數學示例：積分／和分運算法則

我們在《數學示例：積分與和分》中介紹了不定積分算子 $\int$ 和不定和分算子 $\sum$ 的概念，這兩個算子的作用都是把一個函數映射為另一個函數。學過數學分析的讀者都應學過如何對函數求不定積分，為方便與下文的不定和分作比較，下表列出各種初等函數的不定積分 (在下表中，a 代表常數；此外，為免繁瑣，下表略去不定積分運算所產生的任意常數 c)：

表 1

$f(x)$	$\int f(x)$
a	ax
$x^a \quad (a \neq -1)$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
x^{-1}	$\ln \lvert x \rvert$
$a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$	$\frac{x(\ln x - 1)}{\ln a}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$

由於 $\int$ 是 D 的逆運算，上表第二欄的大多數結果可以透過 D 的運算結果而推知，或者對 D 的運算結果乘以某個常數，使所得結果符合我們所需，這是最簡單的求不定積分方法，稱為推測積分法(integration by guessing)。舉例說，如要找出函數 F，使得 $DF(x) = x^a$，可以試用 $G(x) = x^{a+1}$。但因 $DG(x) = (a+1)x^a$，這比 $DF(x)$ 多出了 $a+1$ 這個因子。為抵消上述多出來的部分，只需把 $G(x)$ 除以上述因子，由此可得 $\int x^a = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$。

我們還可通過運用不定積分的線性性質以及求不定積分的分部積分法(integration by parts) 和代入積分法(integration by substitution)，來求某些函數的不定

積分。我們在上述網頁已介紹了線性性質 (見該網頁的「定理 3」)，現把上述兩種積分法的內容整合成以下定理。

定理 1：設 f, g 為函數，則

(i) $\int(f \times Dg) = f \times g - \int(Df \times g)$

(ii) $\int f(x) = \int(f(g(t)) \times Dg(t))$，其中 $x = g(t)$

舉例說，如要求 $\int \log_a x$ (其中 $a > 0$ 並且 $a \neq 1$)，可以把 $\log_a x$ 看成乘積 $\log_a x \times 1$。據此我們設定 $f(x) = \log_a x$ 和 $Dg(x) = 1$，因而有 $Df(x) = \frac{1}{x \ln a}$ 和 $g(x) = x$。由此根據「定理 1(i)」，我們有 (以下計算要應用對數函數的以下性質：$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$)

$$\begin{aligned}\int \log_a x &= x \log_a x - \int \left(\frac{x}{x \ln a}\right) \\ &= \frac{x \ln x}{\ln a} - \frac{x}{\ln a} + c \\ &= \frac{x(\ln x - 1)}{\ln a} + c \qquad (1)\end{aligned}$$

另外又如要求 $\int \arcsin x$，首先設定 $f(x) = \arcsin x$ 和 $x = g(t) = \sin t$，然後根據「定理 1(ii)」，我們有

$$\begin{aligned}\int \arcsin x &= \int(\arcsin(\sin t) \times D \sin t) \\ &= \int t \cos t \qquad (2)\end{aligned}$$

請讀者自行驗證，用分部積分法可求得

$$\int t \cos t = t \sin t + \cos t + c \qquad (3)$$

由於先前設定了 $x = \sin t$，由此有 $t = \arcsin x$，並且 $\cos t = \sqrt{1 - (\sin t)^2} = \sqrt{1 - x^2}$。綜合以上結果，我們有

$$\begin{aligned}\int \arcsin x &= \int t \cos t \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c \qquad (4)\end{aligned}$$

以上方法當然並非萬能。在很多情況下，要運用其他複雜方法求不定積分。在某些情況下，甚至要構造某些「特殊函數」(special function) 來作為某些函數的「原函數」。

我們在《數學示例：積分與和分》中也介紹了定積分的概念以及聯繫兩種積分的「微積分基本定理」(即該網頁的「定理 1」)，現將該定理的公式重列於下 (下式等於上述網頁中的 6))：

$$\int_a^b f = \left[\int f\right]_a^b \qquad (5)$$

除了直接應用該定理求某些函數關於某個區間的定積分外，也可把該定理與前述兩種積分法結合，從而得到求定積分的兩種特殊方法，這是以下定理的內容。

定理 2：設 f 和 g 為在 $[a,b]$ 內有定義的連續函數，則

(i) $\int_a^b (f \times Dg) = [f \times g]_a^b - \int_a^b (Df \times g)$

(ii) $\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) = \int_a^b (f(g(t)) \times Dg(t))$，其中 $x = g(t)$

以 $\int_0^1 \arcsin x$ 為例，如像前面那樣設定 $f(x) = \arcsin x$ 和 $x = g(t) = \sin t$，那麼由於 $0 = \sin 0$ 和 $1 = \sin \frac{\pi}{2}$，根據「定理 2(ii)」和計算結果 (2) – (3)，可求得[1]

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arcsin x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t \\ &= [t\sin t + \cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - (0\sin 0 + \cos 0) \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

在定積分的計算中，有時會遇到積分範圍為無窮區間或者包含被積函數無定義的點的情況，這樣的定積分稱為廣義積分(improper integral)。在計算廣義積分時，要進行適當的求極限運算。以 $\int_0^1 \log_a x$ 為例，$\log_a x$ 在 $x = 0$ 點處無定義。為計算這個廣義積分，可以先把它寫成一個極限並借助 (1) 和「微積分基本定理」進行計算 (以下計算要應用 $\lim_{y\to 0}(y\ln y) = 0$ 此一事實)：

$$\int_0^1 \log_a x = \lim_{y\to 0}\int_y^1 \log_a x$$

[1]當然也可以直接運用「微積分基本定理」和計算結果 (4) 求得 $\int_0^1 \arcsin x = [x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$。

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{y\to 0}\left[\frac{x(\ln x-1)}{\ln a}\right]_y^1 \\
&= \frac{1(\ln 1-1)}{\ln a}-\lim_{y\to 0}\frac{y(\ln y-1)}{\ln a} \\
&= -\frac{1}{\ln a}
\end{aligned}
$$

接著討論不定和分的情況，下表列出部分初等函數的不定和分 (在下表中，a 和 b 是常數；此外，為免繁瑣，下表略去不定和分運算所產生的帶有周期 h 的任意周期函數 $p(x)$)：

表 2

$f(x)$	$\sum f(x)$
a	$\frac{ax}{h}$
$(x+b)^{\underline{a}}$ $(a \neq -1)$	$\frac{(x+b)^{\underline{a+1}}}{(a+1)h}$
$(x+b)^{\underline{-1}}$	$\psi\left(\frac{x+b}{h}+1\right)$
a^{bx} $(a>0, b\neq 0)$	$\frac{a^{bx}}{a^{bh}-1}$
$\log_a(bx)$ $(a,b>0, a\neq 1, h=1)$	$(\log_a b)x+\log_a\Gamma(x)$
$\sin(ax)$ $(a\neq 0)$	$-\frac{\cos\left(a\left(x-\frac{h}{2}\right)\right)}{2\sin\left(\frac{ah}{2}\right)}$
$\cos(ax)$ $(a\neq 0)$	$\frac{\sin\left(a\left(x-\frac{h}{2}\right)\right)}{2\sin\left(\frac{ah}{2}\right)}$
$\sinh(ax)$ $(a\neq 0)$	$\frac{\cosh\left(a\left(x-\frac{h}{2}\right)\right)}{2\sinh\left(\frac{ah}{2}\right)}$
$\cosh(ax)$ $(a\neq 0)$	$\frac{\sinh\left(a\left(x-\frac{h}{2}\right)\right)}{2\sinh\left(\frac{ah}{2}\right)}$

請注意上表中 $\log_a(bx)$ 的不定和分僅限於當 $h=1$ 時才成立。另外，上表中的 Γ 和 ψ 分別是「伽瑪函數」(見《數學示例：微分／差分運算法則》中的介紹) 和雙伽瑪函數(digamma function) 的符號。有關「雙伽瑪函數」及相關函數的一些重要性質以及上表中 $(x+b)^{\underline{-1}}$ 和 $\log_a(bx)$ 的不定和分的證明，請參閱本文附錄。

類似「表 1」，上表第二欄的結果可以透過推測和分法(summation by guessing) 求得。舉例說，如要找出函數 F，使得 $\Delta F(x) = \sin(ax)$，可以試用 $G(x)=\cos(ax)$，但根據《數學示例：微分／差分運算法則》的「表 2」，$\Delta G(x) = -2\sin(\frac{ah}{2})\sin(a(x+\frac{h}{2}))$。與 $\Delta F(x)$ 比較，$\Delta G(x)$ 多出了 $-2\sin(\frac{ah}{2})$

這個因子，而且其論元 $a(x+\frac{h}{2})$ 也比 $\Delta F(x)$ 的論元 ax 加多了 $\frac{ah}{2}$。為抵消上述多出來的部分，只需把 $G(x)$ 除以上述因子，並且從 $G(x)$ 的論元減去 $\frac{ah}{2}$，由此可得 $\sum \sin(ax) = -\frac{\cos(a(x-\frac{h}{2}))}{2\sin(\frac{ah}{2})} + p(x)$。

對於從「表 2」中初等函數通過加減和純量乘法而得的函數，則可通過運用和分的線性性質 (見《數學示例：積分與和分》中的「定理 3」) 來求不定和分。舉例說，如要求 $\sum x^2$，可以先運用《數學示例：微分／差分運算法則》中介紹的方法把冪函數 x^2 轉換成遞降階乘函數 $x^{\underline{2}} + hx^{\underline{1}}$，然後運用「表 2」和不定和分算子的線性性質，並最後把結果重新轉換成冪函數，其計算步驟如下：

$$\begin{aligned}\sum x^2 &= \sum(x^{\underline{2}} + hx^{\underline{1}}) \\ &= \sum x^{\underline{2}} + h\sum x^{\underline{1}} \\ &= \frac{x^{\underline{3}}}{3h} + \frac{hx^{\underline{2}}}{2h} + p(x) \\ &= \frac{x(x-h)(2x-h)}{6h} + p(x) \qquad (6)\end{aligned}$$

此外，不定和分運算也有分部和分法(summation by parts)(但卻沒有「代入和分法」)，這是以下定理的內容，請把以下定理與「定理 1(i)」比較。

定理 3：設 f, g 為函數，則

$$\sum(f \times \Delta g) = f \times g - \sum(\Delta f \times Eg) \qquad (7)$$

其中 E 是《數學示例：微分與差分》介紹的移位算子，其定義如下 (下式等於上述網頁中的 (4))：

$$Ef(x) = f(x+h) \qquad (8)$$

舉例說，如要求 $\sum \frac{(x+2h)^{\underline{2}}}{(x+3h)^{\underline{4}}}$，可以先運用《數學示例：微分／差分運算法則》中的 (12) 把 $\frac{1}{(x+3h)^{\underline{4}}}$ 轉換成 $(x-h)^{\underline{-4}}$，即把上述不定和分轉換成 $\sum((x+2h)^{\underline{2}}(x-h)^{\underline{-4}})$。為求這個不定和分，我們設定 $f(x) = (x+2h)^{\underline{2}}$ 和 $\Delta g(x) = (x-h)^{\underline{-4}}$，因而有 $\Delta f(x) = 2h(x+2h)^{\underline{1}}$ 和 $g(x) = \frac{(x-h)^{\underline{-3}}}{-3h}$。由此根據 (7)，我們有

$$\begin{aligned}\sum \frac{(x+2h)^{\underline{2}}}{(x+3h)^{\underline{4}}} &= -\frac{(x+2h)^{\underline{2}}(x-h)^{\underline{-3}}}{3h} - \sum\left(\frac{2h(x+2h)^{\underline{1}}(x^{\underline{-3}})}{-3h}\right) \\ &= -\frac{(x+2h)^{\underline{2}}(x-h)^{\underline{-3}}}{3h} + \frac{2}{3}\sum((x+2h)^{\underline{1}}(x^{\underline{-3}})) \qquad (9)\end{aligned}$$

為求上述結果中的 $\sum((x+2h)^{\underline{1}}(x^{\underline{-3}}))$，我們要多運用一次「分部和分法」。為此我們設定 $k(x)=(x+2h)^{\underline{1}}$ 和 $\Delta l(x)=x^{\underline{-3}}$，因而有 $\Delta k(x)=h$ 和 $l(x)=\frac{x^{\underline{-2}}}{-2h}$。由此根據 (7)，我們有

$$\begin{aligned}\sum((x+2h)^{\underline{1}}(x^{\underline{-3}})) &= -\frac{(x+2h)^{\underline{1}}(x^{\underline{-2}})}{2h}-\sum\left(\frac{h(x+h)^{\underline{-2}}}{-2h}\right)\\ &= -\frac{(x+2h)^{\underline{1}}(x^{\underline{-2}})}{2h}+\sum\left(\frac{(x+h)^{\underline{-2}}}{2}\right)\\ &= -\frac{(x+2h)^{\underline{1}}(x^{\underline{-2}})}{2h}-\frac{(x+h)^{\underline{-1}}}{2h}+p(x) \qquad (10)\end{aligned}$$

結合 (9) 和 (10)，我們有 (在以下計算中，p 和 q 都是帶有周期 h 的任意周期函數)：

$$\begin{aligned}\sum\frac{(x+2h)^{\underline{2}}}{(x+3h)^{\underline{4}}} &= -\frac{(x+2h)^{\underline{2}}(x-h)^{\underline{-3}}}{3h}+\frac{2}{3}\left(-\frac{(x+2h)^{\underline{1}}(x^{\underline{-2}})}{2h}-\frac{(x+h)^{\underline{-1}}}{2h}+p(x)\right)\\ &= -\frac{(x+2h)^{\underline{2}}(x-h)^{\underline{-3}}}{3h}-\frac{(x+2h)^{\underline{1}}(x^{\underline{-2}})}{3h}-\frac{(x+h)^{\underline{-1}}}{3h}+q(x)\\ &= -\frac{1}{3h}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+h}+\frac{1}{x+2h}\right)+q(x) \qquad (11)\end{aligned}$$

我們在《數學示例：積分與和分》中也介紹了定和分的概念以及聯繫兩種和分的「差和分基本定理」，現將該定理的公式重列於下 (下式等於上述網頁中的 (13))：

$$\sum_{a}^{a+(n-1)h} f=\left[\sum f\right]_a^{a+nh} \qquad (12)$$

除了直接應用該定理求某些函數關於某些定點的定和分外，也可把該定理與前述的分部和分法結合，從而得到求定和分的特殊方法，這是以下定理的內容。

定理 4：設 f 和 g 為在 a、$a+h$、...、$a+nh$ 點處有定義的函數，則

$$\sum_{a}^{a+(n-1)h}(f\times\Delta g)=[f\times g]_a^{a+nh}-\sum_{a}^{a+(n-1)h}(\Delta f\times Eg) \qquad (13)$$

運用上述計算定和分的方法，便可求得某些「級數」(series) 的值。舉例說，設我們要求 $1^2+2^2+\ldots+n^2$。這個級數可以表示成 $\sum_1^n x^2$，這相當於把 (12) 左端的 f、a 和 h 分別設定為 x^2、1 和 1。由於我們在 (6) 已求得 $\sum x^2$，

根據 (12)，可求得

$$\begin{aligned}
1^2+2^2+\ldots+n^2 &= \sum_1^n x^2 \\
&= \left[\sum x^2\right]_1^{n+1} \\
&= \left[\frac{x(x-1)(2x-1)}{6}\right]_1^{n+1} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)-1)(2(n+1)-1)}{6} - \frac{1(1-1)(2\times 1-1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (14)
\end{aligned}$$

以上計算結果跟某些數學書提供的結果一致。

類似「廣義積分」的情況，我們也可以通過適當的極限運算求「廣義和分」，通常的情況是求「無窮級數」(infinite series) 的值。舉例說，設我們要求 $\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{3\times6}+\ldots$。這個級數可以表示成 $\sum_1^\infty \frac{1}{x(x+3)}$，為求這個無窮級數，須先求其「部分和」(partial sum) $\sum_1^n \frac{1}{x(x+3)}$，為此把 $\frac{1}{x(x+3)}$ 寫成遞降階乘函數的形式如下[2]

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x(x+3)} &= \frac{(x+1)(x+2)}{x(x+1)(x+2)(x+3)} \\
&= \frac{(x+2)^{\underline{2}}}{(x+3)^{\underline{4}}}
\end{aligned}$$

至此我們把要求的部分和表示成 $\sum_1^n \frac{(x+2)^{\underline{2}}}{(x+3)^{\underline{4}}}$，這相當於把 (12) 左端的 f、a 和 h 分別設定為 $\frac{(x+2)^{\underline{2}}}{(x+3)^{\underline{4}}}$、1 和 1。由於我們在 (11) 已求得 $\sum \frac{(x+2h)^{\underline{2}}}{(x+3h)^{\underline{4}}}$，根據 (12)，可求得

$$\begin{aligned}
\sum_1^n \frac{(x+2)^{\underline{2}}}{(x+3)^{\underline{4}}} &= \left[\sum \frac{(x+2)^{\underline{2}}}{(x+3)^{\underline{4}}}\right]_1^{n+1} \\
&= \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}\right)\right]_1^{n+1}
\end{aligned}$$

[2]這裡不能把 $\frac{1}{x(x+3)}$ 寫成「部分分式」(partial fraction) 的形式，這是因為

$$\frac{1}{x(x+3)} = \frac{1}{3x} - \frac{1}{3(x+3)} = \frac{1}{3}(x-1)^{\underline{-1}} - \frac{1}{3}(x+2)^{\underline{-1}}$$

但根據「表 2」，$\sum(x-1)^{\underline{-1}}$ 和 $\sum(x+2)^{\underline{-1}}$ 都不是初等函數。

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)+1}+\frac{1}{(n+1)+2}\right)-\left(-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+2}\right)\right)\\
&= \frac{11}{18}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)
\end{aligned}
$$

接著便可用極限運算求所需的無窮級數：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1\times 4}+\frac{1}{2\times 5}+\frac{1}{3\times 6}+\ldots &= \sum_{1}^{\infty}\frac{(x+2)^{\underline{2}}}{(x+3)^{\underline{4}}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{n}\frac{(x+2)^{\underline{2}}}{(x+3)^{\underline{4}}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{11}{18}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)\right)\\
&= \frac{11}{18} \qquad (15)
\end{aligned}
$$

以上方法還可用來判斷「冪級數」(power series) 的斂散性。冪級數是指具有以下形式的級數：

$$
\sum_{x=0}^{\infty}k(x)y^x = k(0)+k(1)y+k(2)y^2+\ldots \qquad (16)
$$

其中 $k(x)$ 是這個級數的各個項的係數，這個係數可以是常數，也可以隨著 x 而變化，所以寫成函數 $k(x)$ 的形式；y^x 則可被看成以變項 y 為底的指數函數 (跟「表 1」和「表 2」中以常數 a 為底的指數函數 a^x 有所不同)。由此可見，(16) 包含著兩個變項 x 和 y，隨著 y 變化，(16) 可以具有不同的斂散性和極限。舉例說，考慮冪級數 $1+2y+3y^2+\ldots$，這個級數可以表示成 $\sum_0^{\infty}(x+1)^{\underline{1}}y^x$。為求這個無窮級數的值，須先求其部分和 $\sum_0^{n-1}(x+1)^{\underline{1}}y^x$。以下將應用 (13)，為此暫時把 y 當作常數處理，並設定 $a=0$、$h=1$、$f(x)=(x+1)^{\underline{1}}$ 和 $\Delta g(x)=y^x$，因而有 $\Delta f(x)=1$ 和 $g(x)=\frac{y^x}{y-1}$。由此根據 (13)，我們有

$$
\begin{aligned}
\sum_{0}^{n-1}(x+1)^{\underline{1}}y^x &= \left[\frac{(x+1)y^x}{y-1}\right]_0^n-\sum_{0}^{n-1}\left(\frac{y^{x+1}}{y-1}\right)\\
&= \frac{(n+1)y^n}{y-1}-\frac{(0+1)y^0}{y-1}-\frac{y}{y-1}\sum_{0}^{n-1}y^x\\
&= \frac{(n+1)y^n-1}{y-1}-\frac{y}{y-1}\left[\frac{y^x}{y-1}\right]_0^n\\
&= \frac{(n+1)y^n-1}{y-1}-\frac{y}{y-1}\left(\frac{y^n}{y-1}-\frac{y^0}{y-1}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(n+1)y^n - 1}{y-1} + \frac{y - y^{n+1}}{(y-1)^2} \\
&= \frac{y^n(ny - n - 1) + 1}{(y-1)^2} \qquad (17)
\end{aligned}
$$

為驗證上述結果，可以把 $n = 3$ 代入上式，從而求得

$$
\begin{aligned}
\sum_{0}^{2} (x+1)^{\underline{1}} y^x &= \frac{y^3(3y - 3 - 1) + 1}{(y-1)^2} \\
&= 1 + 2y + 3y^2
\end{aligned}
$$

這正是我們期待的結果。為判斷上述冪級數的斂散性，我們把 (17) 分拆為包含 y^n 和不含 y^n 的兩項：

$$
\frac{y^n(ny - n - 1)}{(y-1)^2} + \frac{1}{(y-1)^2}
$$

容易看到，若 $|y| > 1$，隨著 n 趨向 ∞，上式第一項趨向 ∞ 或交替趨向 $\pm\infty$。若 $y = 1$，上式無定義。若 $y = -1$，則上式第一項等於 $\frac{(-1)^n(-2n-1)}{4}$，此式也是隨著 n 趨向 ∞ 而交替趨向 $\pm\infty$。可是，若 $|y| < 1$，隨著 n 趨向 ∞，上式第一項趨向 0。由此可以得出結論：當且僅當 $|y| < 1$，我們有

$$
1 + 2y + 3y^2 + \ldots = \frac{1}{(y-1)^2}
$$

舉例說，如把 $y = -\frac{9}{10}$ 代入上式，可得

$$
\begin{aligned}
1 + 2\left(-\frac{9}{10}\right) + 3\left(-\frac{9}{10}\right)^2 + \ldots &= \frac{1}{\left(-\frac{9}{10} - 1\right)^2} \\
&= \frac{100}{361}
\end{aligned}
$$

上述冪級數有趣之處在於，雖然它的部分和在 n 的值較小時交替呈現為正值和負值，但隨著 n 的值增大最終會趨向於正值 $\frac{100}{361}$。

本文介紹了運用「表 2」、「分部和分法」和「差和分基本定理」求級數／冪級數的值的方法。由於「表 2」的適用程度有限，使用上述方法只能處理部分級數／冪級數。為處理更多類型的級數／冪級數，還要借助其他理論，本文不能一一介紹。

附錄

本附錄提供雙伽瑪函數及相關函數的一些基本資料以及「表 2」中兩個結果的證明。雙伽瑪函數是伽瑪函數的自然對數的導數，即

$$\psi(x) = D\ln\Gamma(x) \qquad (18)$$

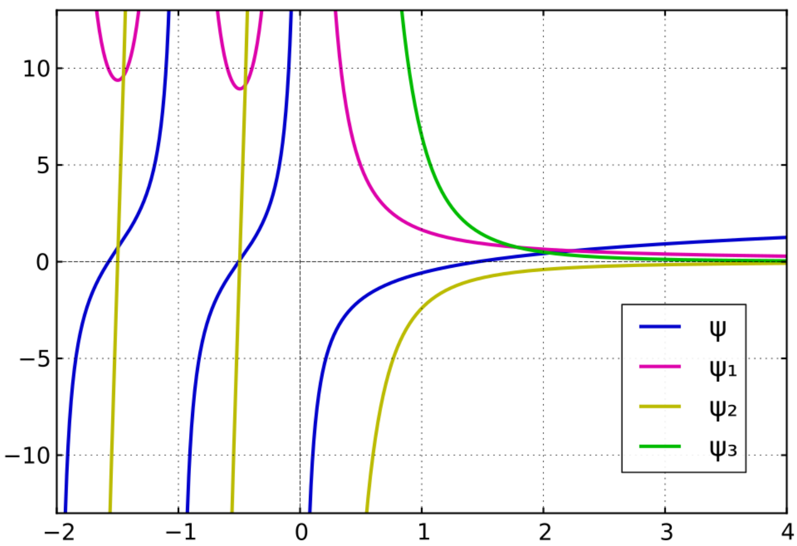
如對雙伽瑪函數求導數，可得到三伽瑪函數(trigamma function)，記作 $\psi_1(x)$，即

$$\psi_1(x) = D\psi(x) = D^2\ln\Gamma(x) \qquad (19)$$

以上函數和符號還可以繼續類推，一般地，我們有

$$\psi_n(x) = D^n\psi(x) = D^{n+1}\ln\Gamma(x),\ \ n > 1 \qquad (20)$$

ψ (有些人也把 ψ 寫作 ψ_0)、ψ_1、...、ψ_n、... 構成一個序列，統稱為多伽瑪函數(polygamma function)，下圖展示這個序列中首四個成員在 $x \in (-2, 4)$ 的圖象：



從上述定義，可以推導出有關這些函數的一些重要性質。根據《數學示例：微分／差分運算法則》，伽瑪函數滿足以下遞推關係 (等於上述網頁的 (7))：

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad (21)$$

對上式左右兩端先後進行自然對數和求導數運算，可得

$$\ln\Gamma(x+1) \quad = \quad \ln x + \ln\Gamma(x)$$

$$
\begin{aligned}
D \ln \Gamma(x+1) &= \frac{1}{x} + D \ln \Gamma(x) \\
&\vdots \\
D^{n+1} \ln \Gamma(x+1) &= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} + D^{n+1} \ln \Gamma(x)
\end{aligned}
$$

利用 (18) 和 (20)，從上面的計算結果可得以下遞推關係：

$$\psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{x} \qquad (22)$$

$$\psi_n(x+1) = \psi_n(x) + \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \qquad (23)$$

接下來讓我們求 $\Delta\psi(\frac{x+b}{h}+1)$。為此須先證明 Δ 與 D 算子具有交換性如下：對任何函數 $f(x)$，一方面有

$$\Delta D f(x) = D f(x+h) - D f(x)$$

另一方面又有

$$
\begin{aligned}
D\Delta f(x) &= D(f(x+h) - f(x)) \\
&= D f(x+h) - D f(x)
\end{aligned}
$$

由此證得 $\Delta D = D\Delta$。利用此一關係，我們有

$$
\begin{aligned}
\Delta\psi\left(\frac{x+b}{h}+1\right) &= \Delta D \ln\Gamma\left(\frac{x+b}{h}+1\right) \\
&= D\Delta \ln\Gamma\left(\frac{x+b}{h}+1\right) \\
&= D\left(\ln\Gamma\left(\frac{(x+h)+b}{h}+1\right) - \ln\Gamma\left(\frac{x+b}{h}+1\right)\right) \\
&= D\left(\ln\Gamma\left(\frac{x+b}{h}+2\right) - \ln\Gamma\left(\frac{x+b}{h}+1\right)\right) \\
&= D\ln\left(\frac{\Gamma\left(\frac{x+b}{h}+2\right)}{\Gamma\left(\frac{x+b}{h}+1\right)}\right) \\
&= D\ln\left(\frac{\left(\frac{x+b}{h}+1\right)\Gamma\left(\frac{x+b}{h}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{x+b}{h}+1\right)}\right) \\
&= D\ln\left(\frac{x+b}{h}+1\right) \\
&= \frac{1}{x+b+h} \\
&= (x+b)^{\underline{-1}} \qquad (24)
\end{aligned}
$$

從以上結果可以推得

$$\sum (x+b)^{\underline{-1}} = \psi\left(\frac{x+b}{h}+1\right) + p(x) \qquad (25)$$

至此證得「表 2」中有關 $(x+b)^{\underline{-1}}$ 的不定和分結果。在以上的推導中，如用 $D^n\psi(\frac{x+b}{h}+1)$ 代替 $\psi(\frac{x+b}{h}+1)$，那麼最後可得到

$$\begin{aligned} \Delta D^n\psi\left(\frac{x+b}{h}+1\right) &= D^n\left(\frac{1}{x+b+h}\right) \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(x+b+h)^{n+1}} \\ &= (-1)^n n!((x+b)^{\underline{-1}})^{n+1} \qquad (26) \end{aligned}$$

從以上結果可以推得以下一般結果：

$$\sum ((x+b)^{\underline{-1}})^n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\psi_{n-1}\left(\frac{x+b}{h}+1\right) + p(x), \;\; n > 1 \qquad (27)$$

接下來讓我們計算 $\Delta((\log_a b)x + \log_a \Gamma(x))$ (這裡設定 $h=1$)：

$$\begin{aligned} \Delta((\log_a b)x + \log_a \Gamma(x)) &= \log_a b + \log_a \Gamma(x+1) - \log_a \Gamma(x) \\ &= \log_a b + \log_a\left(\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}\right) \\ &= \log_a b + \log_a\left(\frac{x\Gamma(x)}{\Gamma(x)}\right) \\ &= \log_a b + \log_a x \\ &= \log_a(bx) \end{aligned}$$

從以上結果可以推得

$$\sum \log_a(bx) = (\log_a b)x + \log_a \Gamma(x) + p(x) \qquad (28)$$

至此證得「表 2」中有關 $\log_a(bx)$ 的不定和分結果。

連結至數學專題
連結至周家發網頁