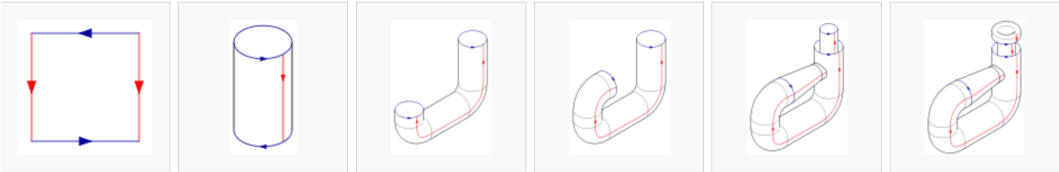
我們可以仿照圓柱面的商集表示法把莫比烏斯帶也表示成商集，但須把 (6) 中的等價關係修改為以下等價關係：

$$(x, y) \sim_5 (x', y') \text{ iff } (x = x' \wedge y = y') \vee (|x - x'| = 1 \wedge y = 1 - y') \qquad (11)$$

上述等價關係的作用是把 (4) 所示正方面上的 $(0, 0)$ 與 $(1, 1)$ 這兩點黏合起來，把 $(0, 1)$ 與 $(1, 0)$ 黏合起來，把 $(0, 0.5)$ 與 $(1, 0.5)$ 黏合起來，把 $(0, 0.2)$ 與 $(1, 0.8)$ 黏合起來等等。讀者可自行驗證，上述等價關係正好表示上圖所示的把正方面變成莫比烏斯帶的黏合過程，因此利用以上等價關係，可以把莫比烏斯帶表示成以下商集：

$$([0, 1] \times [0, 1])/\sim_5 \qquad (12)$$

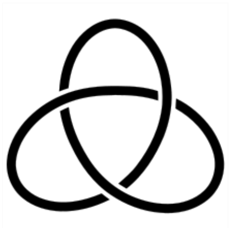
回顧上面把正方面演變為環面的變化圖，可以看到正方面上的兩對箭頭 (紅色和黑色) 各自朝向相同的方向。如果把其中一個箭頭改變方向，便會得到一對朝向相反方向的箭頭 (另一對箭頭則仍然朝向相同方向)。現在如仍要把這兩對邊黏合，並且使這兩對箭頭在黏合後同向，便要使用一種特殊方法 (詳述於下文)，這樣將得到一種有別於環面的圖形，稱為克萊因瓶(Klein bottle)(請注意這個圖形僅包含「瓶」的外殼)，下圖展示製作克萊因瓶的過程：



上面最左圖顯示一個正方面，其中兩個紅色箭頭朝向相同方向，但兩個藍色箭頭卻朝向相反方向。第二幅圖顯示把紅色邊黏合後，可得到一個圓柱面。接著要把藍色邊黏合。但由於兩個藍色箭頭朝向相反方向 (一個順時

針，另一個逆時針)，我們不能像製造環面那樣直接把它們黏合。一種解決方法是把圓柱面的其中一端穿入圓柱面的中段，然後把該端拉上使之與另一端齊平並黏合，這樣便使黏合後的兩個藍色箭頭朝向相同方向，所得圖形就是克萊因瓶。

由於在上述過程中，我們須把克萊因瓶的某部分穿過其自身，克萊因瓶不能在三維空間中實現，而必須在較高維的空間中實現。這種情況就像圓邊和紐結 (knot) 不能在一維空間中實現，而必須分別在二維和三維空間中實現一樣。圓邊和紐結本質上是一維圖形 (它們是曲線)，但由於圓邊是彎曲的，我們無法在一維直線上畫出圓邊，而必須在二維平面上才能畫出圓邊。紐結則在二維平面上也不能實現，請看下圖：



上圖是在二維平面上表達紐結的嘗試，由於紐結的不同部分互相重疊，上圖把紐結的某些部分繪成斷開的線段，以表示該部分位於紐結的另一部分之下，但實際上紐結不應是斷開的。這顯示我們必須在三維空間 (即比一維高兩維的空間) 中才能實現紐結。同樣，克萊因瓶本質上是二維圖形 (它是一個曲面)，但它不能在二維平面以至三維空間中實現，而必須在更高維的空間中才能實現。

我們可以仿照環面的商集表示法把克萊因瓶也表示成商集，但須對 (9) 中的等價關係作出修改。首先定義 (4) 所示正方面上的以下關係：

$$\begin{aligned} & (x, y)\, R\, (x', y') \\ \text{iff} \quad & (|x - x'| \in \{0, 1\} \wedge y = y') \vee (x = 1 - x' \wedge |y - y'| = 1) \end{aligned} \tag{13}$$

上述關係雖然具有自反性和對稱性，但卻沒有傳遞性，例如雖然有 $(0, 0)\, R\, (1, 0)$ 和 $(1, 0)\, R\, (0, 1)$，但卻沒有 $(0, 0)\, R\, (0, 1)$。不過，我們可以定義 (4) 所示正方面上的以下關係：

$$\begin{aligned} & (x, y) \sim_6 (x', y') \\ \text{iff} \quad & \text{存在}(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ & \text{其中}(x_1, y_1) = (x, y)\text{並且}(x_n, y_n) = (x', y') \\ & \text{使得}(x_1, y_1)\, R\, (x_2, y_2) \wedge \ldots \wedge (x_{n-1}, y_{n-1})\, R\, (x_n, y_n) \end{aligned} \tag{14}$$

舉例說，由於 $(0,0)\,R\,(1,0)$ 並且 $(1,0)\,R\,(0,1)$，我們有 $(0,0)\sim_6(0,1)$。由此可見，上述關係的作用是使 (13) 具有傳遞性而不影響其自反性和對稱性，因此 $\sim_6$ 是一個等價關係。

在上述等價關係下，(4) 所示正方面上的 $(0,0)$、$(0,1)$、$(1,0)$ 和 $(1,1)$ 這四點被黏合起來，$(0,0.5)$ 與 $(1,0.5)$ 被黏合起來，$(0.5,0)$ 與 $(0.5,1)$ 被黏合起來，$(0.8,0)$ 與 $(0.2,1)$ 也被黏合起來等等。讀者可自行驗證，上述等價關係正好表示上面把正方面變成克萊因瓶的黏合過程，因此利用以上等價關係，可以把克萊因瓶表示成以下商集：

$$([0,1]\times[0,1])/\sim_6 \qquad (15)$$

連結至數學專題
連結至周家發網頁