數學示例：賦範空間

賦範空間(normed space) 是「泛函分析」的基本課題。賦範空間又稱「賦範向量空間」(normed vector space)，這個名稱告訴我們，賦範空間是向量空間(vector space) 的一個子類。由於我們在《感受伽羅瓦：向量空間與子域》中詳細介紹了向量空間，這裡不擬重複向量空間的定義，只想指出向量空間涉及兩個集合 V 和 $\mathbb{F}$，其中 V 上的元素稱為「向量」(vector)，其中必須至少包含一個零向量[1]，向量之間可以進行加法運算，並且 $(V, +)$ 構成一個交換群；$\mathbb{F}$ 的元素則稱為「純量」(scalar)，純量之間可以進行加法和乘法運算，並且 $(\mathbb{F}, +, \times)$ 構成一個域[2]。此外，純量與向量之間還可進行「純量乘法」(scalar multiplication) 運算，這種運算滿足乘法對加法的分配性和其他一些性質。

為表明某向量空間涉及兩個集合 V 和 $\mathbb{F}$，可以把該向量空間稱為域 $\mathbb{F}$ 上的向量空間 V，並用符號表示成 $V_{\mathbb{F}}$。但由於只有 V 才是向量空間定義中的主角，如不致引起混淆，在稱呼向量空間時，也可略去域 $\mathbb{F}$ 不提，僅用 V 表示向量空間。

賦範空間就是在一個向量空間之上加上一個稱為範數(norm) 的一元實值函數而得的結構 (就正如「距離空間」是在一個集合之上加上一個「距離函數」而得的結構一樣，但請注意「距離空間」是二元函數，而「範數」卻是一元函數)。在數學上，一般使用符號 $\| \;\|$ 表示範數。範數須滿足一系列公理，設 x, y 為向量空間定義中向量集合 V 的成員，a 為純量集合 $\mathbb{F}$ 的成員，則

(i) $\|x\| \geq 0$

(ii) $\|x\| = 0$ 當且僅當 $x = 0$

(iii) $\|ax\| = |a|\|x\|$

[1]本文用同一個符號 0 代表「實數零」、「零向量」以及下文將要介紹的「零函數」，雖然這是三個不同概念，但根據上下文，應不會引起混淆。

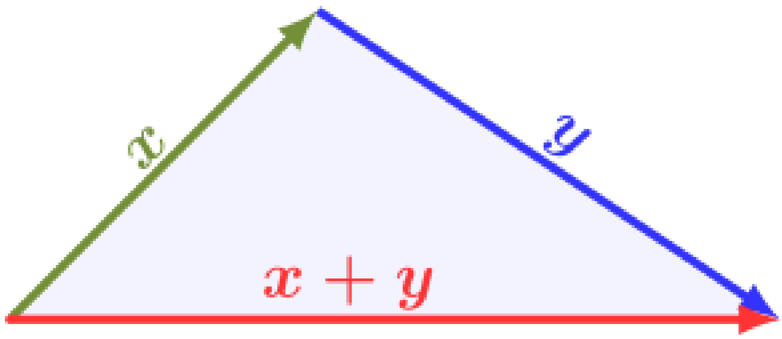
[2]有關「交換群」的定義，請參閱《感受伽羅瓦：群的基本概念》；有關「域」的定義，請參閱《感受伽羅瓦：環及其子類》。

(iv) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

由於賦範空間的定義包含一個向量空間 V 和一個範數 $\| \|$，嚴格地說，賦範空間應表示成有序對 $(V, \| \|)$ 的形式，但若在某些特殊情況下或根據上下文，範數 $\| \|$ 不言而喻，那麼也可把 $\| \|$ 省略，即僅用 V 代表賦範空間。

上列範數的四條公理是數學家把物理學上向量和向量的「模」(modulus, 即長度) 推廣到一般向量空間的結果，向量空間 V 的元素被看成物理學上的向量，範數則是這些向量的模。公理 (i) － (iii) 是說任何向量的模都不可能是負數，只有零向量 0 的模才是 0。此外，對向量進行純量乘法所得向量的範數等於該純量的絕對值乘以原向量的範數。由此可見，公理 (i) － (iii) 反映我們對向量模的直觀認識。

公理 (iv) 中的不等式一般稱為「三角不等式」，這條不等式雖然跟《數學示例：距離空間》中列出的「三角不等式」在形式上有所不同，但兩者其實陳述同一個事實。如把公理 (iv) 中的 $x+y$ 看成 x 和 y 的「合向量」，那麼 x、y 和 $x+y$ 構成一個三角形，而公理 (iv) 是說三角形兩條邊長度之和大於或等於第三條邊的長度，如下圖所示：



從直觀上看，「範數」與我們在《數學示例：距離空間》中介紹的「距離」概念有相通之處，因為空間中兩點的距離可以看成連接這兩點的向量的長度。事實上，給定一個賦範空間，可以利用其範數 $\| \|$ 定義以下距離函數 d：

$$d(x, y) = \|x - y\| \qquad (1)$$

可以證明，上式定義的 d 符合《數學示例：距離空間》中列出的距離函數所須滿足的四條公理，由此可知任何賦範空間都是距離空間。

向量空間的典型例子是域 $\mathbb{R}$ 上的向量空間 $\mathbb{R}^n$，這個空間上的向量具有 $(x_1, \ldots, x_n)$ 的形式 (其中 $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$，稱為向量的「坐標」)，零向量是 $(0, \ldots, 0)$，純量則是實數。向量之間可以進行加法 (以及其逆運算減法)，此即各個坐標各自相加的加法。純量也可與向量進行純量乘法，即把純量與

向量的各個坐標逐一相乘。舉例說，若 $x = (6, -2)$，$y = (3, 4)$，$a = -\frac{1}{2}$，則 $x + y = (9, 2)$，$ax = (-3, 1)$。

如為上述向量空間定義以下範數：

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 = \sqrt{{x_1}^2 + \ldots + {x_n}^2} \qquad (2)$$

便可得到一個賦範空間 $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_1)$。舉例說, 若 $x = (6, -2)$, 則 $\|x\|_1 = 2\sqrt{10}$。利用上述 (1) 和 (2)，可以定義以下距離函數：

$$\begin{aligned} d_1((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) &= \|(x_1, \ldots, x_n) - (y_1, \ldots, y_n)\|_1 \\ &= \|(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)\|_1 \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} \end{aligned}$$

上述距離函數正好等於《數學示例：距離空間》中的距離函數 d_3 (即該網頁的公式 (3))，由此驗證了 $\mathbb{R}^n$ 這個賦範空間也是距離空間。

我們在《數學示例：距離空間》中討論了序列空間, 由於序列可被看成包含 (可數) 無窮多個坐標的有序組合, 我們可以像處理 $\mathbb{R}^n$ 那樣把序列空間處理成向量空間, 這個空間上的向量具有 $(x_n)_{n=1}^{\infty} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ 的形式 (其中 $x_n \in \mathbb{R}$), 零向量是所有項均為 0 的「零序列」, 即 $(0)_{n=1}^{\infty} = (0, 0, 0, \ldots)$, 純量則是實數。舉例說, 若 $x = (\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$, $y = (\frac{1}{2n})_{n=1}^{\infty} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots)$, $a = -\frac{1}{2}$，則 $x + y = (\frac{3}{2n})_{n=1}^{\infty} = (\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{6}, \ldots)$，$ax = (-\frac{1}{2n})_{n=1}^{\infty} = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, \ldots)$。

如同距離空間的情況，對序列施加不同的限制，並定義適當的範數，便可得到不同的賦範序列空間。一種常見限制是規定序列須為有界序列，這類序列組成的集合在《數學示例：距離空間》中記作 l^∞。對於 l^∞，可定義以下範數：

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_2 = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \qquad (3)$$

舉例說，$x = (\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ 顯然是有界序列，並且 $\|x\|_2 = \sup\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\} = 1$。利用上述 (1) 和 (3)，可以定義以下距離函數：

$$\begin{aligned} d_2((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) &= \|(x_n)_{n=1}^{\infty} - (y_n)_{n=1}^{\infty}\|_2 \\ &= \|(x_n - y_n)_{n=1}^{\infty}\|_2 \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n| \end{aligned}$$

上述距離函數正好等於《數學示例：距離空間》中的距離函數 d_4 (即該網頁的公式 (4))，由此驗證了 l^∞ 這個賦範空間也是距離空間。

另一種對序列的限制是規定序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 須滿足 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ (其中

$p \geq 1$)，這類序列組成的集合在《數學示例：距離空間》中記作 l^p。對於 l^p，可定義以下範數：

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_3 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (4)$$

舉例說，我們在《數學示例：距離空間》中證明了 $(\frac{1}{2^n})_{n=1}^{\infty}$ 是 l^1 的成員。根據上式，我們有 $\|(\frac{1}{2^n})_{n=1}^{\infty}\|_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1$。利用上述 (1) 和 (4)，可以定義以下距離函數：

$$\begin{aligned} d_3((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) &= \|(x_n)_{n=1}^{\infty} - (y_n)_{n=1}^{\infty}\|_3 \\ &= \|(x_n - y_n)_{n=1}^{\infty}\|_3 \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

上述距離函數正好等於《數學示例：距離空間》中的距離函數 d_5 (即該網頁的公式 (6))，由此驗證了 l^p 這個賦範空間也是距離空間。

我們在《數學示例：距離空間》中也討論了函數空間，請注意序列可被看成一種以自然數域作為定義域的函數，例如序列 $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ 便可看成把 1 映射為 1，2 映射為 $\frac{1}{2}$，3 映射為 $\frac{1}{3}$，...，n 映射為 $\frac{1}{n}$，... 的函數。因此我們可以像處理序列那樣把函數處理成向量空間，這個空間上的向量是有相同定義域 X 的實值函數，零向量是把 X 中任何元素均映射為 0 的「零函數」(這個函數可記作 0，即 $0(x) = 0$)，純量則是實數。任何兩個向量 f 和 g 之間可以進行加法 (以及其逆運算減法)，其結果等於這樣的一個函數 (以下記作 $f + g$)，$f + g$ 把 X 中每個元素 x 映射為 $f(x) + g(x)$。任何純量 a 與向量 f 之間也可進行純量乘法，其結果等於這樣的一個函數 (以下記作 af), af 把 X 中每個元素 x 映射為 $af(x)$。

舉例說，若 $f(x) = x$ 和 $g(x) = x^2$ 是定義於 $[0, 1]$ 上的函數，$a = -\frac{1}{2}$，那麼 $f + g$ 就是這樣的函數，它把 $[0, 1]$ 上的任何 x 映射為 $x + x^2$，例如把 0 映射為 0，$\frac{1}{2}$ 映射為 $\frac{3}{4}$ 等；af 則是這樣的函數，它把 $[0, 1]$ 上的任何 x 映射為 $-\frac{1}{2}x$，例如把 0 映射為 0，$\frac{1}{2}$ 映射為 $-\frac{1}{4}$ 等。

如同距離空間的情況，對函數施加不同的限制，並定義適當的範數，便可得到不同的賦範函數空間。一種常見限制是規定函數必須是定義於閉區間 $[a, b]$ 上的實值連續函數，這類函數組成的集合在《數學示例：距離空間》中記作 $C[a, b]$。對於 $C[a, b]$，可定義以下範數：

$$\|f\|_4 = \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \qquad (5)$$

舉例說，$f(x)=x$ 是 $C[a,b]$ 的成員，並且 $\|f\|_4=\max_{x\in[0,1]}|x|=1$。利用上述 (1) 和 (5)，可以定義以下距離函數：

$$\begin{aligned} d_4(f,g) &= \|f-g\|_4 \\ &= \max_{x\in[a,b]}|(f-g)(x)| \\ &= \max_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)| \end{aligned}$$

上述距離函數正好等於《數學示例：距離空間》中的距離函數 d_6 (即該網頁的公式 (7))，由此驗證了 $(C[a,b],\|\ \|_4)$ 也是距離空間。

對於 $C[a,b]$, 除了 (5) 所示的範數外, 還可定義以下範數 (在下式中, $p\geq 1$)：

$$\|f\|_5=\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (6)$$

舉例說，設 $p=1$，$[a,b]=[0,1]$ 和 $f(x)=x$，則 $\|f\|_5=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$。利用上述 (1) 和 (6)，可以定義以下距離函數：

$$\begin{aligned} d_5(f,g) &= \|f-g\|_5 \\ &= \left(\int_a^b |(f-g)(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

上述距離函數正好等於《數學示例：距離空間》中的距離函數 d_7 (即該網頁的公式 (8))，由此驗證了 $(C[a,b],\|\ \|_5)$ 也是距離空間。

對函數的另一種限制是規定函數必須是定義於某一定義域 X 上的實值有界函數，這類函數組成的集合在《數學示例：距離空間》中記作 $B(X)$。對於 $B(X)$，可定義以下範數：

$$\|f\|_6=\sup_{x\in X}|f(x)| \qquad (7)$$

舉例說，$f(x)=x$ 是定義於 $(0,1)$ 上的實值有界函數，並且 $\|f\|_6=\sup_{x\in(0,1)}x=1$。利用上述 (1) 和 (7)，可以定義以下距離函數：

$$\begin{aligned} d_6(f,g) &= \|f-g\|_6 \\ &= \sup_{x\in X}|(f-g)(x)| \\ &= \sup_{x\in X}|f(x)-g(x)| \end{aligned}$$

上述距離函數正好等於《數學示例：距離空間》中的距離函數 d_8 (即該網頁的公式 (9))，由此驗證了 $B(X)$ 這個賦範空間也是距離空間。

前面說過，所有賦範空間都是距離空間，而我們在上面討論的 $\mathbb{R}^n$、l^∞、l^p、$(C[a,b], \|\ \|_4)$、$(C[a,b], \|\ \|_5)$ 和 $B(X)$ 除了是賦範空間外，也是距離空間，因為它們的範數都可改寫成距離函數。現在的問題是，是否所有距離空間都是賦範空間？答案是否定的，這有兩方面原因。

首先，距離空間的定義是建基於一個集合加上一個距離函數，這個集合不一定要構成一個向量空間。如果一個距離空間根本不是向量空間，就不可能是賦範空間。以下讓我們提供這樣的一個例子，設 X 為任意集合，如定義以下距離函數 (在下式中，$x, y \in X$)：

$$d_7(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{若} x = y \\ 1 & \text{若} x \neq y \end{cases} \qquad (8)$$

便會得到一個離散距離空間(discrete metric space)。請注意上述定義適用於任何集合 X，例如如果 $X = \{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit\}$，那麼便有 $d_7(\spadesuit, \spadesuit) = 0$ 和 $d_7(\heartsuit, \clubsuit) = 1$，這裡不必對 $\spadesuit$、$\heartsuit$、$\clubsuit$ 和 $\diamondsuit$ 定義任何代數運算，因此 X 不是向量空間，儘管 (X, d_7) 是一個距離空間。

其次，某些距離空間的距離函數不能由任何範數改寫而成，因此這些距離空間不是賦範空間 (即使它們是向量空間)。前面討論過的序列空間 l^∞、l^p 等都是賦範空間，但我們還可以定義另一種序列空間。考慮所有實值 (有界或無界) 序列，以下把這些序列組成的集合記作 s。設 $(x_n)_{n=1}^\infty$ 和 $(y_n)_{n=1}^\infty$ 為 s 的成員，現定義以下距離函數：

$$d_8((x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \right) \qquad (9)$$

請注意即使 $(x_n)_{n=1}^\infty$ 和 $(y_n)_{n=1}^\infty$ 不是有界序列，上述距離函數的值仍然是有限實數，這是因為 (9) 右端級數中的每一項都是正實數，由於 $\frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n - y_n|} < 1$，我們有

$$\frac{1}{2^n} \left(\frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \right) < \frac{1}{2^n}$$

另一方面，我們又有 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$，由此根據序列的「比較審斂法」(comparison test)，可知 (9) 右端的級數必然收斂，即等於一個有限實數。此外，可以證明 (9) 所定義的距離函數 d_8 滿足距離函數的公理。

接著證明 (s, d_8) 不是賦範空間，即證明 d_8 不能根據上面 (1) 由某一範數推導而來，為此須先引入以下定理。

定理 1：設 d 為根據 (1) 由某賦範空間的範數推導而得的距離函數，則對該空間中任何向量 x, y, z 和任何純量 a，均有

(i) $d(x+z, y+z) = d(x, y)$

(ii) $d(ax, ay) = |a|d(x, y)$

以下我們證明 d_8 並不滿足「定理 1(ii)」，為此設 $x = (1)_{n=1}^{\infty}$、$y = (\frac{1}{2})_{n=1}^{\infty}$ 和 $a = \frac{1}{2}$，即 x 和 y 分別是以 1 和 $\frac{1}{2}$ 為常值的序列。一方面，我們有

$$\begin{aligned} d_8(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{|1 - \frac{1}{2}|}{1 + |1 - \frac{1}{2}|} \right) \\ &= \frac{1}{3} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{3} \times 1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

由此有

$$|a|d_8(x, y) = \frac{1}{6}$$

另一方面，我們又有 $ax = (\frac{1}{2})_{n=1}^{\infty}$、$ay = (\frac{1}{4})_{n=1}^{\infty}$，由此有

$$\begin{aligned} d_8(ax, ay) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{|\frac{1}{2} - \frac{1}{4}|}{1 + |\frac{1}{2} - \frac{1}{4}|} \right) \\ &= \frac{1}{5} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{5} \times 1 \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

上述計算結果顯示 $d_8(ax, ay) \neq |a|d_8(x, y)$，由此根據「定理 1(ii)」，可知 d_8 不是由某賦範空間的範數推導而得的距離函數。

連結至數學專題
連結至周家發網頁