數學示例：開集與閉集

我們在《數學示例：拓樸空間》中介紹了「拓樸空間」的概念，簡言之，一個拓樸空間就是一個集合 X 連同 X 上所有「開集」(這些集合組成的集合稱為「拓樸」) 所形成的結構，由此可見，「開集」是拓樸學中最基本的概念。在拓樸學上，與開集相對的概念是「閉集」，本文將首先介紹閉集，然後再介紹某些與開集、閉集密切相關的概念。

直觀地看，「閉集」是與「開集」相反的概念，而拓樸學正是借助「開集」來定義「閉集」。設 X 為拓樸空間，C 為 X 的子集，則 C 是 X 上的閉集(closed set)，若補集 $X - C$ 是開集。上述定義符合我們對閉集的直觀理解。舉例說，在 $\mathbb{R}$ 上，開區間 $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ 是開集，因此根據上述定義，補集 $\mathbb{R} - ((-\infty, -1) \cup (1, \infty))$ 應是閉集，而這符合我們的直觀，因為這個補集等於閉區間 $[-1, 1]$，閉區間正是閉集的一種。

我們在《數學示例：拓樸空間》中介紹了開集須滿足的四條公理，由於閉集是與開集相對的概念，從這四條公理可以推出閉集的相應性質，這是以下定理的內容。

定理 1：設 X 為拓樸空間，則

(i) X 是閉集

(ii) $\emptyset$ 是閉集

(iii) 若 C_i $(i \in I)$ 是閉集，則 $\bigcap_{i \in I} C_i$ 也是閉集

(iv) 設 n 為正整數，並且 $C_1, \ldots, C_n$ 是閉集，則 $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ 也是閉集

比較定理 1 與上述四條公理，可以看到開集與閉集的一些特殊聯繫。首先，整個 X 和 $\emptyset$ 既是開集也是閉集。其次，任意多個開集的并集也是開集，並且任意多個閉集的交集也是閉集。第三，有限多個開集的交集也是開集，並且有限多個閉集的并集也是閉集。

請注意無窮多個閉集的并集不一定是閉集，現用一個反例說明這一點。

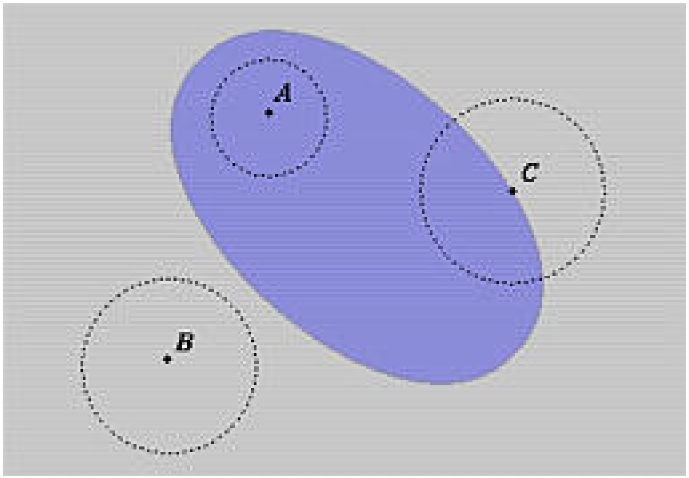
考慮 $\mathbb{R}$ 上的閉集 $C_1=[1,2]$、$C_2=[\frac{1}{2},2]$、...、$C_i=[\frac{1}{i},2]$、...，並求 $\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i$。一方面，對於任何大於 0 且不大於 2 的實數 x，都必有某個正整數 i，使得 $x\geq\frac{1}{i}$，因此 $x\in C_i$，故有 $x\in\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i$。另一方面，對於任何正整數 i，都有 $0<\frac{1}{i}$，因此 $0\notin\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i$。綜合以上兩點，我們有

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i=(0,2]$$

上述集合顯然不是閉集，因為它的補集 $(-\infty,0]\cup(2,\infty)$ 不是開集。

開集和閉集雖然在某種意義上是相反的概念，但這並不代表任何一個集合要麼是開集，要麼是閉集。一方面，容易找到「兩者皆不是」的集合。舉例說，在 $\mathbb{R}$ 上，「半閉半開區間」例如 $[0,1)$ 便既非開集又非閉集。另一方面，也存在「兩者皆是」的集合，這樣的集合在拓樸學上稱為閉開集(clopen set)。讀者只要比較《數學示例：拓樸空間》中拓樸空間的四條公理以及上面的「定理 1」，便可看到在任何拓樸空間 X 中，X 和 $\emptyset$ 都是閉開集。更有趣的是，上述網頁提到的「離散拓樸空間」中的所有集合都是閉開集，這是因為一個離散拓樸空間 X 的任何子集 S 都是開集，但 S 又是 $X-S$ 的補集，而由於 $X-S$ 是 X 的子集，故必是開集，因此根據閉集的定義，S 必也是閉集。

給定拓樸空間 X 以及它的某個子集 S，可以把 X 的元素 x 分為三個類別，下圖展示上述概念，其中整個矩形框代表某個拓樸空間 X_1，藍色的範圍代表某集合 S_1：



若存在開集 U，使得 $x\in U$ 並且 $U\subseteq S$，則 x 稱為 S 的內點(interior point)，S 的內點組成的集合稱為 S 的內部(interior)，以下記作 $\mathrm{Int}(S)$。在上圖中，A 是內點，上圖顯示一個開集 (以黑色虛線框著的部分)，該開集包括 A，並且整個開集被包含在 S_1 之內。

若存在開集 U，使得 $x \in U$ 並且 $U \subseteq X - S$，則 x 稱為 S 的外點(exterior point)，S 的外點組成的集合稱為 S 的外部(exterior)，以下記作 $\mathrm{Ext}(S)$。在上圖中，B 是外點，上圖顯示一個開集，該開集包括 B，並且整個開集被包含在 S_1 之外 (亦即在 $X_1 - S_1$ 之內)。

若任何包括 x 的開集 U 都與 S 相交，並且也與 $X-S$ 相交，則 x 稱為 S 的邊界點(boundary point)，S 的邊界點組成的集合稱為 S 的邊界(boundary)，以下記作 $\mathrm{Bd}(S)$。在上圖中，C 是邊界點，上圖顯示一個開集，該開集包括 C，並且既與 S_1 相交，也與 $X_1 - S_1$ 相交，而且任何包括 C 的開集都必然有上述特性。

容易看到，對任何 S 而言，$\{\mathrm{Int}(S), \mathrm{Ext}(S), \mathrm{Bd}(S)\}$ 構成 X 的一個劃分，即這三個集合兩兩不相交，而且它們的并集剛好等於 X。換句話說，X 中任何元素 x 要麼屬於 $\mathrm{Int}(S)$，要麼屬於 $\mathrm{Ext}(S)$，要麼屬於 $\mathrm{Bd}(S)$。惟請注意，這三個集合中可能有一個或兩個是空集。舉例說，如果 $S = X$，那麼 $\mathrm{Int}(X) = X$，$\mathrm{Ext}(X) = \emptyset$ 和 $\mathrm{Bd}(X) = \emptyset$。

上述三類集合滿足以下定理。

定理 2：設 S 為拓樸空間 X 的子集，則

(i) $\mathrm{Int}(S)$ 等於所有被包含於 S 的開集的并集

(ii) $\mathrm{Ext}(S) = \mathrm{Int}(X - S)$

(iii) $\mathrm{Bd}(S) = X - (\mathrm{Int}(S) \cup \mathrm{Ext}(S))$

接下來討論上述三類集合的開／閉性質。首先，由於開集的并集也是開集，根據「定理 2(i)」，可知 $\mathrm{Int}(S)$ 必然是開集。其次，根據「定理 2(ii)」，$\mathrm{Ext}(S)$ 可被看成集合 $X - S$ 的內部，由此根據「定理 2(i)」，可知 $\mathrm{Ext}(S)$ 必然也是開集。最後，由於 $\mathrm{Int}(S) \cup \mathrm{Ext}(S)$ 是開集，由此根據據「定理 2(iii)」，$\mathrm{Bd}(S)$ 可被看成某個開集的補集，因此根據閉集的定義，可知 $\mathrm{Bd}(S)$ 是閉集。

此外，根據「定理 2(i)」，可知 S 的任何內點 x 都屬於 S 的某個子集，故必有 $x \in S$。同理，根據「定理 2(ii)」，可知 S 的任何外點 x 都屬於 $X - S$ 的某個子集，故必有 $x \notin S$。至於 S 的邊界點，我們不能斷定它們是否屬於 S，因為兩種情況都可能發生。舉例說，如果在拓樸空間 $\mathbb{R}$ 中取集合 $S_2 = [0, 1]$，那麼 $\mathrm{Bd}(S_2) = \{0, 1\}$，而且 0 和 1 都屬於 S_2。如果取集合 $S_3 = (0, 1)$，同樣有 $\mathrm{Bd}(S_3) = \{0, 1\}$，但 0 和 1 卻不屬於 S_3。

上述邊界點的定義涉及「相交」運算，接下來介紹幾個也涉及「相交」

運算的概念。設 S 為某拓樸空間 X 的子集，x 為 X 的元素，若存在包括 x 的開集 U，使得 $U \cap S = \{x\}$ (即 $x \in U \cap S$，並且沒有其他 y 滿足 $y \in U \cap S$)，則 x 稱為 S 的孤點(isolated point)，以下把由 S 的孤點組成的集合記作 $\mathrm{Iso}(S)$。請注意根據上述定義，S 的任何孤點都屬於 S。舉例說，考慮拓樸空間 $\mathbb{R}$ 中的集合 $S_4 = (0, 1) \cup \{2\}$，故有 $2 \in S_4$。由於存在開集 $U_1 = (1.5, 2.5)$，使得 $U_1 \cap S_4 = \{2\}$，因此 2 是 S_4 的孤點。

若任何包括 x 的開集 U 都與 S 相交於至少一個有別於 x 的元素 y (即 $y \in U \cap S$ 並且 $y \neq x$)，則 x 稱為 S 的極限點(limit point)，S 的極限點組成的集合稱為 S 的導集(derived set)，以下記作 S'。請注意上述定義沒有規定 x 是否屬於 S。在提供極限點的例子前，先討論一下孤點與極限點這兩個概念之間的關係。

設 $x \in S$，我們可以根據上述孤點和極限點的定義，作出以下推導：若 x 是 S 的孤點，則 (i) 存在包括 x 的開集 U，使得沒有任何 y 滿足 $y \in U \cap S \wedge y \neq x$；若 x 是 S 的極限點，則 (ii) 對任何包括 x 的開集 U 而言，都有 y 滿足 $y \in U \cap S \wedge y \neq x$。容易看到，上述 (i) 真當且僅當 (ii) 假，因此就任何集合 S 及其任意元素 x 而言，x 要麼是 S 的孤點，要麼是 S 的極限點，兩者必居其一，而且只居其一。總結以上討論，我們有

$$\mathrm{Iso}(S) \cap S\text{'} = \emptyset \qquad (1)$$

並且

$$S \subseteq \mathrm{Iso}(S) \cup S\text{'} \qquad (2)$$

對於很多集合來說，它們的內點和邊界點都是極限點。以上圖所示的集合 S_1 為例，容易看到任何包括其內點 A 或邊界點 C 的開集都與 S_1 相交於至少一個有別於 A 或 C 的元素，因此 A 和 C (以及 S_1 的其他內點和邊界點) 都是 S_1 的極限點。S_1 的外點則顯然不滿足極限點的定義，例如上圖便顯示一個包括 B 的開集，這個開集不與 S_1 相交。基於以上討論，我們有

$$S_1\text{'} = \mathrm{Int}(S_1) \cup \mathrm{Bd}(S_1) \qquad (3)$$

不過，上述等式並非對任何集合都成立，這有兩種情況。第一種情況是有些集合的內點不是極限點。考慮我們在《數學示例：拓樸空間》中討論過的「離散拓樸空間」$X_2 = \{\spadesuit, \heartsuit\}$ (即該網頁的 X_1) 以及集合 $S_5 = \{\spadesuit\}$。由於在 X_2 中，任何集合都是開集，所以 S_5 是開集。由此我們找到一個開集 S_5，使得 $\spadesuit \in S_5$ 並且 $S_5 \subseteq S_5$，因此根據內點的定義，$\spadesuit$ 是 S_5 的內點。可是 $\spadesuit$ 卻不是 S_5 的極限點，這是因為存在一個包含 $\spadesuit$ 的開集 S_5，這個開集不與 S_5 相交於有別於 $\spadesuit$ 的元素。

第二種情況是有些集合的邊界點不是極限點。以前面討論過的拓樸空間

$\mathbb{R}$ 中的集合 $S_4 = (0,1) \cup \{2\}$ 為例，容易看到任何包括 2 的開集都必然與 S_4 相交，並且也與 $\mathbb{R} - S_4$ 相交，由此根據邊界點的定義，可知 2 是 S_4 的邊界點。另一方面，我們在上面也已指出，2 是 S_4 的孤點，由此可知 2 不是 S_4 的極限點,至此我們找到一個集合 S_4,這個集合有一個邊界點不是極限點。

在上面我們把孤點與極限點的關係總結為公式 (1) 和 (2)，其中 (2) 不是等式，這是因為在一般情況下，S' 可能包括一些不屬 S 的元素。以前面討論過的拓樸空間 $\mathbb{R}$ 中的集合 $S_4 = (0,1) \cup \{2\}$ 為例，讀者可自行驗證，S_4' $= [0,1]$，即 S_4' 包括 0 和 1 這兩點，但這兩點卻不屬於 S_4。

為把 (2) 轉化為等式，我們要把 (2) 中左端的 S 擴大。設 S 為某拓樸空間 X 的子集，x 為 X 的元素，若任何包括 x 的開集 U 都與 S 相交，則 x 稱為 S 的閉包點(closure point)，S 的閉包點組成的集合稱為 S 的閉包(closure)，記作 $\overline{S}$。請注意「閉包點」的定義跟前面「極限點」的定義很相似，兩者的差別在於極限點比閉包點多了一項要求：U 與 S 必須相交於至少一個有別於 x 的元素 y，因此 S 的任何極限點都是 S 的閉包點。此外，根據上述定義，S 的任何元素 x 都是 S 的閉包點，這是因為任何包括 x 的開集都必然與 S 相交於 x。仍以前述的 $S_4 = (0,1) \cup \{2\}$ 為例，讀者可自行驗證，S_4 的所有點，加上兩個極限點 0 和 1，都是 S_4 的閉包點，此外 S_4 再沒有其他閉包點，由此我們有 $\overline{S_4} = [0,1] \cup \{2\}$。

$\overline{S}$ 滿足以下定理。

定理 3：設 S 為某拓樸空間 X 的子集，則

(i) $\overline{S}$ 等於所有包含 S 的閉集的交集

(ii) $\overline{S} = \text{Iso}(S) \cup S$'

(iii) $\overline{S} = S \cup S$'

(iv) $\overline{S} = \text{Int}(S) \cup \text{Bd}(S)$

從「定理 3(i)」和「定理 1(iii)」，可知 $\overline{S}$ 必然是閉集。「定理 3(ii)」則顯示如果把一般集合 S 改為 $\overline{S}$，那麼前面的 (2) 便變成等式。此外，為驗證「定理 3(iii)」，考慮 $S_4 = (0,1) \cup \{2\}$，根據前面的討論，可知 S_4' $= [0,1]$ 和 $\overline{S_4} = [0,1] \cup \{2\}$，由於 $[0,1] \cup \{2\} = ((0,1) \cup \{2\}) \cup [0,1]$，我們有 $\overline{S_4} = S_4 \cup S_4$'。

比較「定理 2(i)」和「定理 3(i)」，可以看到 Int(S) 與 $\overline{S}$ 存在某種「對偶」關係：如把「定理 2(i)」中的 Int(S)、「被包含於」、「開集」和「并集」分別改為 $\overline{S}$、「包含」、「閉集」和「交集」，便可得到「定理 3(i)」。此外，Int(S) 與 $\overline{S}$ 還存在以下關係。

定理 4：設 S 為拓樸空間 X 的子集，則

(i) $\mathrm{Int}(S) \subseteq S \subseteq \overline{S}$

(ii) S 是開集當且僅當 $\mathrm{Int}(S) = S$

(iii) S 是閉集當且僅當 $\overline{S} = S$

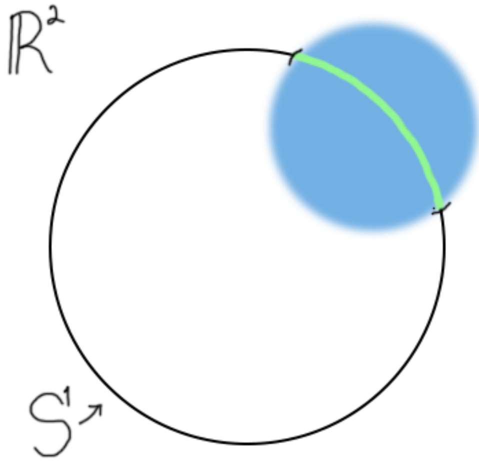
從「定理 4(iii)」和「定理 3(ii)」，可知當 S 是閉集時，前面的 (2) 便自然變成等式，無需把 S 改成 $\overline{S}$ (因為在此情況下，我們有 $\overline{S} = S$)。此外，為驗證「定理 4(i)」，考慮 $S_4 = (0,1) \cup \{2\}$。根據前面的討論，可知 $\mathrm{Int}(S_4) = (0,1)$ 和 $\overline{S_4} = [0,1] \cup \{2\}$，由於 $(0,1) \subset (0,1) \cup \{2\} \subset [0,1] \cup \{2\}$，我們有 $\mathrm{Int}(S_4) \subseteq S_4 \subseteq \overline{S_4}$。

數學上很多概念都有相應的「子概念」，例如「子集」、「子群」、「子向量空間」等，在拓樸學上同樣有「子拓樸空間」(以下簡稱「子空間」) 的概念，現引入相關定義。設 $(X, \mathcal{T}_X)$ 為拓樸空間，Y 為 X 的子集，則 $(Y, \mathcal{T}_Y)$ 構成一個子空間，其中

$$\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U : U \in \mathcal{T}_X\} \qquad (4)$$

是這個子空間上的開集組成的集合，稱為子空間拓樸(subspace topology) 或相對拓樸(relative topology)。上述定義是說，Y 上的開集包括所有 X 上的開集與 Y 的交集。

下圖展示子空間拓樸的一個例子：



上圖中黑色的圓邊[1]S^1 是拓樸空間 $\mathbb{R}^2$ 的子集。根據 (4)，我們有

$$\mathcal{T}_{S^1} = \{S^1 \cap U : U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}\}$$

藍色的開圓盤是 $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$ 的某個成員，它是 $\mathbb{R}^2$ 上的某個開球。上圖中的綠色開線段 (不包括其邊界點) 是 S^1 與上述開球的交集，因此根據上式是 $\mathcal{T}_{S^1}$ 的成員。根據我們在《數學示例：拓樸空間》中的討論，$\mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$ 包括所有由任意多個開球形成的并集，因此 $\mathcal{T}_{S^1}$ 包括所有由 S^1 上任意多個開線段形成的并集，即包括空集、整個 S^1、S^1 上的單個開線段以及 S^1 上多個不連續開線段的并集等。

引入子空間拓樸後，開集變成一個相對概念，因此在討論開集時，必須弄清楚究竟是指哪一空間上 (即相對於哪一空間) 的開集。以上圖所示的綠色開線段為例，如前所述，這個開線段是 $\mathcal{T}_{S^1}$ 的成員，所以是 S^1 上的開集。另一方面，$\mathbb{R}^2$ 上任何包括這個開線段任一點的開球都必然包括這個開線段以外的點 (請注意上圖中的綠色開線段雖然加粗了，但其實是沒有厚度的)，由此可見這個開線段不可能是 $\mathbb{R}^2$ 上的開集。

由於本章介紹的其他概念的定義都直接或間接建基於開集，所以這些概念全都是相對概念。以「閉集」這個概念為例，我們說集合 C 是子空間 Y 上的閉集，若 C 是 Y 的子集，並且補集 $Y - C$ 是 Y 上的開集，請注意此定義中的「補集」和「開集」都是相對於子空間 Y 而言的。舉例說，考慮拓樸空間 $\mathbb{R}$ 的子空間 $Y_1 = (0, 1)$ 和集合 $S_6 = (0, 0.5]$。由於 S_6 相對於 Y_1 的補集 $Y_1 - S_6 = (0.5, 1)$ 等於 $Y_1 \cap (0.5, 1)$，而 $(0.5, 1)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的開集，因此根據 (4)，$(0.5, 1)$ 是 Y_1 上的開集，由此可知 S_6 是 Y_1 上的閉集，儘管 S_6 不是 $\mathbb{R}$ 上的閉集。

另外又如「閉包」這個概念，設 S 為子空間 Y 的子集，則 S 在 Y 上的閉包 (以下記作 $\overline{S}_Y$，以表示這個閉包是相對於 Y 而言) 包括 Y 中所有滿足以下條件的元素 x：Y 上任何包括 x 的開集 U 都與 S 相交。舉例說，考慮拓樸空間 $\mathbb{R}$ 的子空間 $Y_2 = (0, 3]$ 和集合 $S_7 = (0, 1) \cup (2, 3)$，那麼 $(\overline{S_7})_{Y_2} = (0, 1] \cup [2, 3]$，這裡只解釋為何 $0 \notin (\overline{S_7})_{Y_2}$ 而 $3 \in (\overline{S_7})_{Y_2}$。首先，由於 0 不是 Y_2 的元素，根據上述定義，0 不可能屬於 Y_2 任何子集的閉包。其次，Y_2 上任何包括 3 的開集都必然是 Y_2 上某些開區間的并集，而且這些開區間中至少有一個具有 $(a, 3]$ 的形式 (其中 $0 \leq a < 3$)[2]。由於 $(a, 3]$ 與 S_7 相交，因此根據上述定義，3 是 Y_2 上 S_7 的閉包點。

[1]以下用「圓邊」和「(開／閉) 圓盤」區別與圓相關的不同維度下的圖形，其中「圓邊」僅包含一維的圓形曲線，不包含被圓包圍的二維平面；「開圓盤」則僅包含被圓包圍的二維平面，不包含其邊界；「閉圓盤」則既包含被圓包圍的二維平面，也包含其邊界。

[2]請注意 $(a, 3] = Y_2 \cap (a, 4)$，而 $(a, 4)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的開集，因此根據 (4)，$(a, 3]$ 是 Y_2 上的開集。

可是，如果我們每次考慮這些相對概念時，都要透過子空間上的開集和公式 (4)，這將頗為不便，但幸好我們可以通過一些定理直接考慮這些相對概念，以下提供與閉集和閉包有關的定理。

定理 5：設 Y 為拓樸空間 X 的子空間，S 是 Y 的子集，則

(i) S 是 Y 上的閉集當且僅當存在 X 上的閉集 C 使得 $S = Y \cap C$

(ii) 設 $\overline{S}_Y$ 和 $\overline{S}_X$ 分別代表 S 在 Y 和 X 上的閉包，則 $\overline{S}_Y = Y \cap \overline{S}_X$

以前面討論過的子空間 $Y_1 = (0, 1)$ 及其子集 $S_6 = (0, 0.5]$ 為例，由於存在 $\mathbb{R}$ 上的閉集 $[0, 0.5]$ 使得 $S_6 = Y_1 \cap [0, 0.5]$，根據「定理 5(i)」，可直接推得 S_6 是 Y_1 上的閉集。另外又如前面討論過的子空間 $Y_2 = (0, 3]$ 和集合 $S_7 = (0, 1) \cup (2, 3)$，容易看到，$(\overline{S_7})_{\mathbb{R}} = [0, 1] \cup [2, 3]$，由此根據「定理 5(ii)」，可直接求得

$$
\begin{aligned}
(\overline{S_7})_{Y_2} &= Y_2 \cap (\overline{S_7})_{\mathbb{R}} \\
&= (0, 3] \cap ([0, 1] \cup [2, 3]) \\
&= ((0, 3] \cap [0, 1]) \cup ((0, 3] \cap [2, 3]) \\
&= (0, 1] \cup [2, 3]
\end{aligned}
$$

這跟上面求得的結果一致。

連結至數學專題
連結至周家發網頁