數學示例：列維-奇維塔聯絡

我們在《數學示例：協變導數》中介紹了「協變導數」的概念，本文主旨是介紹與協變導數有密切關係的「列維-奇維塔聯絡」。請注意「列維-奇維塔聯絡」是「聯絡」(connection) 的一個次類。由於一般的聯絡概念頗為抽象,而且黎曼變何主要應用列維-奇維塔聯絡,本文不擬介紹一般的聯絡。

首先從向量場說起。設 $w = w^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 為黎曼流形 (M, g) 上的光滑向量場 (亦即 $(1, 0)$ 張量場)，根據上述網頁，w 的協變導數 ∇w 是一個 $(1, 1)$ 張量場。這裡的 ∇ 可被看成一個「一元算子」，把這個算子作用於一個光滑向量場 w，可得到一個光滑 $(1, 1)$ 張量場 ∇w。根據上述網頁的 (11) 和 (12)，∇w 可用以下公式計算：

$$\nabla w = \left(\frac{\partial w^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jp} w^p \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \qquad (1)$$

其中 Γ^i_{jk} 是從 g 導出的第二類克里斯多福符號。

現在我們把 ∇ 改造成一個「二元算子」，稱為列維-奇維塔聯絡(Levi-Civita connection)，把這個算子作用於兩個光滑向量場 $v = v^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ 和 $w = w^i \frac{\partial}{\partial x^i}$，可得到一個光滑向量場，以下記作 $\nabla_v w$，這個向量場可用以下公式計算：

$$\nabla_v w = \left(v^j \frac{\partial w^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jp} v^j w^p \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (2)$$

在上式中，$\nabla_v w$ 可稱為「w 關於 v 的協變導數」，由此我們把「協變導數」推廣為關於某向量場的協變導數(covariant derivative with respect to a vector field)。請注意「協變導數」∇w 與「關於某向量場的協變導數」$\nabla_v w$ 的一個重要區別：前者把 w 的協變度從 0 增至 1，後者則不改變 w 的協變度。

如把上述兩種協變導數與其他導數概念比較，那麼 ∇w 類似數學分析中的「導數」$\frac{df}{dx}$ 和《數學示例：外導數》中介紹的「外導數」$d\alpha$，因為這些導數都只涉及一個函數 (請注意向量場和微分 k 形式也是函數)；而 $\nabla_v w$ 則類似數學分析中的「方向導數」$D_v f$ 和《數學示例：向量場的李導數》中介紹的「李導數」$\mathcal{L}_v w$，因為這些導數都涉及一個函數和一個向量 (場) v。

舉例說，考慮我們在《數學示例：黎曼度量》中介紹的 $\mathbb{R}^2$ 上的以下歐幾里得度量 (下式等於上述網頁的 (3))：

$$g_I = dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 \qquad (3)$$

根據上述網頁，在 $(\mathbb{R}^2, g_I)$ 上，對任何 $i, j, k \in \{1, 2\}$，都有 $(\Gamma_I)^i_{jk} = 0$。由此根據 (2)，在 $(\mathbb{R}^2, g_I)$ 上，

$$\begin{aligned} \nabla_v w &= \left(v^1 \frac{\partial w^1}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial w^1}{\partial x^2}\right) \frac{\partial}{\partial x^1} + \left(v^1 \frac{\partial w^2}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial w^2}{\partial x^2}\right) \frac{\partial}{\partial x^2} \\ &= D_v w^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + D_v w^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \\ &= D_v w \qquad (4) \end{aligned}$$

上面第二行是根據《數學示例：向量與向量場》中的 (2) 從上面第一行推導出來的結果[1]；第三行則是根據 D_v 的線性性質從第二行推導出來的結果[2]。以上結果顯示，在 $(\mathbb{R}^2, g_I)$ 上，$\nabla_v w$ 等同於「向量場 w 沿著 v 的方向導數」。

接著考慮我們在《數學示例：黎曼度量》中討論過的另一個流形 $H = \{(x^1, x^2) : x^1, x^2 \in \mathbb{R} \wedge x^2 > 0\}$ 以及其上的以下龐加萊度量 (下式等於上述網頁 (9) 中的 g_{III})：

$$g_{II} = \frac{1}{(x^2)^2} \left(dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2\right) \qquad (5)$$

根據上述網頁，(H, g_{II}) 上的第二類克斯多福符號如下：$(\Gamma_{II})^2_{11} = \frac{1}{x^2}$，$(\Gamma_{II})^1_{12} = (\Gamma_{II})^1_{21} = (\Gamma_{II})^2_{22} = -\frac{1}{x^2}$，$(\Gamma_{II})^1_{11} = (\Gamma_{II})^1_{22} = (\Gamma_{II})^2_{12} = (\Gamma_{II})^2_{21} = 0$。請讀者自行驗證，由此根據 (2)，可求得在 (H, g_{II}) 上，

$$\begin{aligned} &\nabla_v w \\ =\ & \left(v^1 \frac{\partial w^1}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial w^1}{\partial x^2} + (\Gamma_{II})^1_{11} v^1 w^1 + (\Gamma_{II})^1_{12} v^1 w^2 + (\Gamma_{II})^1_{21} v^2 w^1 + (\Gamma_{II})^1_{22} v^2 w^2\right) \frac{\partial}{\partial x^1} \\ &+ \left(v^1 \frac{\partial w^2}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial w^2}{\partial x^2} + (\Gamma_{II})^2_{11} v^1 w^1 + (\Gamma_{II})^2_{12} v^1 w^2 + (\Gamma_{II})^2_{21} v^2 w^1 + (\Gamma_{II})^2_{22} v^2 w^2\right) \frac{\partial}{\partial x^2} \\ =\ & \left(v^1 \frac{\partial w^1}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial w^1}{\partial x^2} - \frac{v^1 w^2 + v^2 w^1}{x^2}\right) \frac{\partial}{\partial x^1} + \left(v^1 \frac{\partial w^2}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial w^2}{\partial x^2} + \frac{v^1 w^1 - v^2 w^2}{x^2}\right) \frac{\partial}{\partial x^2} \qquad (6) \end{aligned}$$

[1]根據該網頁，若 $p \in \mathbb{R}^2$，則 $D_v w^i(p) = v_1 \left.\frac{\partial w^i}{\partial x_1}\right|_p + v_2 \left.\frac{\partial w^i}{\partial x_2}\right|_p$。把 p 從上式中抽象出來，便可得到 $D_v w^i = v_1 \frac{\partial w^i}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial w^i}{\partial x_2}$。

[2]「方向導數算子」D_v 跟其他微分算子一樣也具有線性性質，因此有 $D_v \left(w^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + w^2 \frac{\partial}{\partial x^2}\right) = D_v w^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + D_v w^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$。

現在如有 (H, g_{II}) 上的以下向量場 (以下兩式分別等於《數學示例：向量場的李導數》中的 (7) 和 (17))：

$$v_I = [(x^1)^2, x^1 x^2]^T = (x^1)^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \qquad (7)$$

$$w_I = [x^1, x^2]^T = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \qquad (8)$$

如把以上兩式代入 (6)，便可得到

$$\nabla_{v_I} w_I = -(x^1)^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{(x^1)^3}{x^2} \frac{\partial}{\partial x^2} \qquad (9)$$

如再把適當的點 $(x^1, x^2) \in H$ 代入上述計算結果，便可得到在點 (x^1, x^2) 處 $\nabla_{v_I} w_I$ 的值 (即該點處的一個切向量)。

比較 (1) 和 (2)，可以看到兩式很相似，以下讓我們把這兩式聯繫起來。從 (1) 可以看到，∇w 是以一個微分 1 形式 α 和一個向量場 v 作為論元的函數。我們一般把 ∇w 對 α 和 v 的作用寫成 $\nabla w(\alpha, v)$ 的形式，但其實也可以寫成 $\nabla w(\alpha)(v)$ 的形式。根據張量積的定義，我們有

$$\nabla w(\alpha)(v) = \left(\frac{\partial w^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} w^k\right) \frac{\partial}{\partial x^i}(\alpha) \times dx^j(v)$$

現在如果把上式中的論元 α 暫時懸空 (以下用 $\bullet$ 代表懸空的論元)，僅把 ∇w 作用於一個給定的向量場 $v = v^l \frac{\partial}{\partial x^l}$，那麼我們有

$$\begin{aligned}
\nabla w(\bullet)(v) &= \left(\frac{\partial w^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} w^k\right) \frac{\partial}{\partial x^i}(\bullet) \times dx^j \left(v^l \frac{\partial}{\partial x^l}\right) \\
&= \left(v^l \frac{\partial w^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} v^l w^k\right) \frac{\partial}{\partial x^i}(\bullet) \times \delta^j_l \\
&= \left(v^j \frac{\partial w^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} v^j w^k\right) \frac{\partial}{\partial x^i}(\bullet)
\end{aligned}$$

把上面最後一行與 (2) 中等號右端的數式比較，可得

$$\nabla_v w(\bullet) = \nabla w(\bullet)(v) \qquad (10)$$

上式把 ∇w 與 $\nabla_v w$ 這兩個協變導數概念聯繫起來。請注意在上式中，$\nabla w(\bullet)(v)$ 應被看成這樣的函數：把這個函數作用於一個微分 1 形式 α (即把 α 填入上式中 $\bullet$ 的位置)，其結果等於 $\nabla_v w(\alpha)$。

接下來介紹與 ∇ 相關的一些定理，第一個定理把 ∇ 與 Γ^i_{jk} 聯繫起來。

定理 1：設 M、g 和 ∇ 如上定義，則

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} = \Gamma^i_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (11)$$

為驗證上式，設 M 為 2 維流形，並考慮 M 上的向量場 $\frac{\partial}{\partial x^1}$ 和 $\frac{\partial}{\partial x^2}$，這兩個向量場也可以分別寫成 $[1,0]^T$ 和 $[0,1]^T$ 的形式。由此根據 (2)，容易求得

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} \frac{\partial}{\partial x^2} = \Gamma^1_{12} \frac{\partial}{\partial x^1} + \Gamma^2_{12} \frac{\partial}{\partial x^2}$$

(11) 乃得驗證。

以下定理提供 ∇ 的一些重要性質。

定理 2：設 M、g 和 ∇ 如上定義，v、v_1、v_2、w、w_1 和 w_2 為 M 上光滑向量場，f、f_1 和 f_2 為 M 上光滑實值函數，$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$，則

(i) $\nabla_{f_1 v_1 + f_2 v_2} w = f_1 \nabla_{v_1} w + f_2 \nabla_{v_2} w$

(ii) $\nabla_v (c_1 w_1 + c_2 w_2) = c_1 \nabla_v w_1 + c_2 \nabla_v w_2$

(iii) $\nabla_v (f w) = v[f] w + f \nabla_v w$

「定理 2(i) 和 (ii)」的內容可以概括為：二元算子 ∇ 對其兩個論元具有雙重線性性質。在 (iii) 中，$v[\ ]$ 代表把 v 看作方向導數算子，並將之作用於 [ ] 內的函數。另外，下文將會看到，$v[f]$ 其實等於 $\nabla_v f$ (見 (30))，因此「定理 2(iii)」表達了 ∇_v 所滿足的某種「乘積法則」。舉例說，設有 H 上的以下實值函數：

$$f_I = \frac{x^1}{x^2} \qquad (12)$$

由此有

$$f_I w_I = \left[\frac{(x^1)^2}{x^2}, x^1 \right]^T = \frac{(x^1)^2}{x^2} \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} \qquad (13)$$

請讀者自行驗證，把 (7) 和 (13) 代入 (6) (須將 (6) 中的 w 改為 $f_I w_I$)，可求得

$$\nabla_{v_I} (f_I w_I) = -\frac{(x^1)^3}{x^2} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{(x^1)^4}{(x^2)^2} \frac{\partial}{\partial x^2} \qquad (14)$$

接著計算

$$\begin{aligned} v_I[f_I] &= \left((x^1)^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \left[\frac{x^1}{x^2} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

由此可得

$$v_I[f_I]w_I = 0$$

接著利用 (12) 和前面的計算結果 (9)，可得

$$\begin{aligned} f_I \nabla_{v_I} w_I &= \frac{x^1}{x^2}\left(-(x^1)^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{(x^1)^3}{x^2}\frac{\partial}{\partial x^2}\right) \\ &= -\frac{(x^1)^3}{x^2}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{(x^1)^4}{(x^2)^2}\frac{\partial}{\partial x^2} \end{aligned}$$

綜合以上計算結果，可得

$$v_I[f_I]w_I + f_I\nabla_{v_I} w_I = -\frac{(x^1)^3}{x^2}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{(x^1)^4}{(x^2)^2}\frac{\partial}{\partial x^2}$$

由於上述結果與 (14) 相等，「定理 1(iii)」乃得驗證。

以下定理提供列維-奇維塔聯絡 ∇ 與黎曼度量 g 和李導數 $\mathcal{L}$ 的關係。

定理 3 (黎曼幾何基本定理Fundamental Theorem of Riemannian Geometry)：設 M、g 和 ∇ 如上定義，u、v 和 w 為 M 上光滑向量場，則

(i) $v[g(u,w)] = g(\nabla_v u, w) + g(u, \nabla_v w)$

(ii) $\nabla_v w - \nabla_w v = \mathcal{L}_v w$

下文將會看到，$v[g(u,w)]$ 其實等於 $\nabla_v(g(u,w))$ (見 (31))，而我們在《數學示例：協變導數》中曾指出，$g(u,w)$ 可被看成某種乘積 (即「點積」概念的推廣)，因此「定理 3(i)」表達了 ∇_v 所滿足的某種「乘積法則」。

另請注意根據《數學示例：向量場的李導數》，「李導數」的定義並不依賴於黎曼度量，而根據前面的介紹，「關於某向量場的協變導數」的定義則依賴於黎曼度量 (透過 Γ^i_{jp})；但「定理 3(ii)」卻指出，這兩種導數存在某種等同關係，這是此定理的奇妙之處。

為驗證上述定理，除沿用前面的 v_I 和 w_I 外，我們再引入 H 上的以下向量場：

$$u_I = [x^1, -x^2]^T = x^1\frac{\partial}{\partial x^1} - x^2\frac{\partial}{\partial x^2} \qquad (15)$$

請讀者自行驗證，把 (7)、(8) 和 (15) 代入 (6)，可求得

$$\nabla_{v_I} u_I = (x^1)^2\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{(x^1)^3}{x^2}\frac{\partial}{\partial x^2} \qquad (16)$$

$$\nabla_{w_I} v_I = \left(x^1 x^2 + \frac{(x^1)^3}{x^2} \right) \frac{\partial}{\partial x^2} \qquad (17)$$

接著計算

$$\begin{aligned} & g_{II}(u_I, w_I) \\ = & \frac{1}{(x^2)^2} (dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2) \left(x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}, x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \\ = & \frac{(x^1)^2}{(x^2)^2} - 1 \end{aligned}$$

由此可以求得

$$\begin{aligned} v_I[g_{II}(u_I, w_I)] &= \left((x^1)^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \left[\frac{(x^1)^2}{(x^2)^2} - 1 \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

另一方面，利用前面的結果 (16) 和 (9)，我們又計算

$$\begin{aligned} & g_{II}(\nabla_{v_I} u_I, w_I) \\ = & \frac{1}{(x^2)^2} (dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2) \left((x^1)^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{(x^1)^3}{x^2} \frac{\partial}{\partial x^2}, x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \\ = & \frac{2(x^1)^3}{(x^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & g_{II}(u_I, \nabla_{v_I} w_I) \\ = & \frac{1}{(x^2)^2} (dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2) \left(x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}, -(x^1)^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{(x^1)^3}{x^2} \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \\ = & -\frac{2(x^1)^3}{(x^2)^2} \end{aligned}$$

綜合以上結果，可求得

$$\begin{aligned} g_{II}(\nabla_{v_I} u_I, w_I) + g_{II}(u_I, \nabla_{v_I} w_I) &= \frac{2(x^1)^3}{(x^2)^2} - \frac{2(x^1)^3}{(x^2)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

此一結果與前面求得的 $v_I[g_{II}(u_I, w_I)]$ 相同，由此驗證了「定理 3(i)」。

此外，利用前面的結果 (9) 和 (17)，可以求得

$$\begin{aligned} \nabla_{v_I} w_I - \nabla_{w_I} v_I &= -(x^1)^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{(x^1)^3}{x^2} \frac{\partial}{\partial x^2} - \left(x^1 x^2 + \frac{(x^1)^3}{x^2} \right) \frac{\partial}{\partial x^2} \\ &= -(x^1)^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \end{aligned}$$

此一結果正好等於我們在《數學示例：向量場的李導數》求得的 $\mathcal{L}_{v_I} w_I$ (見該網頁的 (20))，由此驗證了「定理 3(ii)」。請讀者自行驗證，在 $(\mathbb{R}^2, g_I)$ 上，同樣可得 $\nabla_{v_I} w_I - \nabla_{w_I} v_I = \mathcal{L}_{v_I} w_I$，這顯示儘管 $\nabla_{v_I} w_I$ 和 $\nabla_{w_I} v_I$ 的值會隨著所在黎曼流形而變化，但 $\nabla_{v_I} w_I - \nabla_{w_I} v_I$ 在不同黎曼流形上卻有相同的值，即都等於不會隨黎曼流形而變化的李導數 $\mathcal{L}_{v_I} w_I$。

以上介紹了「向量場關於某向量場的協變導數」，接著我們將此一概念推廣為「微分 1 形式關於某向量場的協變導數」。設 $\alpha = \alpha_i \, dx^i$ 為 (M, g) 上的光滑微分 1 形式 (亦即 $(0, 1)$ 張量場)，根據《數學示例：協變導數》中的 (14) 和 (15)，α 的協變導數 $\nabla\alpha$ 是一個光滑 $(0, 2)$ 張量場，可用以下公式計算：

$$\nabla\alpha = \left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial x^j} - \Gamma^p_{ij}\alpha_p\right) dx^i \otimes dx^j \qquad (18)$$

跟向量場的情況相似，我們把上述協變導數推廣為「α 關於 v 的協變導數」，記作 $\nabla_v\alpha$，這是一個光滑微分 1 形式，其計算公式如下：

$$\nabla_v\alpha = \left(v^j \frac{\partial\alpha_i}{\partial x^j} - \Gamma^p_{ij} v^j \alpha_p\right) dx^i \qquad (19)$$

請注意「協變導數」$\nabla\alpha$ 與「關於某向量場的協變導數」$\nabla_v\alpha$ 的一個重要區別：前者把 α 的協變度從 1 增至 2，後者則不改變 α 的協變度。

根據 (19)，可求得在 (H, g_{II}) 上，

$$\begin{aligned}
& \nabla_v\alpha \\
= \; & \left(v^1 \frac{\partial\alpha_1}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial\alpha_1}{\partial x^2} - (\Gamma_{II})^1_{11} v^1 \alpha_1 - (\Gamma_{II})^2_{11} v^1 \alpha_2 - (\Gamma_{II})^1_{12} v^2 \alpha_1 - (\Gamma_{II})^2_{12} v^2 \alpha_2\right) dx^1 \\
& + \left(v^1 \frac{\partial\alpha_2}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial\alpha_2}{\partial x^2} - (\Gamma_{II})^1_{21} v^1 \alpha_1 - (\Gamma_{II})^2_{21} v^1 \alpha_2 - (\Gamma_{II})^1_{22} v^2 \alpha_1 - (\Gamma_{II})^2_{22} v^2 \alpha_2\right) dx^2 \\
= \; & \left(v^1 \frac{\partial\alpha_1}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial\alpha_1}{\partial x^2} + \frac{v^2\alpha_1 - v^1\alpha_2}{x^2}\right) dx^1 + \left(v^1 \frac{\partial\alpha_2}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial\alpha_2}{\partial x^2} + \frac{v^1\alpha_1 + v^2\alpha_2}{x^2}\right) dx^2 \qquad (20)
\end{aligned}$$

現在如有 (H, g_{II}) 上的以下微分 1 形式 (下式等於《數學示例：張量場的李導數》中的 (3))：

$$\alpha_I = [x^2, -x^1] = x^2 dx^1 - x^1 dx^2 \qquad (21)$$

如把 (7) 和上式代入 (20)，便可得到

$$\nabla_{v_I}\alpha_I = \left(\frac{(x^1)^3}{x^2} + 2x^1x^2\right) dx^1 - (x^1)^2 \, dx^2 \qquad (22)$$

原則上可以仿照前面的做法推導出「一般 (r, s) 張量場關於某向量場的協變導數」，但由於一般張量場可以表示成兩個張量場的張量積，我們可以使用以下定理求「張量積關於某向量場的協變導數」。

定理 4：設 M、g 和 ∇ 如上定義，v 為 M 上光滑向量場，T 和 U 為 M 上光滑張量場，則

$$\nabla_v(T \otimes U) = (\nabla_v T) \otimes U + T \otimes (\nabla_v U) \qquad (23)$$

由於 $\otimes$ 代表張量乘法，上式顯示 ∇_v 所滿足的某種「乘積法則」。至此我們看到，∇_v 滿足三種「乘積法則」。

舉例說，設 $w = w^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 和 $\alpha = \alpha_j\, dx^j$ 分別為 M 上的向量場和微分 1 形式，那麼 $w \otimes \alpha = w^i \alpha_j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$ 是 M 上的 $(1, 1)$ 張量場，由此可知 $w \otimes \alpha$ 的分量 $(w \otimes \alpha)^i_j = w^i \alpha_j$。根據《數學示例：協變導數》中的 (17) 和 (18)，$w \otimes \alpha$ 的協變導數 $\nabla(w \otimes \alpha)$ 是一個 $(1, 2)$ 張量場，可用以下公式計算：

$$\begin{aligned}
\nabla(w \otimes \alpha) &= (w \otimes \alpha)^i_{j;k} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \otimes dx^k \\
&= \left(\frac{\partial (w \otimes \alpha)^i_j}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kp} (w \otimes \alpha)^p_j - \Gamma^p_{kj} (w \otimes \alpha)^i_p \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \otimes dx^k \\
&= \left(\frac{\partial (w^i \alpha_j)}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kp} w^p \alpha_j - \Gamma^p_{kj} w^i \alpha_p \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \otimes dx^k \qquad (24)
\end{aligned}$$

仿照前面的做法，我們把上述協變導數推廣為「$w \otimes \alpha$ 關於 v 的協變導數」，記作 $\nabla_v(w \otimes \alpha)$，這是一個 $(1, 1)$ 張量場，其計算公式如下：

$$\nabla_v(w \otimes \alpha) = \left(v^k \frac{\partial (w^i \alpha_j)}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kp} v^k w^p \alpha_j - \Gamma^p_{kj} v^k w^i \alpha_p \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \qquad (25)$$

請讀者自行驗證，把前面的 v_I、w_I、α_I 和 Γ_{II} 代入上式，可求得在 (H, g_{II}) 上，

$$\begin{aligned}
\nabla_{v_I}(w_I \otimes \alpha_I) &= \left(\frac{(x^1)^4}{x^2} + (x^1)^2 x^2 \right) \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^1 \\
&\quad + (2(x^1)^3 + 2x^1 (x^2)^2) \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^1 - \left(\frac{(x^1)^4}{x^2} + (x^1)^2 x^2 \right) \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^2 \qquad (26)
\end{aligned}$$

另一方面，利用前面的結果 (9)，可求得

$$\begin{aligned}
(\nabla_{v_I} w_I) \otimes \alpha_I &= \left(-(x^1)^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{(x^1)^3}{x^2} \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \otimes (x^2 dx^1 - x^1 dx^2) \\
&= -(x^1)^2 x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^1 + (x^1)^3 \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^2 \\
&\quad + (x^1)^3 \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^1 - \frac{(x^1)^4}{x^2} \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^2
\end{aligned}$$

同樣，利用前面的結果 (22)，可求得

$$\begin{aligned} w_I \otimes (\nabla_{v_I} \alpha_I) &= \left(x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}\right) \otimes \left(\left(\frac{(x^1)^3}{x^2} + 2x^1x^2\right) dx^1 - (x^1)^2\, dx^2\right) \\ &= \left(\frac{(x^1)^4}{x^2} + 2(x^1)^2x^2\right) \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^1 - (x^1)^3 \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^2 \\ &\quad +((x^1)^3 + 2x^1(x^2)^2) \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^1 - (x^1)^2x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^2 \end{aligned}$$

把以上兩個結果相加，可得到

$$\begin{aligned} & (\nabla_{v_I} w_I) \otimes \alpha_I + w_I \otimes (\nabla_{v_I} \alpha_I) \\ = & \left(\frac{(x^1)^4}{x^2} + (x^1)^2x^2\right) \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^1 \\ & +(2(x^1)^3 + 2x^1(x^2)^2) \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^1 - \left(\frac{(x^1)^4}{x^2} + (x^1)^2x^2\right) \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^2 \qquad (27) \end{aligned}$$

上述結果與 (26) 相同，由此驗證了 (23)。

最後討論 $(0,0)$ 張量場的情況。設 f 為 $(0,0)$ 張量場 (即 M 上實值函數)，那麼根據《數學示例：協變導數》中的 (22)，f 的協變導數 ∇f 是具有以下形式的 $(0,1)$ 張量場：

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x^j}\, dx^j \qquad (28)$$

仿照前面的做法，我們把上述協變導數推廣為「f 關於 v 的協變導數」，記作 $\nabla_v f$，這是一個 $(0,0)$ 張量場，其計算公式如下：

$$\nabla_v f = v^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \qquad (29)$$

可是，根據註腳 1，上面等號右端的式子正好等於「f 沿著 v 的方向導數」$D_v f$ (也可記作 $v[f]$)。由於上式的值不依賴於黎曼度量 g，因此在任何黎曼流形上，都有

$$\nabla_v f = D_v f = v[f] \qquad (30)$$

由此可以看到，「關於某向量場的協變導數」從某方面看是方向導數的推廣。特別地，由於對任何向量場 u 和 w，$g(u,w)$ 是 M 上實值函數，故有

$$\nabla_v(g(u,w)) = D_v(g(u,w)) = v[g(u,w)] \qquad (31)$$

連結至數學專題
連結至周家發網頁