數學示例：流形上的積分

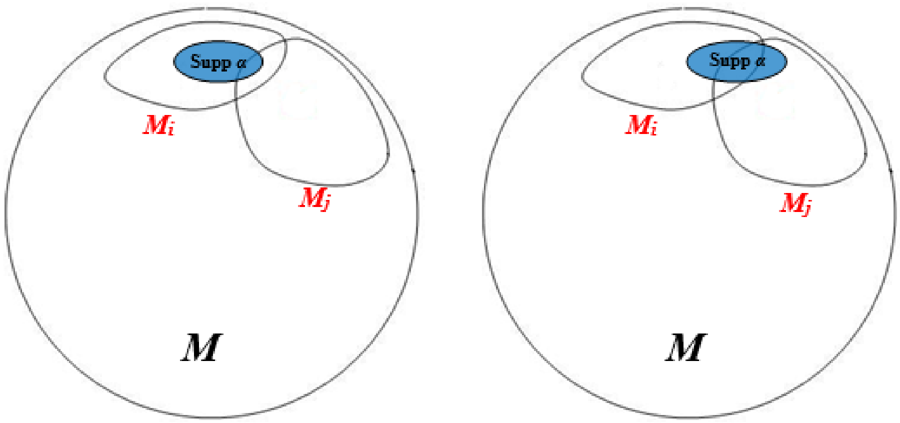
我們在《數學示例：流形上的微分》中介紹了一般流形上與微分 (即外導數) 運算相關的概念。我們在《數學示例：微分形式的積分》中也曾介紹微分形式的積分運算，但其中有些計算方法只適用於 $\mathbb{R}^n$ 空間，本文主旨是把該網頁介紹的積分運算推廣到一般可定向流形。

在介紹流形上的積分前，須先引入「支集」的概念。設 M 為流形，α 為 $\Gamma(\bigwedge^k T^*M)$ 中的微分 k 形式，則 α 的支集(support)，記作 Supp α，定義如下：

$$\text{Supp } \alpha = \overline{\{x \in M : \alpha(x) \neq 0\}} \qquad (1)$$

根據《數學示例：k 向量與 k 餘向量》，微分 k 形式是一個把 M 上的可變點 x 映射為 x 處某個 k 餘向量的函數，因此在上式中，0 代表 $\bigwedge^k T_x^*M$ 中的零 k 餘向量。上式中的上劃線代表其下集合的「閉包」[1]。

根據 Supp α 的成員在 M 上的分佈，我們要考慮不同情況，首先考慮下面左圖的情況：



上面左圖顯示 m 維可定向流形 M 的兩個坐標卡：$\phi_i : R_i \to M_i$ 和

[1]有關「閉包」的定義，請參閱《數學示例：開集與閉集》。粗略地說，一個集合的閉包是包含該集合的最小的閉集。

$\phi_j : R_j \to M_j$ (這裡只繪出 M_i 和 M_j)。為簡化討論，以下假設這兩個坐標卡屬於同一個定向，並且有 $M_i \cap M_j \neq \emptyset$。設 α 為 M 上的微分 m 形式，使得 Supp α 是一個緊致集合，並且 Supp $\alpha \subseteq M_i$，根據支集的定義，這即是說 α 在 M_i 以外一律取 0 值。因此之故，在計算 $\int_M \alpha$ 時，只需考慮坐標卡 ϕ_i，而無需考慮其他坐標卡，這實際等於把 α 僅僅看成 M_i 上 (而非整個 M 上) 的微分 m 形式，由此有

$$\int_M \alpha = \int_{M_i} \alpha \qquad (2)$$

不過，由於 M_i 不是 $\mathbb{R}^m$ 空間的子集，我們無法直接計算 $\int_{M_i} \alpha$，但卻可以運用「拉回」運算 $(\phi_i)^*$ 把 $\alpha \in \Gamma(\bigwedge^k T^*M_i)$ 轉化為 $(\phi_i)^*\alpha \in \Gamma(\bigwedge^k T^*R_i)$。由此我們有

$$\int_{M_i} \alpha = \begin{cases} \int_{R_i}(\phi_i)^*\alpha, & \text{若 } R_i \text{ 取標準定向} \\ -\int_{R_i}(\phi_i)^*\alpha, & \text{若 } R_i \text{ 取非標準定向} \end{cases} \qquad (3)$$

由於 R_i 是 $\mathbb{R}^m$ 的子集，接著便可以用《數學示例：微分形式的積分》中介紹的方法求 $\int_{R_i}(\phi_i)^*\alpha$ 或 $-\int_{R_i}(\phi_i)^*\alpha$。

舉例說，考慮我們在《數學示例：流形上的微分》討論過的 3 維實射影空間 $\mathbb{RP}^3$。根據該網頁，這個空間的成員是以下等價關係的等價類，設 $(p_1, p_2, p_3, p_4), (q_1, q_2, q_3, q_4) \in \mathbb{R}^4 - \{(0, 0, 0, 0)\}$，則 (下式大致等於上述網頁的 (5))：

$$\begin{aligned} &(p_1, p_2, p_3, p_4) \sim (q_1, q_2, q_3, q_4) \text{ 當且僅當} \\ &\text{存在} k \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ 使得} (q_1, q_2, q_3, q_4) = (kp_1, kp_2, kp_3, kp_4) \qquad (4) \end{aligned}$$

以下把包含 (p_1, p_2, p_3, p_4) 的等價類記作 $(p_1 : p_2 : p_3 : p_4)$。為簡化以下數式，現設定 $x = (x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ 和 $y = (y_1, y_2, y_3)$。

接著定義 $M_I = \{x \in \mathbb{RP}^3 : x_1 \neq 0\}$ 和 $R_I = \mathbb{R}^3$ (取標準定向)，以下是 M_I 的坐標卡及其逆函數 (以下兩式大致等於上述網頁的 (6) 和 (7))：

$$\phi_I : R_I \to M_I; \;\; \phi_I(y) = (1 : y_1 : y_2 : y_3) \qquad (5)$$

$$\phi_I{}^{-1} : M_I \to R_I; \;\; \phi_I{}^{-1}(x) = \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \frac{x_4}{x_1}\right) \qquad (6)$$

以下是 $\Gamma(\bigwedge^3 T^*\mathbb{RP}^3)$ 中的一個微分 3 形式：

$$\alpha_I(x) = \begin{cases} (\phi_I{}^{-1})^*(y_1 y_2{}^2 y_3{}^3 dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3), & \text{若} x \in \phi_I((0, 1]^3) \\ 0, & \text{若} x \notin \phi_I((0, 1]^3) \end{cases} \qquad (7)$$

請注意上式是透過 R_I 上的對應微分 3 形式來間接定義 α_I，事實上，我們有

$$(\phi_I)^*\alpha_I(y) = \begin{cases} y_1{y_2}^2{y_3}^3 dy_1\wedge dy_2\wedge dy_3, & \text{若 } y\in(0,1]^3 \\ 0, & \text{若 } y\notin(0,1]^3 \end{cases} \quad (8)$$

從上式容易看到 $\{y\in R_I:(\phi_I)^*\alpha_I(y)\neq 0\}=(0,1]^3$，由此根據 (1)，可知 Supp $(\phi_I)^*\alpha_I=[0,1]^3$。由此再根據 $(\phi_I)^*\alpha_I$ 與 α_I 的對應關係，可知 Supp $\alpha_I=\phi_I([0,1]^3)$。由於這個集合是 $[0,1]^3$ 在同胚映射 ϕ_I 下的映象，而 $[0,1]^3$ 是緊致集合 (因為它是 $\mathbb{R}^3$ 的有界閉子集)，因此 Supp α_I 是一個緊致集合，而且根據 (5)，必有 Supp $\alpha_I=\phi_I([0,1]^3)\subseteq M_I$。由此根據 (2)，有

$$\int_{\mathbb{RP}^3}\alpha_I=\int_{M_I}\alpha_I$$

接著根據 (3) 和 (8)，可求得

$$\begin{aligned}\int_{M_I}\alpha_I &= \int_{R_I}(\phi_I)^*\alpha_I\\ &= \int_{(0,1]^3} y_1{y_2}^2{y_3}^3 dy_1\wedge dy_2\wedge dy_3\\ &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 y_1{y_2}^2{y_3}^3 dy_1dy_2dy_3\\ &= \frac{1}{24}\end{aligned}$$

請注意根據 (8)，$(\phi_I)^*\alpha_I$ 在 $(0,1]^3$ 以外一律取 0 值，所以上面第二行把積分範圍從 R_I 縮小為 $(0,1]^3$。綜合以上計算結果，我們有 $\int_{\mathbb{RP}^3}\alpha_I=\frac{1}{24}$。

以上我們考慮了最簡單的情況，即上面左圖的情況。接下來考慮較複雜的情況，即上面右圖的情況。在該圖中，Supp α 的成員並非限制在 M_i 內，而是橫跨 M_i 和 M_j。在此情況下，為求 $\int_M\alpha$，我們不能像 (2) 那樣僅僅計算 $\int_{M_i}(\phi_i)^*\alpha$，也不能分別計算 $\int_{M_i}(\phi_i)^*\alpha$ 和 $\int_{M_j}(\phi_j)^*\alpha$，然後把結果加起來，即求 $\int_{M_i}\alpha+\int_{M_j}\alpha$，因為這樣做會把 $M_i\cap M_j$ 的元素對整個積分的貢獻計算兩次。有些人或許認為，可以計算 $\int_{M_i}\alpha+\int_{M_j}\alpha-\int_{M_i\cap M_j}\alpha$ 以求 $\int_M\alpha$。但這種計算方法只能解決當前較簡單的問題，如果 Supp α 的成員橫跨 M 的多個或甚至無窮多個開子集，使用這種方法求 $\int_M\alpha$ 便會很繁瑣，或甚至無法進行。

為解決上述難題,我們要引入「1 的分解」(partition of unity) 的概念。設 M 為

流形，$\{M_i\}_{i\in I}$[2]為 M 的某個「開覆蓋」(open cover)，即滿足 $\bigcup_{i\in I} M_i = M$ 的開子集 M_i 組成的集合，則一個從屬於 $\{M_i\}_{i\in I}$ 的 1 的分解(partition of unity subordinate to $\{M_i\}_{i\in I}$) 是指一個 M 上實值函數的集合 $\{f_j : M \to \mathbb{R}\}_{j\in J}$，這個集合中的函數具有以下性質：

(i) 對每個 $j \in J$ 和 $x \in M$，都有 $f_j(x) \geq 0$

(ii) 對每個 $x \in M$，只有有限個 $j \in J$，使得 $f_j(x) \neq 0$

(iii) 對每個 $j \in J$，都有某個 M_i 使得 Supp f_j 是 M_i 的緊致子集

(iv) 對每個 $x \in M$，$\sum_{j\in J} f_j(x) = 1$

在上述定義中，Supp f_j 是函數 f_j 的支集，其定義如下：

$$\text{Supp } f_j = \overline{\{x \in M : f_j(x) \neq 0\}} \qquad (9)$$

上式在形式上跟 (1) 非常相似，所不同者僅在於上式中的 0 是實數 0 (因為 f_j 是實值函數)，而 (1) 中的 0 則是零 k 餘向量 (因為 α 是微分 k 形式，即輸出 k 餘向量的函數)。上述性質 (i) 和 (ii) 是說，$f_j(x)$ 永不取負值，而且對任何 x 只有有限個 j 使得 $f_j(x)$ 取正值，這樣可確保 (iv) 中的 $\sum_{j\in J} f_j(x)$ 是對有限個項的求和運算；性質 (iii) 和 (iv) 則可以分別概括為「$\{f_j\}_{j\in J}$ 從屬於 $\{M_i\}_{i\in I}$」和「$\{f_j\}_{j\in J}$ 是一個 1 的分解」。

給定任何流形 M 及其圖冊 $A = \{\phi_i : R_i \to M_i\}_{i\in I}$，$\{M_i\}_{i\in I}$ 構成 M 的一個開覆蓋。可以證明，對於任何 (M, A)，都存在一個從屬於 $\{M_i\}_{i\in I}$ 的 1 的分解，為簡化術語，以下把這個 1 的分解稱為「從屬於 A 的 1 的分解」。由於「1 的分解」是頗為抽象的概念，以下只考慮一個簡單 1 維流形－ $\mathbb{R}$ [3]及其圖冊 A_I，這個圖冊包含以下兩個坐標卡 (下式中兩個區間 $(-\infty, 2\pi)$ 和 $(-2\pi, \infty)$ 均取標準定向)：

$$\phi_{III} : (-\infty, 2\pi) \to (-\infty, 2\pi); \;\; \phi_{III}(t) = t \qquad (10)$$

$$\phi_{IV} : (-2\pi, \infty) \to (-2\pi, \infty); \;\; \phi_{IV}(t) = t \qquad (11)$$

請注意以上兩個坐標卡都是恆等函數，而其定義域和對應域是相同的 $\mathbb{R}$ 的開子集。據此，$\mathbb{R}$ 的一個開覆蓋就是 $\{(-\infty, 2\pi), (-2\pi, \infty)\}$。另請注意，$\mathbb{R}$ 的圖冊其實可以只包含以下這個坐標卡：

$$\phi_V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \;\; \phi_V(t) = t \qquad (12)$$

[2]這裡 $\{M_i\}_{i\in I}$ 定義一個帶有指標集 (index set) 的「集合族」(family of sets，即集合的集合)，其中 i 是這個集合族的「指標」，I 則是「指標集」。例如如果 $I = \mathbb{N}$，那麼 $\{M_i\}_{i\in \mathbb{N}} = \{M_1, M_2, M_3, M_4, \ldots\}$。使用指標集的好處是易於表達包含無窮個集合的集合族。

[3]由於 $\mathbb{R}$ 是我們熟悉的空間，其實根本無需應用「1 的分解」的概念以計算以下的積分。以下提供的例子只是純粹讓讀者理解「1 的分解」的概念及其對一般流形積分的應用。

但為免使以下計算例子過於「平凡」，這裡選擇一個包含兩個坐標卡的圖冊。

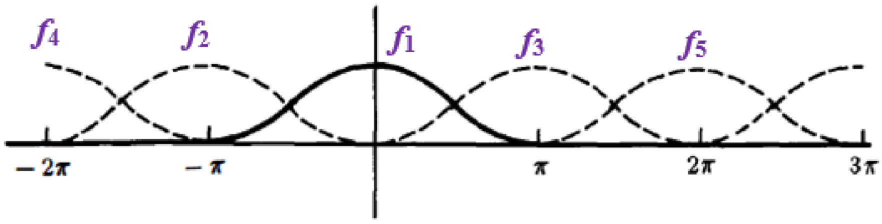
現設 $j \in \mathbb{N}$，並定義以下函數：若 $j = 2n+1$，則

$$f_{2n+1}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+\cos(t-n\pi)), & 若 t \in [(n-1)\pi, (n+1)\pi] \\ 0, & 若 t \notin [(n-1)\pi, (n+1)\pi] \end{cases} \tag{13}$$

若 $j = 2n$，則

$$f_{2n}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+\cos(t+n\pi)), & 若 t \in [(-n-1)\pi, (-n+1)\pi] \\ 0, & 若 t \notin [(-n-1)\pi, (-n+1)\pi] \end{cases} \tag{14}$$

下圖展示 f_1 至 f_5 的圖象：



$\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是一個從屬於 A_I 的 1 的分解，上圖可幫助我們驗證 $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 具有前述的四個性質。(i) 對每個 $j \in \mathbb{N}$ 和 $t \in \mathbb{R}$，顯然都有 $f_j(t) \geq 0$。(ii) 對每個 $t \in \mathbb{R}$，最多只有 2 個 j，使得 $f_j(t) \neq 0$。事實上，從上圖可以看到，若 t 等於 π 的整數倍，只有 1 個 j 使得 $f_j(t)$ 取正值；否則只有 2 個 j 使得 $f_j(t)$ 取正值。(iii) 對每個 $j \in \mathbb{N}$，Supp $f_j = [k\pi, (k+2)\pi]$ (其中 k 是某個整數)，由於 $[k\pi, (k+2)\pi]$ 是緊致集合而且必是 $(-\infty, 2\pi)$ 或 $(-2\pi, \infty)$ 的子集，因此 $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 確是從屬於 A_I。

為驗證 (iv)，要作更細致的分析。若 $t = n\pi$，其中 n 是 0 或正整數，則只有 $f_{2n+1}(n\pi)$ 取正值，而且根據 (13)，

$$f_{2n+1}(n\pi) = \frac{1}{2}(1+\cos(n\pi - n\pi)) = 1$$

若 $t = -n\pi$，其中 n 是正整數，則只有 $f_{2n}(-n\pi)$ 取正值，而且根據 (14)，

$$f_{2n}(-n\pi) = \frac{1}{2}(1+\cos(-n\pi + n\pi)) = 1$$

若 $t \in (n\pi, (n+1)\pi)$，其中 n 是 0 或正整數，則只有 $f_{2n+1}(t)$ 和 $f_{2(n+1)+1}(t)$ 取正值，而且根據 (13)，

$$f_{2n+1}(t) + f_{2(n+1)+1}(t) \quad = \quad \frac{1}{2}(1+\cos(t-n\pi)) + \frac{1}{2}(1+\cos(t-n\pi-\pi))$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(2+\cos(t-n\pi)-\cos(t-n\pi)) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

若 $t\in(-(n+1)\pi,-n\pi)$，其中 n 是 0 或正整數[4]，則只有 $f_{2(n+1)}(t)$ 和 $f_{2n}(t)$ 取正值，而且根據 (14)，

$$
\begin{aligned}
f_{2(n+1)}(t)+f_{2n}(t) &= \frac{1}{2}(1+\cos(t+n\pi+\pi))+\frac{1}{2}(1+\cos(t+n\pi)) \\
&= \frac{1}{2}(2-\cos(t+n\pi)+\cos(t+n\pi)) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

上述計算結果顯示，對任何 $t\in\mathbb{R}$，都有 $\sum_{j\in J} f_j(t)=1$，因此 $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 確是一個 1 的分解。

上述概念有助解決前述積分定義上的難題。設 (M,A) 為 m 維可定向流形及其圖冊，$\{f_j\}_{j\in J}$ 為從屬於 A 的 1 的分解，α 為 M 上的微分 m 形式使得 Supp α 是 M 的緊致子集，則

$$
\int_M \alpha = \sum_{j\in J}\int_M f_j\alpha \qquad (15)
$$

上式是合理的，由於對任何 $x\in M$，$\sum_{j\in J} f_j(x)=1$，我們有 $\int_M \alpha = \int_M(\sum_{j\in J} f_j)\alpha$。由此根據乘法對加法的分配律，有 $\int_M \alpha=\int_M \sum_{j\in J}(f_j\alpha)$。由此再根據積分運算的線性性質，又有 $\int_M \alpha=\sum_{j\in J}\int_M f_j\alpha$，此即 (15)。

由於對每個 j 都有某個 i 使得 Supp $f_j\subseteq M_i$，我們必有 Supp $f_j\alpha\subseteq M_i$ (因為 Supp $f_j\alpha\subseteq$ Supp f_j)，此即上面左圖所示的情況。這麼一來我們便可用 (2) 和 (3) 求 $\int_M f_j\alpha$，把各個 $\int_M f_j\alpha$ 的值加起來，便得到 $\int_M \alpha$ 的值。由此可見，(15) 是借助 $\{f_j\}_{j\in J}$ 把「整體積分」$\int_M \alpha$ 化約為一系列「部分積分」$\int_M f_j\alpha$ 之和，而這些「部分積分」正符合上面左圖所示的情況,可用公式 (2) 和 (3) 來計算,這就是 1 的分解對一般流形上積分的作用。

舉例說，考慮 $\mathbb{R}$ 上的以下微分 1 形式：

$$
\alpha_{III}(t)=\begin{cases} \sin t dt, & 若 t\in\left[-\frac{3\pi}{2},-\pi\right]\cup\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right] \\ 0, & 若 t\notin\left[-\frac{3\pi}{2},-\pi\right]\cup\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right] \end{cases} \qquad (16)
$$

由於 Supp $\alpha_{III}=[-\frac{3\pi}{2},-\pi]\cup[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$ 是 $\mathbb{R}$ 的緊致子集，我們可以用 (15) 求 $\int_{\mathbb{R}}\alpha_{III}$。為用 (15)，我們首先注意到只有當 $j\in\{4,2,1,3\}$，才有 Supp

[4]為簡化分析，這裡把 $f_1(t)$ 當作 $f_0(t)$ 處理，這是合理的，因為根據 (13) 和 (14)，對任何 $t\in\mathbb{R}$，都有 $f_1(t)=f_0(t)$。

$f_j\alpha_{III} \neq 0$，因此只須就 $j \in \{4,2,1,3\}$ 計算 $\int_{\mathbb{R}} f_j\alpha_{III}$，以下讓我們計算 $\int_{\mathbb{R}} f_4\alpha_{III}$。由於 Supp $f_4\alpha_{III} = [-\frac{3\pi}{2}, -\pi] \subseteq (-\infty, 2\pi)$，在計算 $\int_{\mathbb{R}} f_4\alpha_{III}$ 時，只需考慮坐標卡 ϕ_{III}。由此根據 (2) 和 (3)，可求得

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f_4\alpha_{III} &= \int_{(-\infty,2\pi)} f_4\alpha_{III} \\
&= \int_{(-\infty,2\pi)} (\phi_{III})^* f_4\alpha_{III} \\
&= \int_{[-\frac{3\pi}{2},-\pi]} \frac{1}{2}\sin t(1+\cos(t+2\pi))dt \\
&= \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\pi} \frac{1}{2}\sin t(1+\cos t)dt \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

請注意由於 ϕ_{III} 是恆等函數，$(\phi_{III})^* f_4\alpha_{III} = f_4\alpha_{III}$。另外，根據前面的討論，$f_4\alpha_{III}$ 在 $[-\frac{3\pi}{2}, -\pi]$ 以外一律取 0 值，所以上面第二行把積分範圍從 $(-\infty, 2\pi)$ 縮小為 $[-\frac{3\pi}{2}, -\pi]$。

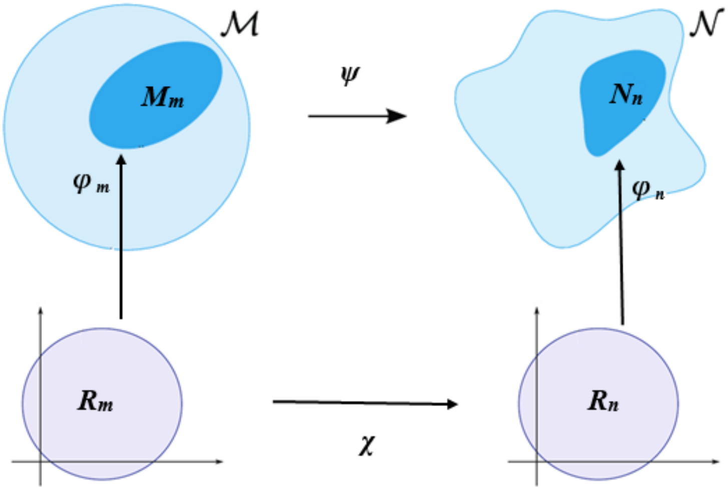
讀者請自行驗證，$\int_{\mathbb{R}} f_2\alpha_{III} = \frac{3}{4}$，$\int_{\mathbb{R}} f_1\alpha_{III} = \frac{1}{\sqrt{2}}$，$\int_{\mathbb{R}} f_3\alpha_{III} = \frac{1}{\sqrt{2}}$。由此根據 (15)，可求得

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \alpha_{III} &= \int_{\mathbb{R}} f_4\alpha_{III} + \int_{\mathbb{R}} f_2\alpha_{III} + \int_{\mathbb{R}} f_1\alpha_{III} + \int_{\mathbb{R}} f_3\alpha_{III} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= 1 + \sqrt{2}
\end{aligned}$$

請注意事實上沒有人會用 (15) 進行積分運算，這是因為要為特定的流形和微分形式找出適當的 1 的分解並非容易的事。即使能找出適當的 1 的分解，(15) 中的積分運算也不一定容易進行。事實上，讀者可自行驗證，利用傳統數學分析的技巧計算 $\int_{\mathbb{R}} \alpha_{III}$ 可得到相同結果，而且較用公式 (15) 容易計算。不過，由於 (15) 可應用於一般流形，所以有重要的理論意義。另請注意，1 的分解在拓樸學和黎曼幾何中還有其他應用。

在流形的積分理論中，還有一條重要的求積分公式。但在介紹該公式前，須先介紹兩個流形之間函數的「前推」和「拉回」運算[5]，讀者可用下圖幫助理解以下討論：

[5]我們在《數學示例：流形上的微分》中已介紹了一般流形上的前推和拉回運算，那是流形的「坐標卡函數」和「轉換函數」的前推和拉回運算，這裡要介紹的是「兩個流形之間函數」的前推和拉回運算。



上圖展示 m 維流形 M 和 n 維流形 N 各自的一個開子集 M_m 和 N_n，以及這兩個開子集的坐標卡：$\phi_m : R_m \to M_m$ 和 $\phi_n : R_n \to N_n$。上圖還展示一個把 M 映射到 N 的函數 ψ。從上圖所示的函數，容易推導出一個把 R_m 映射到 R_n 的函數 χ：

$$\chi = {\phi_n}^{-1} \circ \psi \circ \phi_m \qquad (17)$$

函數 χ 的重要性在於，它是 $\mathbb{R}^m$ 子集 R_m 和 $\mathbb{R}^n$ 子集 R_n 之間的函數，因此可以進行微分運算 (而 ψ 卻不一定能進行這種運算)，因此我們可以透過 χ 來間接定義 ψ 的與微分有關的性質和運算，例如 ψ 的可微性便可以定義為等同於 χ 的可微性。

ψ 的前推和拉回也可透過 χ 來間接定義。設有 M 上的向量場 v，現欲通過前推運算 ψ_* 求 N 上的對應向量場 $\psi_* v$。但根據上圖和複合函數的前推的性質 (即 $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$)，我們可以用下式求 ψ_*：

$$\psi_* = (\phi_n)_* \circ \chi_* \circ ({\phi_m}^{-1})_* \qquad (18)$$

類似地，設有 N 上的微分 k 形式 α，現欲通過拉回運算 ψ^* 求 M 上的對應微分 k 形式 $\psi^*\alpha$。根據上圖和複合函數的拉回的性質 (即 $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$)，我們可以用下式求 ψ^*：

$$\psi^* = ({\phi_m}^{-1})^* \circ \chi^* \circ (\phi_n)^* \qquad (19)$$

接著便可介紹另一條求積分公式。設 M 和 N 為如上定義的流形，ψ 為把 M 映射到 N 的一一到上可微函數 (因此必有 $m = n$)，α 為 N 上的微分 m 形式，則 (下式大致等於《數學示例：微分形式的積分》中的 (7))

$$\int_N \alpha = \begin{cases} \int_M \psi^*\alpha, & \text{若 } \psi \text{ 是保向的} \\ -\int_M \psi^*\alpha, & \text{若 } \psi \text{ 是逆向的} \end{cases} \qquad (20)$$

舉例說，設 $M = N = \mathbb{RP}^3$。為簡化以下數式，現設定 $x = (x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$，$y = (y_1, y_2, y_3)$，$z = (z_1 : z_2 : z_3 : z_4)$ 和 $w = (w_1, w_2, w_3)$。接著定義 $M_m = N_n = \{x \in \mathbb{RP}^3 : x_1 \neq 0\}$ 和 $R_m = R_n = \mathbb{R}^3$ (取標準定向)，以下是 M_m 和 N_n 的坐標卡及其逆函數 (以下的 ϕ_m 和 ϕ_n 實質上等於前面討論過的 ϕ_I)：

$$\phi_m : R_m \to M_m;\ \phi_m(y) = (1 : y_1 : y_2 : y_3) \qquad (21)$$

$$\phi_m{}^{-1} : M_m \to R_m;\ \phi_m{}^{-1}(x) = \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \frac{x_4}{x_1}\right) \qquad (22)$$

$$\phi_n : R_n \to N_n;\ \phi_n(w) = (1 : w_1 : w_2 : w_3) \qquad (23)$$

$$\phi_n{}^{-1} : N_n \to R_n;\ \phi_n{}^{-1}(z) = \left(\frac{z_2}{z_1}, \frac{z_3}{z_1}, \frac{z_4}{z_1}\right) \qquad (24)$$

考慮以下函數：

$$\psi : M \to N;\ \psi(x) = z,\ \text{其中} z_1 = x_1,\ z_2 = x_3,\ z_3 = x_2,\ z_4 = x_4 \qquad (25)$$

容易看到，ψ 是一一到上的函數。由此根據 (17)，可求得

$$\chi : R_m \to R_n;\ \chi(y) = w,\ \text{其中} w_1 = y_2,\ w_2 = y_1,\ w_3 = y_3 \qquad (26)$$

由於 χ 是可微的，由此可知 ψ 也是可微的。此外，為方便以下進行拉回運算，我們從上式求得

$$dw_1 = dy_2,\ dw_2 = dy_1,\ dw_3 = dy_3 \qquad (27)$$

現設有 N 上的以下微分 3 形式：

$$\alpha(z) = \begin{cases} (\phi_n{}^{-1})^*(-{w_1}^2 w_2 {w_3}^3 dw_1 \wedge dw_2 \wedge dw_3), & \text{若} z \in \phi_n((0,1]^3) \\ 0, & \text{若} z \notin \phi_n((0,1]^3) \end{cases} \qquad (28)$$

根據上式，若 $z \in \phi_n((0,1]^3)$，$\alpha(z) = (\phi_n{}^{-1})^*(-{w_1}^2 w_2 {w_3}^3 dw_1 \wedge dw_2 \wedge dw_3)$，現用 (19) 和《數學示例：前推與拉回》介紹的「代入法」計算此情況下的 $\psi^*\alpha$：

$$\begin{aligned}
\psi^*\alpha &= (\phi_m{}^{-1})^* \circ \chi^* \circ (\phi_n)^*\alpha \\
&= (\phi_m{}^{-1})^* \circ \chi^* \circ (\phi_n)^*(\phi_n{}^{-1})^*(-{w_1}^2 w_2 {w_3}^3 dw_1 \wedge dw_2 \wedge dw_3) \\
&= (\phi_m{}^{-1})^* \circ \chi^*(-{w_1}^2 w_2 {w_3}^3 dw_1 \wedge dw_2 \wedge dw_3) \\
&= (\phi_m{}^{-1})^*(-{y_2}^2 y_1 {y_3}^3 dy_2 \wedge dy_1 \wedge dy_3) \\
&= (\phi_m{}^{-1})^*(y_1 {y_2}^2 {y_3}^3 dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3)
\end{aligned}$$

另一方面，根據 (28)，若 $z \notin \phi_n((0,1]^3)$，$\alpha(z)=0$，在此情況下，必有 $\psi^*\alpha=0$。此外，容易看到 $z \in \phi_n((0,1]^3)$ 當且僅當 $x \in \phi_m((0,1]^3)$。綜合以上結果，我們有

$$\psi^*\alpha(x) = \begin{cases} ({\phi_m}^{-1})^*(y_1{y_2}^2{y_3}^3 dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3), & \text{若} x \in \phi_m((0,1]^3) \\ 0, & \text{若} x \notin \phi_m((0,1]^3) \end{cases} \tag{29}$$

由此可見，$\psi^*\alpha$ 實質上等於前面討論過的 α_I。為用 (20) 計算 $\int_N \alpha$，須先判斷 ψ 是保向還是逆向的。為此，我們把 $\psi \circ \phi_m$ 看作 M_m $(=N_n)$ 的一個坐標卡：

$$\psi \circ \phi_m : R_m \to M_m;\ \ \psi \circ \phi_m(y) = (1 : y_2 : y_1 : y_3) \tag{30}$$

接著計算以下轉換函數[6]：

$${\phi_m}^{-1} \circ (\psi \circ \phi_m)(y) = (y_2, y_1, y_3) \tag{31}$$

以及以下雅可比行列式：

$$\det(D({\phi_m}^{-1} \circ (\psi \circ \phi_m))) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

由於上述行列式的值恆為負數，根據《數學示例：流形及其定向》中有關定向的定義，坐標卡 ϕ_m 和 $\psi \circ \phi_m$ 不屬同一個定向，由此可知 ψ 是逆向的，因此我們可以應用 (20) 的第二行 (以下計算將應用前面算得的 $\int_{\mathbb{RP}^3} \alpha_I = \frac{1}{24}$，因為 $M = \mathbb{RP}^3$ 而 $\psi^*\alpha$ 實質等於 α_I)：

$$\begin{aligned} \int_N \alpha &= -\int_M \psi^*\alpha \\ &= -\frac{1}{24} \end{aligned}$$

請讀者自行驗證，如用 (2) 和 (3) 直接計算 $\int_N \alpha$，可得到相同的結果。

連結至數學專題
連結至周家發網頁

[6]請讀者自行驗證，$(\psi \circ \phi_m)^{-1} \circ \phi_m$ 也等於 (y_2, y_1, y_3)。