數學示例：向量場的李導數

我們在《數學示例：張量積與縮略》和《數學示例：對稱化與交錯化》中介紹了適用於張量和張量場的加法和多種乘法運算 (包括「純量乘積」、「張量積」、「內積」、「對稱積」和「楔積」)，這些運算都屬於「張量代數」的範疇。接下來我們要步入「張量分析」的殿堂，為此要介紹一種適用於張量場的微分 (即求導數) 運算－李導數。本文主旨是介紹較簡單的張量場－向量場 (亦即 $(1,0)$ 張量場) 的李導數，以作為學習一般張量場的李導數的預備知識。

我們在《數學示例：向量與向量場》中介紹了向量場的基本概念，設 M 為 m 維流形，v 為 $\Gamma(TM)$ 中的向量場，x 為 M 中的可變點，則有 $v(x) \in T_xM$。為方便以下討論，以下假設 v 是光滑 (即無限階可微) 向量場。根據上述網頁，v 可寫成以下兩種形式 (以下兩式大致等於上述網頁的 (11) 和 (12)，請注意為簡化數式，以下凡提到函數，一般均略去函數的論元，除非要突出或澄清這些論元。另請注意，下面右式運用了嚴式求和約定 (以下簡稱「求和約定」))：

$$v = [v^1, \ldots, v^m]^T = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (1)$$

現設有 $p \in M$，那麼可以證明，存在某個包含 0 的實數區間 I，以及滿足下列條件的唯一函數 $C_p : I \to M$ 使得

$$C_p(0) = p，\text{並且對所有} t \in I，\text{都有} C_p\text{'}(t) = v(C_p(t)) \qquad (2)$$

在上式中，t 可被看成代表時間變項，而上述函數的值可被看成 M 上某條曲線在時段 I 內所走過的軌跡，我們把 C_p 稱為 v 於 p 點處的積分曲線(integral curve)，而 $C_p(t)$ 就是這條曲線於時刻 t 在 M 上所在的位置。為求積分曲線，往往要求解微分方程 (組) 初值問題。

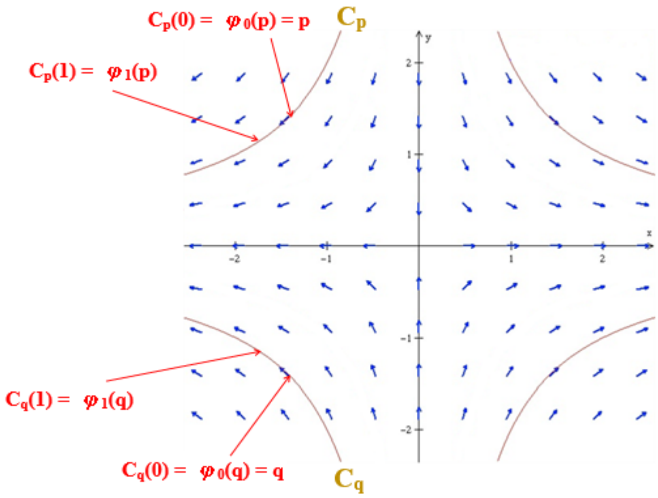
在上述積分曲線的定義中，我們選擇 M 上某個固定的點 p 而讓時間 t 變化。反過來，也可以選擇某個固定的時刻 t_0 而讓 M 的點 x 變化，從而得到一個函數 $\phi_{t_0} : M \to M$，這個函數告訴我們 U 上各點 x 處 v 的積分曲線於時刻 t_0 所在的位置，可稱為 v 於時刻 t_0 的流函數(flow function)。以下是流函數與積分曲線的關係：

$$\phi_{t_0}(x) = C_x(t_0) \qquad (3)$$

從 (3) 和 (2)，容易得到

$$\phi_0(x) = C_x(0) = x \qquad (4)$$

上式告訴我們，ϕ_0 等同於恆等函數。現用下圖闡釋上述概念：



上圖展示一個向量場 v，其中的箭頭代表 $v(x)$，即 x 點處的向量。上圖展示四條積分曲線，並標出其中兩條，即通過 p 點的 C_p 和通過 q 點的 C_q。除了 $p\,(= C_p(0))$ 和 $q\,(= C_q(0))$ 外，上圖還在這兩條曲線上各自標出另一點，即 $C_p(1)$ 和 $C_q(1)$。上圖還展示兩個流函數 ϕ_0 和 ϕ_1 的值，其中 ϕ_0 把 p 和 q 映射為自身，而 ϕ_1 則把 p 和 q 分別映射為 C_p 上的另一點 $C_p(1)$ 和 C_q 上的另一點 $C_q(1)$，這與前面的介紹一致。

可以證明，如把流函數 ϕ_{t_0} 的定義域限制為 M 的某個適當子集 U，那麼 $\phi_{t_0} : U \to \phi_{t_0}(U)$ 是一一到上函數，因此 ϕ_{t_0} 有逆函數。可以證明，

$$\phi_{t_0}{}^{-1} = \phi_{-t_0} \qquad (5)$$

從上式可以馬上得到

$$\phi_0{}^{-1} = \phi_0 \qquad (6)$$

上式是合理的，因為如前所述，ϕ_0 等同於恆等函數，而我們知道恆等函數是自身的逆函數。

舉例說，考慮 $\Gamma(T\mathbb{R}^2)$ 中的以下向量場：

$$v_I = [(x^1)^2, x^1x^2]^T = (x^1)^2\frac{\partial}{\partial x^1} + x^1x^2\frac{\partial}{\partial x^2} \qquad (7)$$

設 $(p^1, p^2) \in \mathbb{R}^2$，根據 (2)，為求 v_I 於 (p^1, p^2) 點處的積分曲線 $C_{(p^1,p^2)} = (C_1, C_2)$，要解以下微分方程組：

$$\begin{cases} \frac{dC_1}{dt} = {C_1}^2 \\ \frac{dC_2}{dt} = C_1 C_2 \end{cases} \qquad (8)$$

並具有以下「初值」(initial value)：$C_1(0) = p^1, C_2(0) = p^2$。運用有關微分方程的知識，可求得上述初值問題的解如下：

$$C_{(p^1,p^2)} : I_I \to \mathbb{R}^2;\ \ C_{(p^1,p^2)}(t) = \left(\frac{p^1}{1 - p^1 t}, \frac{p^2}{1 - p^1 t}\right) \qquad (9)$$

在上式中，I_I 代表某個適當實數區間使得上式有定義。讀者可自行驗證，上式的確滿足 (8) 並具有上述初值。現設 $t_0 \in I_I$，根據 (3) 和上述結果，可求得 v_I 於時刻 t_0 的流函數如下：

$$\phi_{t_0} : U_I \to \phi_{t_0}(U_I);\ \ \phi_{t_0}(x^1, x^2) = \left(\frac{x^1}{1 - x^1 t_0}, \frac{x^2}{1 - x^1 t_0}\right) \qquad (10)$$

在上式中，U_I 代表 $\mathbb{R}^2$ 的某個適當子集使得上式是一一到上函數。根據 (5)，可求得上述流函數的逆函數如下：

$$\phi_{-t_0} : \phi_{t_0}(U_I) \to U_I;\ \ \phi_{-t_0}(x^1, x^2) = \left(\frac{x^1}{1 + x^1 t_0}, \frac{x^2}{1 + x^1 t_0}\right) \qquad (11)$$

讀者可自行驗證，$\phi_{-t_0}(\phi_{t_0}(x^1, x^2)) = \phi_{t_0}(\phi_{-t_0}(x^1, x^2)) = (x^1, x^2)$。

由於向量場的李導數可被看成「方向導數」的推廣，我們首先回顧《數學示例：向量與向量場》中介紹的方向導數。設 f 為實值函數，x 為 f 的定義域上的某一可變點，v 為與 f 的定義域有相同維度的向量，那麼「f 於 x 沿著 v 的方向導數」，記作 $D_v f(x)$，是一個會隨著 x 變化而輸出不同值的函數，其定義如下：

$$D_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \qquad (12)$$

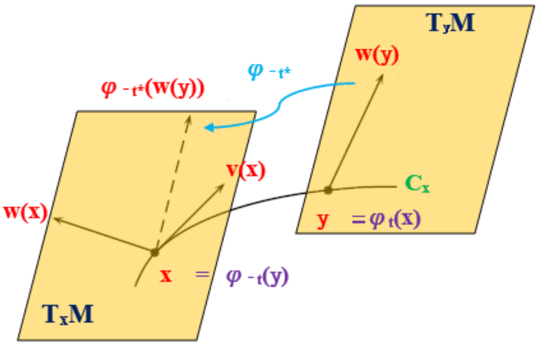
由於向量場本質上是向量值函數，原則上可以把上述定義推廣到向量場，即把上述定義中的實值函數 f 改為向量場 w。不過，這裡存在一個問題。設 w 為 $\Gamma(TM)$ 中的向量場，那麼根據向量場的定義，由於 x 和 $x + tv$ 是不同的點，切向量 $w(x)$ 和 $w(x + tv)$ 分屬兩個不同的切空間 $T_x M$ 和 $T_{x+tv} M$。這時我們要區分兩種情況。

在特殊情況下，M 是某個 $\mathbb{R}^n$ 空間的子集，由此有 M、$T_x M$ 和 $T_{x+tv} M$ 互相

同構, 因而可以把不同切空間中的切向量相加減, 從而求得 $w(x+tv)-w(x)$。在此情況下，我們可以求「w 於 x 沿著 v 的方向導數」如下：

$$D_v w(x) = \lim_{t\to 0} \frac{w(x+tv)-w(x)}{t} \qquad (13)$$

在一般情況下，M 不是任何 $\mathbb{R}^n$ 空間的子集，因此 T_xM 與 $T_{x+tv}M$ 互不同構，在此情況下，$w(x+tv)$ 與 $w(x)$ 不能相加減。因此如要為一般流形的向量場定義類似方向導數的概念，便必須找出一種方法，使屬於不同切空間上的切向量可以相加減。一個可行方法是運用前面介紹的「積分曲線」和「流函數」概念以及《數學示例：前推與拉回》介紹的「前推」運算，讀者可用下圖幫助理解以下定義：



上圖展示一個向量場 v 於 x 點的向量 $v(x)$, 以及 v 於 x 點處的積分曲線 C_x (請注意 $v(x)$ 是 C_x 於 x 點處的切向量, 符合積分曲線的定義 (2)), y 是 C_x 上另一點。上圖還展示了另一個向量場 w 於 x 點和 y 點的向量 $w(x)$ 和 $w(y)$, 其中 $w(x) \in T_xM$ 和 $w(y) \in T_yM$。由於 T_xM 和 T_yM 是兩個不同構的切空間, $w(x)$ 和 $w(y)$ 不能相加減。不過, 從上圖可以看到, x 點與 y 點不是相互孤立的, 而是透過流函數互相聯繫。具體地說, 我們有 $y = \phi_t(x)$ 和 $x = \phi_{-t}(y)$[1]。

另一方面，根據《數學示例：前推與拉回》，從流函數 ϕ_{-t} 可以推導出一個前推函數 ϕ_{-t*} (即上圖中的粉藍色箭頭)，把這個函數作用於 T_yM 中的切向量 $w(y)$，所得結果 $\phi_{-t*}(w(y))$ (即上圖中的虛線箭頭) 是 T_xM 中的切向量。這麼一來，$w(x)$ 與 $\phi_{-t*}(w(y))$ 便是同一個切空間 T_xM 中的切向量，可以相加減，即可以計算 $\phi_{-t*}(w(y)) - w(x)$。現在如把上式除以 t，然後求這個商於 $t \to 0$ 的極限，便可得到一個適用於一般向量場的導數，稱為「w 於 x 沿著 v 的李導數(Lie derivative)」，記作 $\mathcal{L}_v w(x)$，即

$$\mathcal{L}_v w(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\phi_{-t*}(w(y)) - w(x)}{t}, \text{ 其中 } \phi \text{ 是 } v \text{ 的流函數, } y = \phi_t(x) \qquad (14)$$

[1]這是因為根據 (5)，我們有 $\phi_{-t}(y) = \phi_{-t}(\phi_t(x)) = {\phi_t}^{-1}(\phi_t(x)) = x$。

請注意隨著 x 變化，上式會給出不同的向量，因此 $\mathcal{L}_v w$ 也是一個向量場。

由於上式涉及極限運算，在計算上頗為不便，因此以下會使用李導數的另一定義，此一定義使用 (普通) 求導運算取代上式中的極限運算[2]：

$$\mathcal{L}_v w(x) = \frac{d}{dt}\phi_{-t*}(w(y))\Big|_{t=0}, \text{ 其中 } \phi \text{ 是 } v \text{ 的流函數}, \; y = \phi_t(x) \qquad (15)$$

上式的意思是，先求 $\phi_{-t*}(w(y))$ 關於 t 的 (普通) 導數，然後把 $t = 0$ 代入所得結果。

我們可以把上述定義推廣為 M 上實值函數 (即 $(0, 0)$ 張量場) 的李導數。可以證明，若 f 是 M 上實值函數，則

$$\mathcal{L}_v f(x) = D_v f(x) \qquad (16)$$

由此可見，李導數確是方向導數的推廣。

舉例說，考慮前面討論過的向量場 v_I 和 $\Gamma(T\mathbb{R}^2)$ 中的以下向量場：

$$w_I = [x^1, x^2]^T = x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + x^2\frac{\partial}{\partial x^2} \qquad (17)$$

讓我們用 (15) 求 $\mathcal{L}_{v_I} w_I(x^1, x^2)$。我們在前面已計算了 v_I 的流函數 ϕ_{t_0} 及其逆函數 ϕ_{-t_0}，以下計算將沿用這兩個結果，但須將 t_0 改寫成 t。此外，為方便進行前推運算，現把該兩式改寫如下：

$$\phi_t : U_I \to \phi_t(U_I); \;\; \phi_t(x^1, x^2) = (y^1, y^2), \text{ 其中 } y^1 = \frac{x^1}{1 - x^1 t}, \; y^2 = \frac{x^2}{1 - x^1 t} \qquad (18)$$

$$\phi_{-t} : \phi_t(U_I) \to U_I; \;\; \phi_{-t}(y^1, y^2) = (x^1, x^2), \text{ 其中 } x^1 = \frac{y^1}{1 + y^1 t}, \; x^2 = \frac{y^2}{1 + y^1 t} \qquad (19)$$

為用《數學示例：前推與拉回》所介紹的前推運算方法，首先求 $D(\phi_{-t})$，即函數 ϕ_{-t} 的雅可比矩陣，從 (19)，可得

$$D(\phi_{-t}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \frac{\partial x^1}{\partial y^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial y^1} & \frac{\partial x^2}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+y^1 t)^2} & 0 \\ -\frac{y^2 t}{(1+y^1 t)^2} & \frac{1}{1+y^1 t} \end{bmatrix}$$

[2]為證明 (14) 與 (15) 等價，可以先定義函數 $g(t) = \phi_{-t*}(w(y))$。一方面，根據 $y = \phi_t(x)$ 和 (4)，$g(0) = \phi_{0*}(w(\phi_0(x))) = \phi_{0*}(w(x)) = w(x)$ (請注意恆等函數的前推也是恆等函數)，這樣 (14) 等號右端便可以改寫成 $\lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{t}$，根據普通導數的定義，這等於 g'(0)。另一方面，(15) 等號右端可以改寫成 $\frac{d}{dt}g(t)\big|_{t=0}$，這也等於 g'(0)，由此證得 (14) 與 (15) 等價。

其次進行以下計算：

$$\begin{aligned}
\phi_{-t*}(w_I(y^1,y^2)) &= D(\phi_{-t}) \times w_I(y^1,y^2) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+y^1t)^2} & 0 \\ -\frac{y^2t}{(1+y^1t)^2} & \frac{1}{1+y^1t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{y^1}{(1+y^1t)^2} \\ \frac{y^2}{(1+y^1t)^2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\frac{x^1}{1-x^1t}}{\left(1+\frac{x^1t}{1-x^1t}\right)^2} \\ \frac{\frac{x^2}{1-x^1t}}{\left(1+\frac{x^1t}{1-x^1t}\right)^2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x^1(1-x^1t) \\ x^2(1-x^1t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

請注意在上面計算中，我們把 (18) 中的 $y^1 = \frac{x^1}{1-x^1t}$ 和 $y^2 = \frac{x^2}{1-x^1t}$ 代入第三行，以便把該行的變項從 (y^1, y^2) 改為 (x^1, x^2)，從而得到第四行。最後，根據 (15)，可求得

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{v_I} w_I &= \frac{d}{dt}[x^1(1-x^1t), x^2(1-x^1t)]^T \Big|_{t=0} \\
&= [-(x^1)^2, -x^1x^2]^T\big|_{t=0} \\
&= [-(x^1)^2, -x^1x^2]^T \qquad (20)
\end{aligned}$$

運用 (15) 計算李導數雖然較 (14) 簡便，但仍須計算向量場 v 的流函數，需要求解微分方程初值問題，因此以下將介紹計算李導數的另一種方法，為此須先回顧向量的基本概念。我們在《數學示例：向量與向量場》中曾指出，向量除可被看成向量空間的成員外，也可被看成一種可作用於 M 上實值函數的偏微分算子，這就是我們可以把基底向量寫成 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 的原因。

設 v 和 w 為光滑向量場，如果把它們看成「方向導數算子」，並將 w 作用於 M 上光滑實值函數 f，其結果 $w[f]$ 也是一個 M 上光滑實值函數，因此可以進一步把 v 作用於 $w[f]$，從而得到另一個 M 上光滑實值函數 $v[w[f]]$，此一結果也可記作 $v \circ w[f]$。這裡可以把 $v \circ w$ 看成一個作用於 M 上光滑實值函數的算子，但這個算子不一定是光滑向量場，這是因為 $v \circ w$ 涉及兩重偏微分運算，其結果可能包含二階偏導數，不符合向量場所要求的形式 (因為向量的基底只含有一階偏導數 $\frac{\partial}{\partial x^i}$)。不過，我們可以定義以下李括號(Lie bracket) 算子 (亦稱「對易子」commutator)：

$$[v, w] = v \circ w - w \circ v \qquad (21)$$

可以證明，對任何 M 上光滑實值函數 $f(x)$，$[v,w][f]$ 都只包含一階偏導數，因此 $[v,w]$ 是一個向量場。

舉例說，考慮 $\mathbb{R}^2$ 的基底向量場 $\frac{\partial}{\partial x^1}$ 和 $\frac{\partial}{\partial x^2}$，設 f 為 $\mathbb{R}^2$ 上任意光滑實值函數，根據 (21)，我們有

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\right][f] &= \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \circ \frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x^2} \circ \frac{\partial}{\partial x^1}\right)[f] \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

上面最後一行應用了多元函數微積分中的「克萊羅定理」(Clairaut's Theorem)：若 f 是光滑函數，則 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1}$。

當 v 和 w 不是基底向量場時，便不一定有 $[v,w] = 0$。以前面討論過的向量場 v_I 和 w_I 為例，設 f 為 $\mathbb{R}^2$ 上任意光滑實值函數，首先運用數學分析中的求導法則分別計算 $v_I \circ w_I[f]$ 和 $w_I \circ v_I[f]$ 如下：

$$
\begin{aligned}
v_I \circ w_I[f] &= \left((x^1)^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}\right)\left(x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2}\right) \\
&= (x^1)^2 \frac{\partial f}{\partial x^1} + (x^1)^3 \frac{\partial^2 f}{\partial (x^1)^2} + (x^1)^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} \\
&\quad + (x^1)^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1} + x^1 x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + x^1 (x^2)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial (x^2)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w_I \circ v_I[f] &= \left(x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}\right)\left((x^1)^2 \frac{\partial f}{\partial x^1} + x^1 x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2}\right) \\
&= 2(x^1)^2 \frac{\partial f}{\partial x^1} + (x^1)^3 \frac{\partial^2 f}{\partial (x^1)^2} + x^1 x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + (x^1)^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} \\
&\quad + (x^1)^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1} + x^1 x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + x^1 (x^2)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial (x^2)^2}
\end{aligned}
$$

從以上計算結果，可以看到 $v_I \circ w_I$ 和 $w_I \circ v_I$ 都包含二階偏導數，所以兩者都不是向量場。接著運用 (19) 計算 $[v_I, w_I][f]$：

$$
\begin{aligned}
[v_I, w_I][f] &= (v_I \circ w_I - w_I \circ v_I)[f] \\
&= v_I \circ w_I[f] - w_I \circ v_I[f] \\
&= -(x^1)^2 \frac{\partial f}{\partial x^1} - x^1 x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2}
\end{aligned}
$$

從以上計算結果，可以抽象出以下向量場：

$$[v_I, w_I] = -(x^1)^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \qquad (22)$$

在運用 (21) 進行計算的過程中，要引入一個抽象的 M 上實值函數 f，頗為不便。不過，我們可以從 (21) 推導出以下計算公式：設 $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 和 $w = w^i \frac{\partial}{\partial x^i}$，則 (請注意下式運用了求和約定)：

$$[v, w] = \left(v^j \frac{\partial w^i}{\partial x^j} - w^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (23)$$

接下來讓我們用上式再算一次 $[v_I, w_I]$ 如下 (亦請讀者自行用上式再算一次 $\left[\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\right]$)：

$$\begin{aligned} & [v_I, w_I] \\ = & \left((x^1)^2 \frac{\partial x^1}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial (x^1)^2}{\partial x^1} + x^1 x^2 \frac{\partial x^1}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial (x^1)^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial x^1} \\ & + \left((x^1)^2 \frac{\partial x^2}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial x^1 x^2}{\partial x^1} + x^1 x^2 \frac{\partial x^2}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial x^1 x^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial x^2} \\ = & -(x^1)^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \qquad (24) \end{aligned}$$

上述結果與 (22) 中的結果相同，也實質上與 (20) 中的結果相同，由此我們有 $\mathcal{L}_{v_I} w_I = [v_I, w_I]$。此一結果不是偶然的，而是以下定理的特例。

定理 1：設 v 和 w 為光滑向量場，則

$$\mathcal{L}_v w = [v, w] \qquad (25)$$

運用上述定理，便可以通過計算偏導數求李括號，並從而求得李導數，而無需求解微分方程或計算極限。以下是李括號的一些性質。

定理 2：設 v、v_1、v_2、w、w_1、w_2 為光滑向量場，$c \in \mathbb{R}$，則

(i) $[v_1 + v_2, w] = [v_1, w] + [v_2, w]$

(ii) $[v, w_1 + w_2] = [v, w_1] + [v, w_2]$

(iii) $[cv, w] = c[v, w]$

(iv) $[v, cw] = c[v, w]$

(v) $[w, v] = -[v, w]$

上述定理的內容可以概括為：組成李括號的兩個向量場相對於李括號來說具有雙重線性性質和反交換性。此外，李括號還有以下特殊性質。

定理 3 (雅可比恆等式Jacobi identity)：設 u、v、w 為光滑向量場，則

$$[[u,v],w]+[[v,w],u]+[[w,u],v]=0 \qquad (26)$$

接下來讓我們驗證 (26)。考慮前面討論過的向量場 v_I、w_I 和 $\Gamma(T\mathbb{R}^2)$ 中的以下常值向量場：

$$u_I=[1,1]^T=\frac{\partial}{\partial x^1}+\frac{\partial}{\partial x^2} \qquad (27)$$

請讀者自行驗證以下計算結果：

$$\begin{aligned}
[u_I,v_I] &= \left[\frac{\partial}{\partial x^1}+\frac{\partial}{\partial x^2},(x^1)^2\frac{\partial}{\partial x^1}+x^1x^2\frac{\partial}{\partial x^2}\right]\\
&= 2x^1\frac{\partial}{\partial x^1}+(x^1+x^2)\frac{\partial}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[[u_I,v_I],w_I] &= \left[2x^1\frac{\partial}{\partial x^1}+(x^1+x^2)\frac{\partial}{\partial x^2},x^1\frac{\partial}{\partial x^1}+x^2\frac{\partial}{\partial x^2}\right]\\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[[v_I,w_I],u_I] &= \left[-(x^1)^2\frac{\partial}{\partial x^1}-x^1x^2\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^1}+\frac{\partial}{\partial x^2}\right]\\
&= 2x^1\frac{\partial}{\partial x^1}+(x^1+x^2)\frac{\partial}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[w_I,u_I] &= \left[x^1\frac{\partial}{\partial x^1}+x^2\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^1}+\frac{\partial}{\partial x^2}\right]\\
&= -\frac{\partial}{\partial x^1}-\frac{\partial}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[[w_I,u_I],v_I] &= \left[-\frac{\partial}{\partial x^1}-\frac{\partial}{\partial x^2},(x^1)^2\frac{\partial}{\partial x^1}+x^1x^2\frac{\partial}{\partial x^2}\right]\\
&= -2x^1\frac{\partial}{\partial x^1}-(x^1+x^2)\frac{\partial}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

綜合以上結果，我們有

$$\begin{aligned}
& [[u_I,v_I],w_I]+[[v_I,w_I],u_I]+[[w_I,u_I],v_I]\\
=& \ 0+2x^1\frac{\partial}{\partial x^1}+(x^1+x^2)\frac{\partial}{\partial x^2}-2x^1\frac{\partial}{\partial x^1}-(x^1+x^2)\frac{\partial}{\partial x^2}\\
=& \ 0
\end{aligned}$$

(26) 乃得驗證。

由於有「定理 1」，我們可以把「定理 2」和「定理 3」中李括號的各個性質改寫成向量場的李導數的性質，即組成李導數的兩個向量場相對於李導數來說具有雙重線性性質和反交換性，而且向量場的李導數滿足相應的雅可比恆等式。舉例說，從反交換性，可知對任何光滑向量場 v 和 w，都有 $\mathcal{L}_w v = -\mathcal{L}_v w$。對於這些性質，我們不擬一一舉例。

連結至數學專題
連結至周家發網頁