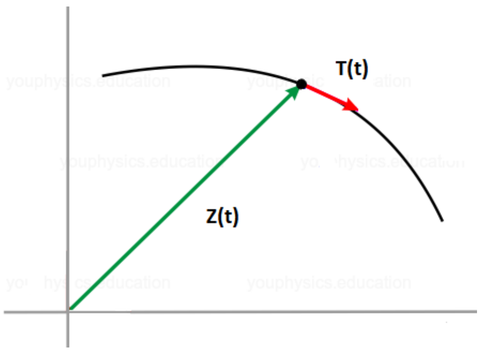
數學示例：平面曲線的性質

我們在《數學示例：曲線的參數化》中介紹了用參數化形式表示曲線的方法，本文主旨是利用參數化形式及其相關概念探討平面曲線的一些重要性質。我們在上述網頁曾指出，可以把曲線看成運動點的軌跡。設 Z 為某曲線的參數化形式，那麼 $Z(t)$ 告訴我們曲線上每一點的位置 (向量)。但除了位置外，我們還需要知道運動點的移動方向，此一訊息由每一點上的「切向量」提供。

學過微積分的讀者都應該知道，給定一般函數 f，那麼其一階導數 $f'(x)$ 提供該函數在 x 處的切線訊息 (即切線的斜率)。類似地，給定曲線的光滑正則參數化形式 Z，那麼 $Z'(t)$ 提供參數 t 所對應曲線點的切線訊息 (即切向量)。為方便計算，一般會把切向量表示成單位向量 (即模為 1 的向量)，方法是把此一向量除以其模 $\|Z'(t)\|$ (亦即曲線的「速率」，請參閱《數學示例：曲線的參數化》)，從而得到單位切向量(unit tangent vector)，以下記作 T (請注意 $Z(t)$ 的正則性保證下式的分母不等於 0)：

$$T(t) = \frac{Z'(t)}{\|Z'(t)\|} \qquad (1)$$

位置向量與單位切向量雖然本質上都是向量，但兩者在起點方面存在很大差異，下圖展示這兩種向量的差異：



上圖顯示，綠色的位置向量 $Z(t)$ 以整個平面的坐標原點作為起點，不論 t 的值如何變化，$Z(t)$ 都總以這個原點作為起點；紅色的單位切向量 $T(t)$ 則

以相對應的位置向量 $Z(t)$ 的終點 (即該向量的箭頭所在位置) 作為起點，因此 $T(t)$ 是「寄生」在 $Z(t)$ 上，其起點會隨著 t 而不斷變化。

以我們在《數學示例：曲線的參數化》中討論過的 r 半徑圓為例，如採用下列參數化形式 (下式等於上述網頁 (3) 中的 Z_2)：

$$Z_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}^2; \quad Z_1(t) = (r\cos(2\pi t), r\sin(2\pi t)) \qquad (2)$$

那麼

$$Z_1\text{'}(t) = (-2\pi r\sin(2\pi t), 2\pi r\cos(2\pi t))$$

以及

$$\|Z_1\text{'}(t)\| = 2\pi r$$

由此根據 (1)，容易求得 Z_1 的單位切向量如下：

$$T_1(t) = (-\sin(2\pi t), \cos(2\pi t))$$

根據上述公式，可求得 $T_1(0) = (0, 1)$ 和 $T_1(\frac{1}{4}) = (-1, 0)$ 等等。這即是說，寄生於 $Z_1(0)$ 那點 (即 $(r, 0)$) 的單位切向量是 $(0, 1)$，即垂直向上的向量；而寄生於 $Z_1(\frac{1}{4})$ 那點 (即 $(0, r)$) 的單位切向量則是 $(-1, 0)$，即水平向左的向量，符合我們對 r 半徑圓的點的 (逆時針) 運動方向的直觀。

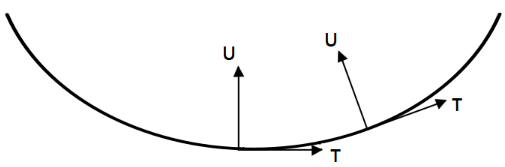
除了單位切向量外，我們還需要一個與單位切向量有相同起點但與其垂直的單位向量，稱為平面曲線單位法向量(plane curve unit normal vector)，以下記作 U。由於在平面上對應 T 可以有兩個向量作為 U，我們規定 U 是把 T 按逆時針方向旋轉 $\frac{\pi}{2}$ 後所得的向量。用算式表示，如果 $T(t) = (T_x(t), T_y(t))$，那麼

$$U(t) = (-T_y(t), T_x(t)) \qquad (3)$$

以剛才討論過的 r 半徑圓為例，根據上述公式，容易求得其平面曲線單位法向量如下：

$$U_1(t) = (-\cos(2\pi t), -\sin(2\pi t))$$

總上所述，一條平面曲線上的每一點都寄生著單位切向量和平面曲線單位法向量，這兩個向量組成一個集合 $\{T(t), U(t)\}$，稱為活動標架(moving frame)，下圖展示某平面曲線上的活動標架：



單位向量的一階導數有一個十分有用的性質，這是以下定理的內容。

定理 1：設對所有 t，$V(t)$ 是單位向量並且向量 $V'(t)$ 不等於零向量，則 $V(t)$ 與 $V'(t)$ 互相垂直。

以下讓我們證明上述定理，由於 $V(t)$ 是單位向量，根據向量代數中「點積」(dot product) 的性質，我們有

$$\|V(t)\|^2 = V(t) \cdot V(t) = 1$$

接著對上面等號兩端求導，可得[1]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(V(t) \cdot V(t)) &= 0 \\ V'(t) \cdot V(t) + V(t) \cdot V'(t) &= 0 \\ 2V(t) \cdot V'(t) &= 0 \\ V(t) \cdot V'(t) &= 0 \end{aligned}$$

由於 $V(t)$ 和 $V'(t)$ 都不等於零向量，上述結果顯示 $V(t)$ 與 $V'(t)$ 互相垂直。

接下來利用活動標架的兩個成員的一階導數來推導平面曲線的性質，首先考慮 $T(t)$ 的一階導數 $T'(t)$。若 $T'(t) \neq (0,0)$，那麼根據上述定理，$T(t)$ 與 $T'(t)$ 垂直，但由於 $T(t)$ 又與 $U(t)$ 垂直，由此必有 $T'(t)$ 與 $U(t)$ 平行，因此這兩個向量必具有 $T'(t) = f(t)U(t)$ 的關係，其中 $f(t)$ 是純量函數，代表這兩個向量之間的比例。若 $T'(t) = (0,0)$，則亦有 $T'(t) = f(t)U(t)$，其中 $f(t) = 0$ (即恆以 0 為值的函數)。在微分幾何中，把 $f(t)$ 除以曲線速率 $\|Z'(t)\|$ 所得的商定義為平面曲線的有向曲率(signed curvature)，記作 $\kappa_s(t)$，用以量度曲線彎曲的程度。總上所述，$\kappa_s(t)$ 滿足以下等式：

$$T'(t) = \|Z'(t)\|\kappa_s(t)U(t) \qquad (4)$$

請注意 $\kappa_s(t)$ 是一個函數，其值可隨著 t 而變化，可以是正數、0 或負數，故名「有向」。

以前面 (2) 中 r 半徑圓的參數化形式 Z_1 為例，根據前面的計算，可知

$$T_1'(t) = (-2\pi\cos(2\pi t), -2\pi\sin(2\pi t))$$

把前面計算所得的 $T_1'(t)$、$\|Z_1'(t)\|$ 和 $U_1(t)$ 代入 (4) 中，可得

$$(-2\pi\cos(2\pi t), -2\pi\sin(2\pi t)) = (\kappa_s)_1(t)(-2\pi r\cos(2\pi t), -2\pi r\sin(2\pi t)$$

[1]以下要用到點積運算的一些運算法則：設 $U(t)$ 和 $V(t)$ 為向量值函數，則 $\frac{d}{dt}(U(t) \cdot V(t)) = U'(t) \cdot V(t) + U(t) \cdot V'(t)$，以及 $U(t) \cdot V(t) = V(t) \cdot U(t)$。

由此必有

$$(\kappa_s)_1(t) = \frac{1}{r}$$

上述結果告訴我們 r 半徑圓的曲率是一個常數，這符合我們的直觀，因為圓形上每一點的彎曲程度是相同的，故應有相同的曲率。此外，上述常數與半徑 r 成反比關係，這也符合我們的直觀，因為半徑越小，圓形便彎曲得越厲害，因而其曲率也應越高。

除了上述 $\kappa_s(t)$ 的定義外，還可以從曲線的參數化形式推導出 $\kappa_s(t)$ 的計算公式。設 $Z(t) = (x(t), y(t))$ 為某平面曲線的參數化形式，那麼可以證明該曲線的有向曲率可用以下公式計算 (在下式中，'和''分別代表「一階導數」和「二階導數」)：

$$\kappa_s(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} \qquad (5)$$

接下來讓我們用上式求 r 半徑圓的有向曲率，今次我們採用以下參數化形式：

$$Z_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2;\ \ Z_2(t) = (r\cos(2\pi t), -r\sin(2\pi t)) \qquad (6)$$

上式跟 Z_1 (見 (2)) 的主要區別在於，Z_1 反映運動點按逆時針方向運動的軌跡，而上式則反映運動點按順時針方向運動的軌跡。為使用上式，先要求 Z_2 的一階和二階導數如下：

$$Z_2'(t) = (x_2'(t), y_2'(t)) = (-2\pi r\sin(2\pi t), -2\pi r\cos(2\pi t))$$

$$Z_2''(t) = (x_2''(t), y_2''(t)) = (-4\pi^2 r\cos(2\pi t), 4\pi^2 r\sin(2\pi t))$$

接著把上述計算結果代入公式 (5)，便可求得

$$\begin{aligned}
(\kappa_s)_2(t) &= \frac{(-2\pi r\sin(2\pi t))(4\pi^2 r\sin(2\pi t)) - (-4\pi^2 r\cos(2\pi t))(-2\pi r\cos(2\pi t))}{((-2\pi r\sin(2\pi t))^2 + (-2\pi r\cos(2\pi t))^2)^{3/2}} \\
&= \frac{-8\pi^3 r^2\sin^2(2\pi t) - 8\pi^3 r^2\cos^2(2\pi t)}{(4\pi^2 r^2\sin^2(2\pi t) + 4\pi^2 r^2\cos^2(2\pi t))^{3/2}} \\
&= \frac{-8\pi^3 r^2}{(4\pi^2 r^2)^{3/2}} \\
&= \frac{-8\pi^3 r^2}{8\pi^3 r^3} \\
&= -\frac{1}{r}
\end{aligned}$$

$(\kappa_s)_1(t)$ 和 $(\kappa_s)_2(t)$ 都是 r 半徑圓的有向曲率，但兩者相差一個正負號，這顯示有向曲率的值不僅依賴於曲線的彎曲程度，而且依賴於曲線的參數化

形式所反映運動點的運動方向 (逆時針或順時針)[2]。

接著考慮 $U(t)$ 的一階導數 $U'(t)$，若 $U'(t) \neq (0,0)$，那麼根據「定理 1」，$U(t)$ 與 $U'(t)$ 互相垂直。但由於 $U(t)$ 又與 $T(t)$ 互相垂直，由此必有 $U'(t)$ 與 $T(t)$ 平行。因此 $U'(t)$ 與 $T(t)$ 的關係類似於 (4) 所示的 $T'(t)$ 與 $U(t)$ 的關係。事實上，可以證明下式 (若 $U'(t) = (0,0)$，則下式亦成立，其中 $\kappa_s(t) = 0$)：

$$U'(t) = -\|Z'(t)\|\kappa_s(t)T(t) \qquad (7)$$

由此可見，利用 $U'(t)$，可以得到 $\kappa_s(t)$ 的另一個定義。以下就讓我們用上式再算一次 $(\kappa_s)_2(t)$。根據以上的計算結果，可知

$$\|Z_2'(t)\| = 2\pi r$$

由此根據 (1) 和 (3)，可得

$$T_2(t) = (-\sin(2\pi t), -\cos(2\pi t))$$

$$U_2(t) = (\cos(2\pi t), -\sin(2\pi t))$$

對 $U_2(t)$ 求導，可得

$$U_2'(t) = (-2\pi\sin(2\pi t), -2\pi\cos(2\pi t))$$

把相應的中間計算結果代入 (7)，可得

$$(-2\pi\sin(2\pi t), -2\pi\cos(2\pi t)) = (\kappa_s)_2(t)(2\pi r\sin(2\pi t), 2\pi r\cos(2\pi t))$$

由此可求得

$$(\kappa_s)_2(t) = -\frac{1}{r}$$

上述結果與前面的計算結果吻合。

我們在《數學示例：曲線的參數化》中介紹了「單位速率」的參數化形式，並指出如用弧長 s 作為參數，便可得到這種參數化形式。如果某曲線的參數化形式具有單位速率性質，那麼上述某些數式會得到簡化。首先，單位切向量的公式可從 (1) 化簡為下式 (以下數式用 s 作為參數，以標明這些數式是基於單位速率的參數化形式)：

$$T(s) = Z'(s) \qquad (8)$$

[2]其實有向曲率的正負號還依賴於我們把 U 定義為把 T 按逆時針方向旋轉 $\frac{\pi}{2}$ 後所得的向量，如果把此定義中的「逆時針方向」改為「順時針方向」，有向曲率便會有相反的正負號。

其次，有向曲率所須滿足的等式則從 (4) 和 (7) 分別變為

$$T\text{'}(s) = \kappa_s(s)U(s) \qquad (9)$$

$$U\text{'}(s) = -\kappa_s(s)T(s) \qquad (10)$$

根據 (8)，我們有 $T\text{'}(s) = Z\text{''}(s)$。把此一結果代入 (9) 並取等號左右兩端向量的模，可得到

$$\|Z\text{''}(s)\| = \|\kappa_s(s)\|\|U(s)\|$$

由於 $U(s)$ 是單位向量，從上式可以推導出較簡單的 $\kappa_s(s)$ 計算公式如下：

$$\kappa_s(s) = \pm\|Z\text{''}(s)\| \qquad (11)$$

根據上式，若 $Z\text{''}(s) = (0,0)$，我們有 $\kappa_s(s) = 0$。若 $Z\text{''}(s) \neq (0,0)$，則 $\kappa_s(s)$ 的正負號可用以下方法確定。在用上式計算 $\kappa_s(s)$ 的過程中，我們要先後計算 $Z\text{'}(s) = (x\text{'}(s), y\text{'}(s))$ 和 $Z\text{''}(s) = (x\text{''}(s), y\text{''}(s))$。從 (3) (須把 (3) 中的變項從 t 改為 s)、(8)、和 (9)，可以推導出以下關係：

$$(x\text{''}(s), y\text{''}(s)) = \kappa_s(s)(-y\text{'}(s), x\text{'}(s))$$

從上式可見，如果 $x\text{''}(s)$ 與 $y\text{'}(s)$ 異號，或者 $x\text{'}(s)$ 與 $y\text{''}(s)$ 同號，$\kappa_s(s)$ 是正數，公式 (11) 應取正號；否則 $\kappa_s(s)$ 是負數，公式 (11) 應取負號。

舉例說，考慮方程為 $y = x$ 的直線，以下是此直線的單位速率參數化形式 (下式等於《數學示例：曲線的參數化》(11) 中的 Z_7)：

$$Z_3 : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^2; \;\; Z_3(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \qquad (12)$$

根據直觀，直線沒有任何彎曲度，因此其有向曲率應恆為 0，以下讓我們用 (9) 和 (11) 驗證這一點。首先，用 (8) 和 (3) 分別計算單位切向量和平面曲線單位法向量如下：

$$T_3(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$U_3(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

由此容易計算出

$$T_3\text{'}(s) = (0,0)$$

把上述結果代入 (9)，可得到

$$(0,0) = (\kappa_s)_3(s)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

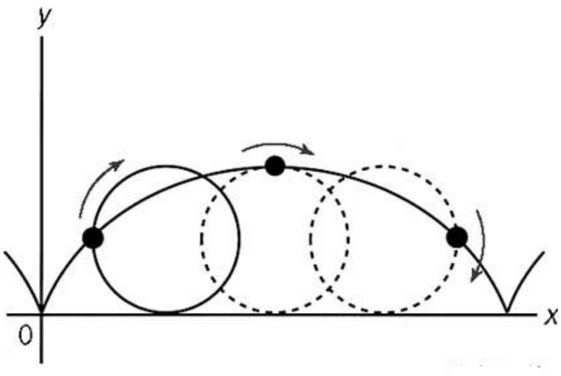
由此可推出 $(\kappa_s)_3(s)$ 恆以 0 為值。其次，從 (12) 不難計算出 $Z_3''(s) = (0,0)$，由此根據 (11)，可知對任何 s，均有

$$(\kappa_s)_3(s) = \|(0,0)\| = 0$$

即 $(\kappa_s)_3(s)$ 恆以 0 為值。上述結果是以下定理的一個特例。

定理 2：設 $Z(t)$ 為某平面曲線的光滑正則參數化形式，則 $Z(t)$ 的軌跡是一條直線當且僅當對 $Z(t)$ 的定義域中所有 t，均有 $\kappa_s(t) = 0$。

以上討論的全都是具有常值曲率的曲線，接下來讓我們看一種具有非常值曲率的曲線－擺線 (cycloid)，這是一個 r 半徑圓在 x 軸上沿著 x 軸正方向滾動時，圓周上某固定點 (即下圖中的粗黑點) 形成的軌跡，下圖展示擺線的圖象：



當 $x = 0$ 時，上圖中擺線的粗黑點位於原點位置。當 $x = 2\pi r$ 時，該粗黑點再次與 x 軸接觸。以下是擺線的參數化形式：

$$Z_4 : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2;\ \ Z_4(t) = (rt - r\sin t, r - r\cos t) \qquad (13)$$

請注意雖然擺線可以在 x 軸上無限延伸，但上式僅以開區間 $(0, 2\pi)$ 作為定義域，這是要確保擺線具有正則參數化形式。事實上，上圖顯示，擺線在 $x = 0$ 和 $x = 2\pi r$ 這兩點處出現尖端，因而很可能不具有正則性。為證明這一點，可以對 Z_4 求導，得到 (為方便接下來的計算，以下第二行使用了三角恆等式 $\cos t = 1 - 2\sin^2 \frac{t}{2}$ 和 $\sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$)：

$$\begin{aligned} Z_4'(t) &= (r - r\cos t, r\sin t) \\ &= \left(2r\sin^2\frac{t}{2}, 2r\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

由於 $Z_4'(0) = Z_4'(2\pi) = (0,0)$，可見 Z_4 在 $t = 0$ 和 $t = 2\pi$ (亦即 $x = 0$ 和 $x = 2\pi r$) 這兩點處的確不具有正則性。

由於

$$\begin{aligned}\|Z_4\text{'}(t)\| &= \sqrt{\left(2r\sin^2\frac{t}{2}\right)^2+\left(2r\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{4r^2\sin^2\frac{t}{2}\left(\sin^2\frac{t}{2}+\cos^2\frac{t}{2}\right)} \\ &= 2r\sin\frac{t}{2}\end{aligned}$$

Z_4 不是單位速率的參數化形式，因此如要求 Z_4 的有向曲率，必須運用數式 (4)、(5) 或 (7)。為使用 (4)，我們先用 (1) 和 (3) 分別求得

$$T_4(t) = \left(\sin\frac{t}{2},\cos\frac{t}{2}\right)$$

$$U_4(t) = \left(-\cos\frac{t}{2},\sin\frac{t}{2}\right)$$

對 $T_4(t)$ 求導，可得

$$T_4\text{'}(t) = \left(\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2},-\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\right)$$

把以上求得的中間計算結果代入 (4)，可得

$$\left(\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2},-\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\right) = (\kappa_s)_4(t)\left(-2r\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2},2r\sin^2\frac{t}{2}\right)$$

由此可求得

$$(\kappa_s)_4(t) = -\frac{1}{4r\sin\frac{t}{2}}$$

讀者可自行驗證，用 (5) 和 (7) 可同樣得到上述結果。

接著讓我們分析上述計算結果。首先，$(\kappa_s)_4(t)$ 的值帶有負號，這是因為 Z_4 反映運動點按順時針方向運動的軌跡。其次，$(\kappa_s)_4(t)$ 不是常值函數，這顯示擺線的彎曲程度在不斷變化。根據上式，$(\kappa_s)_4(t)$ 的絕對值在 t 趨向 0 和 2π 時趨向無窮大，並在 $t=\pi$ 時達到最小值 $\frac{1}{4r}$，這顯示上述擺線在接近其兩端處彎曲度極大，而在其中央位置則彎曲度最小，此一結果跟上面所示擺線的圖象吻合。最後，上式顯示 $(\kappa_s)_4(t)$ 與圓的半徑 r 成反比關係，這一點也符合我們的期望，因為擺線是圓上某固定點的軌跡，所以跟圓一樣，其曲率與圓的半徑也成反比關係。

連結至數學專題
連結至周家發網頁