

數學示例：流形及其定向

我們在《數學示例：向量與向量場》引入了「流形」的概念，並在《數學示例：微分形式的積分》和《數學示例：廣義斯托克斯定理》中介紹了流形的「定向」。可是，上述有關流形及其定向的討論僅停留於直觀層面，而且只適用於 \mathbb{R}^n 空間。本文主旨是介紹流形及其定向的嚴格定義，以擴大上述概念的應用範圍。

根據是否有邊界，可以把流形(manifold) 分為兩種：閉合流形(closed manifold)¹，即沒有邊界的流形和有邊界流形(manifold with boundaries)，以下首先介紹第一種。粗略地說， m 維閉合流形 M 是指一種在局部範圍內可被視作 \mathbb{R}^m 空間的某個子集的拓樸空間²。在上句中，「局部範圍」和「可被視作」都是模糊概念。為得到精確的定義，要把這兩個概念分別用「 M 的開子集」和「同胚」予以取代（其中「開集」和「同胚」都是拓樸學概念，請參閱《數學示例：開集與閉集》和《數學示例：連續函數與同胚》對這兩個概念的詳細介紹。

引入上述概念後，便可以用精確的數學語言把閉合流形描述為具有以下性質的一種拓樸空間： M 由一系列開子集 M_i 覆蓋（即 $M = \bigcup_i M_i$ ），對應每個開子集 M_i 都有一個把 \mathbb{R}^m 的某個開子集 R_i 映射到 M_i 之上的同胚函數 $\phi_i: R_i \rightarrow M_i$ 。我們把這些函數稱為坐標卡(coordinate chart)³，因為它們為 M 上的點提供 \mathbb{R}^m 上的坐標， M 上所有坐標卡組成的集合則稱為 M 的圖冊(atlas)。根據上述定義， M 的每一點都屬於某個開集 M_i ，而且這個

¹請注意「閉合流形」和拓樸學中的「閉集」(closed set) 的英語名稱雖然都包含“closed”這個詞，但兩者是互不相干的概念。為區分這兩者，本文採用略有不同的中譯名（一個包含而另一個則不含「合」字）。

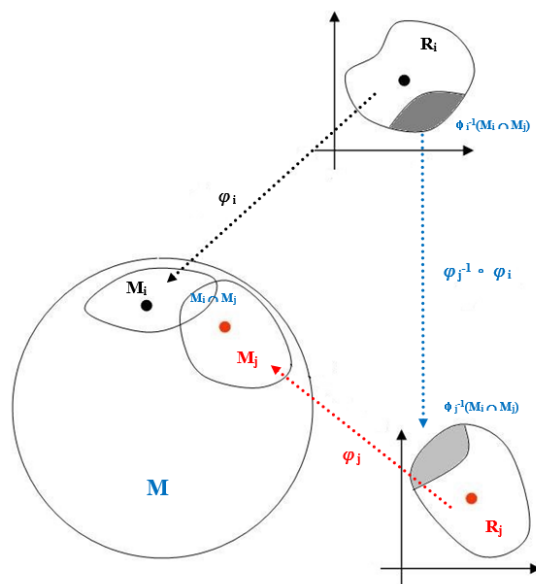
²有關「拓樸空間」(topological space) 的定義，請參閱《數學示例：拓樸空間》。另請注意，流形並非一般的拓樸空間，而是具有「豪斯多夫」(Hausdorff) 性質和「第二可數」(second countable) 性質的拓樸空間。由於這些性質是拓樸學的概念，本文不擬作詳細介紹，對這兩種性質感興趣的讀者可參閱《數學示例：分離公理》和《數學示例：可數性公理》。

³不同教科書對「坐標卡」的定義可以有頗大差異，有些書把坐標卡定義為把 R_i 映射到 M_i 的函數，有些則把坐標卡定義為把 M_i 映射到 R_i 的函數，本文採用第一種定義。請注意此一定義跟《數學示例：曲面的參數化》採用的「坐標卡」以及《數學示例：微分形式的積分》採用的「參數化形式」的定義一致。

M_i 與 \mathbb{R}^m 的某個開子集 R_i 同胚。由此我們便可以說， M 在局部範圍內可被視為 \mathbb{R}^m 空間的某個子集。

如果 M 本身已是 \mathbb{R}^m 空間的某個開子集，它的圖冊只包含一個坐標卡。以 \mathbb{R}^2 為例，把上述定義套用於這個空間，只需使用一個坐標卡，這個坐標卡的定義域和對應域就是 \mathbb{R}^2 本身 (\mathbb{R}^2 是自身的開子集)，同胚函數則是恆等函數 (因為 \mathbb{R}^2 與自身同胚)。

在一般情況下， M 不是 \mathbb{R}^m 空間的開子集。為免過於複雜，以下假設 M 是連通的。在此情況下， M 的圖冊包含多於一個坐標卡，並且每個 M_i 都與至少一個 M_j (這裡 $i \neq j$) 重疊⁴。為讓讀者易於理解，現把上述情況表示成下圖：



上圖顯示 2 維閉合流形 M 的兩個坐標卡 ϕ_i 和 ϕ_j ，它們分別把 \mathbb{R}^2 的兩個開子集 R_i 和 R_j 映射到 M 的兩個開子集 M_i 和 M_j 之上。 M_i 和 M_j 互有重疊，它們的重疊部分 $M_i \cap M_j$ 既是 R_i 的子集 $\phi_i^{-1}(M_i \cap M_j)$ 在 ϕ_i 下的映象，也是 R_j 的子集 $\phi_j^{-1}(M_i \cap M_j)$ 在 ϕ_j 下的映象。上圖還顯示函數 $\phi_j^{-1} \circ \phi_i$ ，這個函數把 $\phi_i^{-1}(M_i \cap M_j)$ 映射到 $\phi_j^{-1}(M_i \cap M_j)$ 之上⁵。由於這個函數的作用是把 $M_i \cap M_j$ 在 R_i 上的坐標轉換成 R_j 上的坐標，故稱轉

⁴有關「連通性」(connectedness)，請參閱《數學示例：連通性》。由於 M_i 、 M_j 等是 M 的開子集，根據該網頁，如果 M_i 、 M_j 等互不重疊，那麼 M 是不連通的。

⁵嚴格地說，這個函數應寫作 $(\phi_j^{-1} \circ \phi_i)|_{\phi_i^{-1}(M_i \cap M_j)}$ ，即這個函數是以 R_i 的子集 $\phi_i^{-1}(M_i \cap M_j)$ (而非整個 R_i) 作為定義域，但為免令數式過於繁複，這裡採用不太嚴格的寫法。

換函數(transition function)。讀者應可看到，上圖還隱含著另一個轉換函數 $\phi_i^{-1} \circ \phi_j$ 。

對於 M 的某個圖冊 A 的任意兩個坐標卡 $\phi_i : R_i \rightarrow M_i$ 和 $\phi_j : R_j \rightarrow M_j$ ，只要 $M_i \cap M_j \neq \emptyset$ ，便可定義它們之間的轉換函數 $\phi_i^{-1} \circ \phi_j$ 和 $\phi_j^{-1} \circ \phi_i$ 。由於這些轉換函數全都是把 \mathbb{R}^m 的某個子集映射到 \mathbb{R}^m 的另一個子集的函數，我們可以討論它們的「可微性」(differentiability)。現在如果 M 的所有轉換函數都是可微的， M 便稱為**可微流形**(differentiable manifold)。當然我們還可以討論這些轉換函數的高階可微性以至無限階可微性(又稱光滑性)，如果 M 的圖冊 A 的所有轉換函數都是光滑的，我們便說 (M, A) 是**光滑流形**(smooth manifold)。

以上有關閉合流形的定義除適用於常見的低維閉合幾何圖形(例如點、圓、球面等)外，還適用於其他較難理解的高維閉合圖形以至非圖形。請注意流形 M 雖然在局部範圍內與 \mathbb{R}^m 同胚，但這並不代表 M 必然是 \mathbb{R}^m 中的圖形。事實上， M 可能是 \mathbb{R}^n (其中 $n > m$) 中的圖形(例如圓是 1 維流形，但卻是 \mathbb{R}^2 或 \mathbb{R}^3 中的圖形)，或甚至不是任何 \mathbb{R}^n 空間中的圖形。因此流形此一概念適用於各種抽象空間，例如物理學上的 4 維「時空」(spacetime)、「相空間」(phase space) 等。

以下讓我們看一個較抽象的例子—「1 維實射影空間」(1-dimensional real projective space)(記作 \mathbb{RP}^1)，這個空間的成員包括所有通過原點的平面直線。這些直線可用 \mathbb{R}^2 上異於 $(0,0)$ 的一點 (p_1, p_2) 來表示，代表通過 $(0,0)$ 與 (p_1, p_2) 的那條直線。但由於通過 $(0,0)$ 與 (p_1, p_2) 的直線必然也通過 (kp_1, kp_2) 這一點，其中 k 是任何非零實數，我們應把點 (p_1, p_2) 與 (kp_1, kp_2) 視為代表同一條直線。由此可以定義等價關係 \sim ，設 $(p_1, p_2), (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ ，則

$$(p_1, p_2) \sim (q_1, q_2) \text{ 當且僅當存在 } k \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ 使得 } (q_1, q_2) = (kp_1, kp_2) \quad (1)$$

\mathbb{RP}^1 的成員就是上述等價關係的等價類，以下把包含 (p_1, p_2) 的等價類記作 $(p_1 : p_2)$ ，例如 $(1 : 1)$ 便是 \mathbb{RP}^1 的一個成員，代表通過 $(0,0)$ 且斜率為 1 的那條直線(這個成員也可寫作 $(-1 : -1)$ 、 $(\sqrt{2} : \sqrt{2})$ 等等)； $(0 : 1)$ 是 \mathbb{RP}^1 的另一個成員，代表通過 $(0,0)$ 且斜率為 ∞ 的那條直線(即豎線)(這個成員也可寫作 $(0 : -1)$ 、 $(0 : \sqrt{2})$ 等等)。總括而言， \mathbb{RP}^1 的成員 $(p_1 : p_2)$ 代表通過 $(0,0)$ 且斜率為 $\frac{p_2}{p_1}$ 的那條直線。

接著定義 \mathbb{RP}^1 的兩個子集： $M_I = \{(x_1 : x_2) \in \mathbb{RP}^1 : x_1 \neq 0\}$ 和 $M_{II} = \{(x_1 : x_2) \in \mathbb{RP}^1 : x_2 \neq 0\}$ ，可以證明這兩個都是 \mathbb{RP}^1 的開子集。以下是這兩個開子集的坐標卡及其逆函數：

$$\phi_I : \mathbb{R} \rightarrow M_I; \phi_I(t) = (1 : t) \quad (2)$$

$$\phi_{II} : \mathbb{R} \rightarrow M_{II}; \phi_{II}(t) = (t : -1) \quad (3)$$

$$\phi_I^{-1} : M_I \rightarrow \mathbb{R}; \phi_I^{-1}(x_1 : x_2) = \frac{x_2}{x_1} \quad (4)$$

$$\phi_{II}^{-1} : M_{II} \rightarrow \mathbb{R}; \phi_{II}^{-1}(x_1 : x_2) = -\frac{x_1}{x_2} \quad (5)$$

由於上述函數是同胚函數，而且 $M_I \cup M_{II} = \mathbb{RP}^1$ ，可知 $A_I = \{\phi_I, \phi_{II}\}$ 構成 \mathbb{RP}^1 的一個圖冊。

接著考慮 $M_I \cap M_{II} = \{(x_1 : x_2) \in \mathbb{RP}^1 : x_1 \neq 0 \wedge x_2 \neq 0\}$ ，從以上數式，可求得以下轉換函數：

$$\phi_{II}^{-1} \circ \phi_I(t) = -\frac{1}{t} \quad (6)$$

$$\phi_I^{-1} \circ \phi_{II}(t) = -\frac{1}{t} \quad (7)$$

以上兩個轉換函數的定義域 (即 $\phi_I^{-1}(M_I \cap M_{II})$ 和 $\phi_{II}^{-1}(M_I \cap M_{II})$) 都是 $\{t \in \mathbb{R} : t \neq 0\}$ ，因此都是光滑函數，由此可知 (\mathbb{RP}^1, A_I) 是 1 維閉合光滑流形。

一個流形 M 可以有不只一個圖冊，以 \mathbb{RP}^1 為例，除了前面介紹的 A_I 外， \mathbb{RP}^1 還有另一個圖冊 A_{II} ，這個圖冊包含以下兩個坐標卡：

$$\phi_{III} : \mathbb{R} \rightarrow M_I; \phi_{III}(t) = (-1 : t) \quad (8)$$

$$\phi_{IV} : \mathbb{R} \rightarrow M_{II}; \phi_{IV}(t) = (t : 1) \quad (9)$$

讀者可自行驗證，從以上數式，可求得以下轉換函數：

$$\phi_{IV}^{-1} \circ \phi_{III}(t) = -\frac{1}{t} \quad (10)$$

$$\phi_{III}^{-1} \circ \phi_{IV}(t) = -\frac{1}{t} \quad (11)$$

從以上結果可見 (\mathbb{RP}^1, A_{II}) 也是 1 維閉合光滑流形。

接下來介紹閉合流形的定向。我們在《數學示例：微分形式的積分》中直觀地介紹了 \mathbb{R}^n ($0 \leq n \leq 3$) 空間的某個開子集的定向的概念，現把這些概念推廣到一般的流形。請注意流形定向可以有多種定義，以下提供的定義僅依賴於流形的坐標卡和轉換函數。設 ϕ_i 和 ϕ_j 為閉合流形 M 的兩個坐標卡使得 $M_i \cap M_j \neq \emptyset$ ，如果轉換函數 $\phi_i^{-1} \circ \phi_j$ 和 $\phi_j^{-1} \circ \phi_i$ 的雅可比行列式 (Jacobian determinant) 在各自定義域的各點處恆為正數，我們便說

ϕ_i 與 ϕ_j 互相「正重疊」(overlapping positively)。我們在《數學示例：前推與拉回》中介紹了「雅可比矩陣」,「雅可比行列式」就是這個矩陣的行列式。

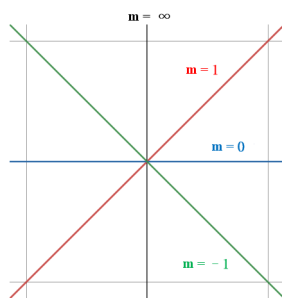
如果 M 有某個圖冊 A , 使得 A 中所有有重疊對應域的坐標卡之間的所有轉換函數都互相正重疊, 我們便說 M 是「可定向」的, 否則是「不可定向」的。設 M 為可定向的閉合流形, 可以證明「互相正重疊」是一個等價關係, 由此可以把 M 中互相正重疊的坐標卡 (這些坐標卡可以來自不同圖冊) 組成一個等價類。可以證明對任何可定向閉合流形而言, 這樣的等價類只有兩個, 這兩個等價類稱為 M 的「定向」。設 ϕ_i 和 ϕ_j 為分屬 M 的兩個定向的坐標卡, 我們可以利用集合論的符號, 把 M 的這兩個定向記作 $[\phi_i]$ 和 $[\phi_j]$ 。

以前面討論過的 $\mathbb{R}P^1$ 為例, 現根據 (6) 和 (7) 計算轉換函數 $\phi_{II}^{-1} \circ \phi_I$ 和 $\phi_I^{-1} \circ \phi_{II}$ 的雅可比行列式。由於這兩個都是把 \mathbb{R} 映射到 \mathbb{R} 的函數, 它們的雅可比矩陣都是 1×1 矩陣, 都等於

$$\left[\frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{t} \right) \right] = \left[\frac{1}{t^2} \right]$$

因此這兩個函數的雅可比行列式都是 $\frac{1}{t^2}$ 。由於這個雅可比行列式恆為正數, 可知圖冊 A_I 中的兩個坐標卡 ϕ_I 和 ϕ_{II} 互相正重疊。類似地, 圖冊 A_{II} 中的兩個坐標卡 ϕ_{III} 和 ϕ_{IV} 也互相正重疊, 由此可知 $\mathbb{R}P^1$ 是可定向流形。

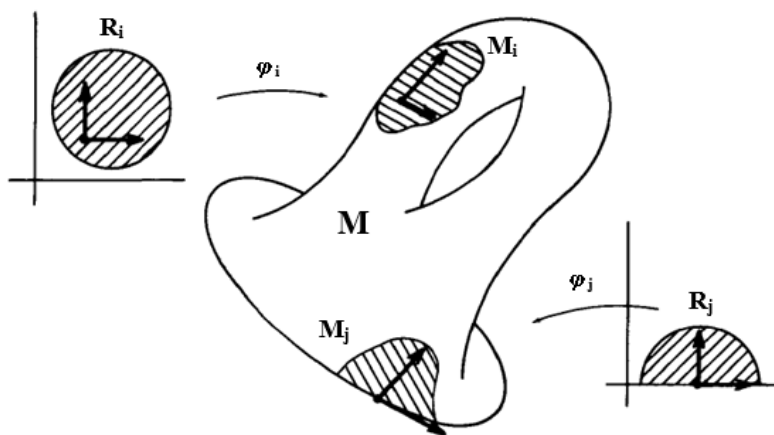
根據以上的討論, ϕ_I 與 ϕ_{II} 互相正重疊, ϕ_{III} 與 ϕ_{IV} 也互相正重疊。讀者可自行驗證, ϕ_I 與 ϕ_{III} 並不互相正重疊, 因此 $\{\phi_I, \phi_{II}\}$ 和 $\{\phi_{III}, \phi_{IV}\}$ 構成 $\mathbb{R}P^1$ 的兩個定向, 以下分別記作 $[\phi_I]$ 和 $[\phi_{III}]$ 。看到這裡, 有些讀者可能覺得上述的 $[\phi_I]$ 和 $[\phi_{III}]$ 是很抽象的東西, 似乎跟我們通常理解的「定向」毫不相干。但我們在前面曾指出, $\mathbb{R}P^1$ 的成員其實代表平面上通過 $(0, 0)$ 點直線的斜率, 因此 $\mathbb{R}P^1$ 的坐標卡其實反映這些直線的變化方向, 現借助下圖看看前述各個坐標卡所反映的方向：



上圖顯示通過 $(0, 0)$ 點的四條斜率分別為 -1 、 0 、 1 和 ∞ 的直線 (圖中的 m 代表「斜率」)。根據 (2), 當 t 的值按遞增序分別取 -1 、 0 、 1 和 ∞ 時, $\phi_I(t)$ 所代表直線的斜率 (即 t) 也分別取 -1 、 0 、 1 和 ∞ , 這是

上圖中直線的逆時針旋轉。另一方面，根據 (8)，當 t 的值分別取 -1 、 0 、 1 和 ∞ 時， $\phi_{III}(t)$ 所代表直線的斜率 (即 $-t$) 卻分別取 1 、 0 、 -1 和 ∞ ($m = -\infty$ 和 $m = \infty$ 的直線是同一條線)，這是上圖中直線的順時針旋轉。讀者可自行驗證， $\phi_{II}(t)$ 和 $\phi_{IV}(t)$ 所代表直線的斜率變化方向分別與 $\phi_I(t)$ 和 $\phi_{III}(t)$ 相同。由此可見， $[\phi_I]$ 和 $[\phi_{III}]$ 其實分別反映逆時針和順時針方向。

接下來討論有邊界流形，以下把流形 M 的邊界記作 ∂M 。為讓讀者易於理解，以下先展示一個有邊界 2 維流形 M 以及其上的兩類開子集：



在上圖中， M_i 是不包含任何邊界點的開子集。從直觀上看，這類開子集跟閉合流形的開子集相似，因此 M_i 的坐標卡 ϕ_i 跟閉合流形的坐標卡相似，其定義域是 \mathbb{R}^2 的某個開子集，即上圖中的 R_i 。跟 M_i 不同， M_j 是包含邊界點的開子集。在此情況下，我們可以把 M_j 的坐標卡 ϕ_j 的定義域定為 $\overline{\mathbb{R}_+^2} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq 0\}$ 的某個包含 $\partial\overline{\mathbb{R}_+^2} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$ 一部分的開子集，即上圖中的 R_j 。請注意 $\overline{\mathbb{R}_+^2}$ 是一個包含邊界的 2 維「半空間」(half-space)，其邊界就是 x -軸。在 ϕ_j 的作用下， M_j 所包含的邊界點與 R_j 所包含 x -軸上的點存在一一對應關係。

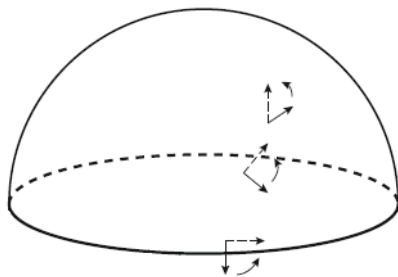
我們可以把上圖所示情況推廣到一般有邊界 m 維 ($m > 1$) 流形 (1 維流形的情況較為特殊，稍後再介紹)。有邊界流形跟閉合流形的定義相似，也是一個配有圖冊的拓樸空間 M ，但對於包含邊界點的 M 的開子集 M_j 而言，其坐標卡 ϕ_j 的定義域 R_j 必須是某個包含邊界的 m 維「半空間」 $\overline{\mathbb{R}_+^m} = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_m \geq 0\}$ 的開子集，使得 R_j 包含 $\partial\overline{\mathbb{R}_+^m} = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_m = 0\}$ 一部分，並且 M_j 所包含的邊界點與 R_j 所包含 $\partial\overline{\mathbb{R}_+^m}$ 的點存在一一對應關係。給定 M 的某個包含邊界點 p 的開子集 M_j 的坐標卡 ϕ_j ，只需使 ϕ_j 的最後論元取固定值 0，便可得到 ∂M_j 的包含 p 點的坐標卡，以下把用此方法得到的坐標卡記作 $\partial\phi_j$ 。

對於有邊界流形，同樣可以定義轉換函數、可微性、光滑性、可定向性、定向等概念，其定義跟前面大致相同。此外，還可證明若 M 是可微 (光滑) m 維有邊界流形 (其中 $m > 0$)，則 ∂M 是可微 (光滑) $m - 1$ 維閉合流形；以及若 M 是可定向的，則 ∂M 也是可定向的。根據前面的定義，可定向流形 M 的定向是指 M 的坐標卡組成的兩個集合。使用上段所述的方法為 M 的所有包含邊界點的坐標卡 ϕ_j 求得對應的 $\partial\phi_j$ ，便可得到 ∂M 的所有坐標卡，從而確定 ∂M 的定向。

我們在《數學示例：廣義斯托克斯定理》還介紹了「誘導定向」的概念，粗略地說， ∂M 的誘導定向是指與 M 的定向一致的定向。現在的問題是，給定 M 的某個定向 $[\phi_j]$ ，如何確定 ∂M 的誘導定向？有趣的是，這個問題有一個很簡單的答案。如上段所述，我們可以從 ϕ_j 求得對應的 $\partial\phi_j$ 。若 M 是偶數維流形，則 $[\partial\phi_j]$ 就是 ∂M 的誘導定向；若 M 是奇數維流形，則與 $[\partial\phi_j]$ 相反的定向才是 ∂M 的誘導定向。

以下提供兩個我們在《數學示例：廣義斯托克斯定理》討論過的可定向有邊界流形的例子，為免過於複雜，以下只提供這些流形的一個包含一部分邊界的坐標卡，以作為示例，並驗證上段有關誘導定向的結論與上述網頁的結論一致，但不會詳細討論這些流形的可微性及其所有定向。

第一個例子是下圖所示的單位北半球面，這是一個可定向的有邊界 2 維流形，其邊界是其底部平面上的圓邊：



以下是這個流形的一個坐標卡 (下式與上述網頁的 (15) 相似)：

$$\phi_V : (0, 2\pi) \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow M_V; \quad \phi_V(s, t) = (\cos s \cos t, \sin s \cos t, \sin t) \quad (12)$$

讀者可自行驗證，上式的定義域是半空間 $\overline{\mathbb{R}_+^3}$ 的某個包含 $\partial\overline{\mathbb{R}_+^3}$ 一部分的開子集，而 M_V 則是單位北半球面的某個開子集。此外，上式的定向與上述網頁 (15) 的定向 (即逆時針方向) 一致，因此 $[\phi_V]$ 反映單位北半球面上的逆時針方向，如上圖所示。

如果使上式的最後論元 (即 t 論元) 取固定值 0, 便會把上述坐標卡的論元數目減 1, 變成 1 維流形 ∂M_V 的坐標卡:

$$\partial\phi_V : (0, 2\pi) \rightarrow \partial M_V; \quad \partial\phi_V(s) = (\cos s, \sin s, 0) \quad (13)$$

讀者可自行驗證, 上式中的 ∂M_V 是上圖中底部平面上的圓邊的某個開子集。此外, 讀者還可自行驗證, $[\partial\phi_V]$ 反映上述圓邊上的逆時針方向。由於單位北半球面是偶數維流形, 可知 $[\partial\phi_V]$ 就是這個流形的邊界的誘導定向。至此我們看到, 如果單位北半球面的定向是逆時針方向, 那麼其邊界的誘導定向也如上圖所示是逆時針方向, 這與上述網頁的結論一致。

第二個例子是單位球體, 這是一個有邊界 3 維流形, 其邊界是其外圍的單位球面, 以下是這個流形的一個坐標卡 (下式與上述網頁的 (26) 相似)⁶:

$$\begin{aligned} \phi_{VI} & : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi) \times [0, 1) \rightarrow M_{VI}; \\ \phi_{VI}(t, s, r) & = ((\cos t)(\cos s)(1-r), (\cos t)(\sin s)(1-r), (\sin t)(1-r)) \end{aligned} \quad (14)$$

讀者可自行驗證, 上式的定義域是半空間 $\overline{\mathbb{R}_+^3}$ 的某個包含 $\overline{\partial\mathbb{R}_+^3}$ 一部分的開子集, 而 M_{VI} 則是單位球體的某個開子集。此外, 如把上式與上述網頁的 (15) 比較, 可以看到上式把上述網頁 (15) 中的 r 和 t 論元對調了位置, 並且把上述網頁 (15) 等號右端式子中的 r 改為 $1-r$, 這樣做的結果是使上式的定向與上述網頁 (15) 的定向 (即右手性方向) 一致, 因此 $[\phi_{VI}]$ 反映單位球體上的右手性方向。

如果把 0 代入上式的最後論元 (即 r 論元) 位置, 便會把上述坐標卡的論元數目減 1, 變成 2 維流形 ∂M_{VI} 的坐標卡 (下式與上述網頁的 (28) 相似):

$$\begin{aligned} \partial\phi_{VI} & : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi) \rightarrow \partial M_{VI}; \\ \partial\phi_{VI}(t, s) & = (\cos t \cos s, \cos t \sin s, \sin t) \end{aligned} \quad (15)$$

讀者可自行驗證, 上式中的 ∂M_{VI} 是單位球面的某個開子集。此外, 如把上式與上述網頁的 (28) 比較, 可以看到上式把上述網頁 (28) 中的 s 和 t 論元對調了位置, 這樣做的結果是使上式的定向與上述網頁 (28) 的定向 (即逆時針方向) 相反, 因此 $[\partial\phi_{VI}]$ 反映上述球面上的順時針方向。但由於單位球體是奇數維流形, 可知與 $[\partial\phi_{VI}]$ 相反的定向, 即逆時針方向, 才是這個流形的邊界的誘導定向。至此我們看到, 如果單位球體的定向是右手

⁶請注意單位球體的邊界相等於把球體的半徑固定為 1 所得的曲面。為符合前面的定義, 下式以 r 論元作為最後論元, 並且用 $1-r$ (而非 r) 代表半徑, 這樣做是要使 r 取值 0 時, $1-r$ 取值 1, 從而令下式最後論元的 0 值對應這個流形的邊界。

性方向, 那麼其邊界的誘導定向是逆時針方向, 這也與上述網頁的結論一致。

最後介紹 1 維有邊界流形, 這類流形的定義跟其他有邊界流形大致相同, 唯一不同者是這類流形的坐標卡定義域的「半空間」除了可以是 $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ 外, 也可以是 $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$ ⁷。這類流形以其端點為邊界, 以下是確定這些邊界點 p 的誘導定向的方法: 若包含 p 的坐標卡的定義域是 $[0, \infty)$ 的子集, 則 p 的誘導定向為 $-$ 號; 若包含 p 的坐標卡的定義域是 $(-\infty, 0]$ 的子集, 則 p 的誘導定向為 $+$ 號。

舉例說, 考慮平面上位於第一象限的單位四分一圓邊 (包括其端點), 這是一個有邊界 1 維流形, 其邊界是 $(1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 這兩點, 以下是這個流形的兩個坐標卡及其逆函數:

$$\phi_{VII} : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow M_{VII}; \quad \phi_{VII}(t) = (\cos t, \sin t) \quad (16)$$

$$\phi_{VIII} : \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right] \rightarrow M_{VIII}; \quad \phi_{VIII}(t) = (-\sin t, \cos t) \quad (17)$$

$$\phi_{VII}^{-1} : M_{VII} \rightarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right); \quad \phi_{VII}^{-1}(x, y) = \arctan \frac{y}{x} \quad (18)$$

$$\phi_{VIII}^{-1} : M_{VIII} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]; \quad \phi_{VIII}^{-1}(x, y) = -\arctan \frac{x}{y} \quad (19)$$

讀者可自行驗證, ϕ_{VII} 和 ϕ_{VIII} 的定義域分別是半空間 $[0, \infty)$ 和 $(-\infty, 0]$ 的包含邊界點 0 的開子集, 而 M_{VII} 和 M_{VIII} 都是上述單位四分一圓邊的開子集。請注意 ϕ_{VII} 和 ϕ_{VIII} 的定義域中的 0 分別對應上述兩個邊界點, 因為 $\phi_{VII}(0) = (1, 0)$ 和 $\phi_{VIII}(0) = (0, 1)$ 。

接著計算兩個轉換函數⁸:

$$\begin{aligned} \phi_{VIII}^{-1} \circ \phi_{VII}(t) &= \phi_{VIII}^{-1}(\cos t, \sin t) \\ &= -\arctan(\cot t) \\ &= t - \frac{\pi}{2} \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{VII}^{-1} \circ \phi_{VIII}(t) &= \phi_{VII}^{-1}(-\sin t, \cos t) \\ &= \arctan(-\cot t) \\ &= t - \frac{\pi}{2} \quad (21) \end{aligned}$$

⁷1 維有邊界流形的此一獨特之處反映這類流形與其他維度流形的一個重要差異: 任何 1 維有邊界流形都是可定向的, 而其他維度的流形卻並非如此。

⁸以下計算要應用以下三角恆等式: $\operatorname{arccot}(\cot x) = x$ 、 $\arctan(-x) = -\arctan x$ 和 $-\arctan x = \operatorname{arccot} x - \frac{\pi}{2}$

這兩個轉換函數的雅可比行列式都是

$$\frac{d}{dt} \left(t - \frac{\pi}{2} \right) = 1$$

即都恆為正數，因此 ϕ_{VII} 和 ϕ_{VIII} 互相正重疊，它們反映上述單位四分之一圓邊的另一個定向。事實上，從 $\phi_{VII}(0) = (1, 0)$ 和 $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \phi_{VII}(t) = (0, 1)$ 以及 $\lim_{t \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \phi_{VIII}(t) = (1, 0)$ 和 $\phi_{VIII}(0) = (0, 1)$ ，可以看到 ϕ_{VII} 和 ϕ_{VIII} 均反映上述單位四分之一圓邊上從 $(1, 0)$ 流向 $(0, 1)$ 的定向。

另一方面，由於包含邊界點 $(1, 0)$ 的坐標卡 ϕ_{VII} 的定義域是 $[0, \infty)$ 的子集，因此 $(1, 0)$ 的誘導定向為 $-$ 號；而包含邊界點 $(0, 1)$ 的坐標卡 ϕ_{VIII} 的定義域是 $(-\infty, 0]$ 的子集，因此 $(0, 1)$ 的誘導定向為 $+$ 號。根據我們在《數學示例：廣義斯托克斯定理》的討論，上述兩個邊界點的誘導定向代表上述單位四分之一圓邊上從 $(1, 0)$ 流向 $(0, 1)$ 的定向，這正與前面得到的結論吻合。

[連結至數學專題](#)
[連結至周家發網頁](#)