數學示例：積分／和分因子

我們在《數學示例：基本解集》和《數學示例：待定係數法》中介紹了求解常係數常微分／差分方程的方法，本文主旨是介紹某些變係數(variable coefficient) 微分／差分方程 (即其係數為函數的方程) 的求解方法。跟低階常係數齊次方程不同，變係數方程 (即使是低階齊次方程) 一般不能借助輔助方程來求解。本文只討論最簡單的 1 階變係數線性方程的求解方法，而這些方法要應用「積分／和分因子」。請注意由於常數可被看成常值函數，本文介紹的方法其實也適用於常係數方程。

1 階變係數線性方程具有以下一般形式：

$$k_1(x)\phi f(x) + k_0(x)f(x) + g(x) = 0 \qquad (1)$$

其中 $k_1(x)$ 和 $k_0(x)$ 代表變係數，ϕ 代表算子 D 或 E，$g(x)$ 代表給定函數。在某些特殊情況下 (即當 $\phi = D$ 而 $k_0(x) = 0$ 或者 $\phi = E$ 而 $k_1(x) = -k_0(x)$)，我們可以運用代數運算 (有時還要用 $E = \Delta + I$ 此一關係式) 把上式改寫成以下形式：

$$Df(x) = h(x) \text{ 或 } \Delta f(x) = h(x) \qquad (2)$$

接著只要進行不定積分／和分運算以及代數運算，便可解出 $f(x)$。當然，不定積分／和分運算的結果不一定都能表示成初等函數。如出現此一情況，只能把結果寫成不定積分／和分的形式。

舉例說，考慮以下差分方程：

$$2Ef(x) - 2f(x) + 4x - 6 = 0 \qquad (3)$$

運用 $E = \Delta + I$ 以及簡單的代數運算，可以把上式改寫成以下形式：

$$\Delta f(x) = -2x + 3$$

對上式左右兩端進行不定和分運算，便可求得

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum(-2x+3) \\ &= -2\left(\frac{x^2}{2}\right) + 3x + c \\ &= -x^2 + 4x + c \qquad (4) \end{aligned}$$

可是，在一般情況下，不能把 (1) 簡單改寫成 (2) 的形式，這時我們可以把 (1) 乘以某個因子 $\mu(x)$ 或 $\nu(x)$，使 (1) 具有以下兩種形式之一：

$$D(\mu(x)k_1(x)f(x)) = -\mu(x)g(x) \qquad (5)$$

$$\Delta(\nu(x)k_0(x)f(x)) = \nu(x)g(x) \qquad (6)$$

接著只要進行不定積分／和分運算和除法運算，便可解出 $f(x)$。由於上述的 $\mu(x)$ 和 $\nu(x)$ 使本來不能進行的積分／和分運算變成可能，故分別稱為「積分因子」和「和分因子」，以下分別就微分／差分方程介紹積分／和分因子。

若 (1) 是微分方程，則有關積分因子(integrating factor) 是以下函數 (在進行以下不定積分運算時，可略去任意常數)：

$$\mu(x) = \frac{1}{k_1(x)} e^{\int \frac{k_0(x)}{k_1(x)}} \qquad (7)$$

這是因為根據求導數的「積法則」和「鏈式法則」(參見《數學示例：微分／差分運算法則》中的「定理 1(i) 和 (iii)」)，我們有

$$\begin{aligned} D(\mu(x)k_1(x)f(x)) &= D\left(e^{\int \frac{k_0(x)}{k_1(x)}} f(x)\right) \\ &= e^{\int \frac{k_0(x)}{k_1(x)}} \times Df(x) + D\left(e^{\int \frac{k_0(x)}{k_1(x)}}\right) \times f(x) \\ &= e^{\int \frac{k_0(x)}{k_1(x)}} \times Df(x) + e^{\int \frac{k_0(x)}{k_1(x)}} \times \frac{k_0(x)}{k_1(x)} \times f(x) \\ &= \mu(x)k_1(x)Df(x) + \mu(x)k_0(x)f(x) \qquad (8) \end{aligned}$$

把 $\mu(x)$ 乘以 (1) (設定 $\phi = D$) 並利用上述關係，便可把 (1) 改寫成

$$\begin{aligned} \mu(x)k_1(x)Df(x) + \mu(x)k_0(x)f(x) + \mu(x)g(x) &= 0 \\ D(\mu(x)k_1(x)f(x)) &= -\mu(x)g(x) \qquad (9) \end{aligned}$$

上面最後一行具有 (5) 的形式。

舉例說，考慮以下微分方程：

$$(x^2-1)Df(x) + xf(x) - \sqrt{x^2-1} = 0, \quad |x| > 1 \qquad (10)$$

為求 $\mu(x)$，首先計算以下不定積分[1]：

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2-1} &= \frac{1}{2}\ln(x^2-1) \\ &= \ln\sqrt{x^2-1} \end{aligned}$$

[1]請注意根據《數學示例：：積分／和分運算法則》中的「表 1」，$\int \frac{x}{x^2-1}$ 本應寫成 $\frac{1}{2}\ln|x^2-1|$，但 (10) 附有 $|x| > 1$ 此一條件。在此條件下，必有 $|x^2-1| > 0$，因此這裡可以把 $\ln|x^2-1|$ 改為 $\ln(x^2-1)$。

由此根據 (7)，可求得

$$
\begin{aligned}
\mu(x) &= \frac{1}{x^2-1}e^{\int \frac{x}{x^2-1}} \\
&= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}
$$

把上述 $\mu(x)$ 乘以 (10)，利用「積法則」和「鏈式法則」，並進行不定積分運算，可求得

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x^2-1}Df(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}f(x) &= 1 \\
D\left(\sqrt{x^2-1}f(x)\right) &= 1 \\
\sqrt{x^2-1}f(x) &= x+c \\
f(x) &= \frac{x+c}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (11)
\end{aligned}
$$

若 (1) 是差分方程，則有關和分因子(summation factor) 是以下函數：

$$
\nu(x) = (-1)^x \frac{\prod_{n=1}^{x-1} k_1(n)}{\prod_{n=1}^{x} k_0(n)} = (-1)^x \frac{k_1(1)\times k_1(2)\times \ldots \times k_1(x-1)}{k_0(1)\times k_0(2)\times \ldots \times k_0(x-1)\times k_0(x)} \qquad (12)
$$

這是因為根據 Δ 的定義，我們有

$$
\begin{aligned}
\Delta(\nu(x)k_0(x)f(x)) &= \Delta\left((-1)^x \frac{\prod_{n=1}^{x-1} k_1(n)}{\prod_{n=1}^{x-1} k_0(n)} f(x)\right) \\
&= (-1)^{x+1}\frac{\prod_{n=1}^{x} k_1(n)}{\prod_{n=1}^{x} k_0(n)} f(x+1) - (-1)^x \frac{\prod_{n=1}^{x-1} k_1(n)}{\prod_{n=1}^{x-1} k_0(n)} f(x) \\
&= -\nu(x)k_1(x)Ef(x) - \nu(x)k_0(x)f(x) \qquad (13)
\end{aligned}
$$

把 $\nu(x)$ 乘以 (1) (設定 $\phi = E$) 並利用上述關係，便可把 (1) 改寫成

$$
\begin{aligned}
\nu(x)k_1(x)Ef(x) + \nu(x)k_0(x)f(x) + \nu(x)g(x) &= 0 \\
\Delta(\nu(x)k_0(x)f(x)) &= \nu(x)g(x) \qquad (14)
\end{aligned}
$$

上面最後一行具有 (6) 的形式。

舉例說，考慮以下差分方程：

$$
3Ef(x) - e^x f(x) = 0 \qquad (15)
$$

為求 $\nu(x)$，首先計算以下兩個連乘積：

$$\prod_{n=1}^{x-1} 3 = 3^{x-1}$$

$$\prod_{n=1}^{x}(-e^n) = (-1)^x \prod_{n=1}^{x} e^n$$

由此根據 (12)，可求得

$$\begin{aligned}\nu(x) &= (-1)^x \frac{3^{x-1}}{(-1)^x \prod_{n=1}^{x} e^n} \\ &= \frac{3^{x-1}}{\prod_{n=1}^{x} e^n} \qquad (16)\end{aligned}$$

把上述 $\nu(x)$ 乘以 (15)，利用 Δ 的定義，並進行不定和分運算，可求得

$$\begin{aligned}\frac{3^x}{\prod_{n=1}^{x} e^n} Ef(x) - \frac{3^{x-1}}{\prod_{n=1}^{x-1} e^n} f(x) &= 0 \\ \Delta\left(\frac{3^{x-1}}{\prod_{n=1}^{x-1} e^n} f(x)\right) &= 0 \\ \frac{3^{x-1}}{\prod_{n=1}^{x-1} e^n} f(x) &= c \\ f(x) &= \frac{ce^{\frac{x(x-1)}{2}}}{3^{x-1}}\end{aligned}$$

上面最後一行應用了 $\prod_{n=1}^{x-1} e^n = e \times e^2 \times \ldots e^{x-1} = e^{1+2+\ldots+(x-1)} = e^{\frac{x(x-1)}{2}}$。

以上方法一般只適用於 1 階齊次方程。對於 n 階變係數齊次方程，沒有一般的求解方法。不過，有一種特殊的 n 階變係數齊次方程，稱為柯西-歐拉方程(Cauchy-Euler equation)[2]，卻可透過上述方法求解，以下先從「2 階柯西-歐拉微分方程」說起，這種方程具有以下一般形式：

$$r_2 x^2 D^2 f(x) + r_1 x D f(x) + r_0 f(x) = 0, \quad x \in (0, \infty) \qquad (17)$$

其中的 r_i $(0 \leq i \leq 2)$ 是給定的實數，上述方程的特點是，每一項係數中的 x^i 與算子 D^i 有相同的冪次 i。現在把上述方程寫成包含 xD 冪次的形式，

[2]柯西-歐拉方程其實也有非齊次形式。為簡單起見，本文只討論齊次柯西-歐拉方程。要留待介紹「參數變異法」後才能討論非齊次柯西-歐拉方程。

為此，先要運用求導數的積法則進行以下計算：

$$\begin{aligned}(xD)^2 &= xD(xD)\\ &= x((Dx)D + xD(D))\\ &= xD + x^2D^2\end{aligned}$$

由此可得[3]

$$x^2D^2 = (xD)^2 - xD \qquad (18)$$

利用 (18)，可以把 (17) 改寫成以下形式：

$$Tf(x) = 0,\ \ x \in (0, \infty),\ \text{其中} T = r_2(xD)^2 + (r_1 - r_2)(xD) + r_0 I \qquad (19)$$

如把上式中的 xD 換成普通變項 t，可得到以下 2 次多項式方程，此即 (17) 的「輔助方程」：

$$r_2t^2 + (r_1 - r_2)t + r_0 = 0 \qquad (20)$$

根據「代數基本定理」，上式可因式分解為兩個 1 次多項式的乘積如下：

$$r_2(t - t_1)(t - t_2) = 0 \qquad (21)$$

由此可知 (19) 可以改寫成

$$r_2(xD - t_1I) \circ (xD - t_2I)f(x) = 0,\ \ x \in (0, \infty) \qquad (22)$$

以下首先假設 t_1 和 t_2 是相異的實數根。請注意上式雖然涉及變係數，但由於各項具有相同的形式 $xD - t_iI$ $(1 \leq i \leq 2)$，上式中的兩個 $xD - t_iI$ 可以對調位置，因此為求上式的解，只需就每個 t_i 求解以下 1 階變係數齊次微分方程：

$$xDf(x) - t_if(x) = 0 \qquad (23)$$

而這正可應用前面介紹的積分因子求解。把上式與 (1) 比較。可得 $k_1(x) = x$ 和 $k_0(x) = -t_i$。為求 $\mu(x)$，首先計算以下不定積分 (略去任意常數)：

$$\begin{aligned}\int \frac{-t_i}{x} &= -t_i \ln x\\ &= \ln\left(\frac{1}{x^{t_i}}\right)\end{aligned}$$

由於我們有 $x \in (0, \infty)$，在以上計算中，可以把 $\ln|x|$ 寫成 $\ln x$。由此根據 (7)，可求得

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \frac{1}{x}e^{\ln\left(\frac{1}{x^{t_i}}\right)}\\ &= \frac{1}{x^{t_i+1}}\end{aligned}$$

[3]由於 xD 以及下文將要介紹的 $x\Delta$ 算子涉及變係數，因此當 $n > 1$ 時，$(xD)^n \neq x^nD^n$ 以及 $(x\Delta)^n \neq x^n\Delta^n$。

把上述 $\mu(x)$ 乘以 (23)，利用「積法則」和「鏈式法則」，並進行不定積分運算，可求得

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x^{t_i}} Df(x) - \frac{t_i}{x^{t_i+1}} f(x) &= 0 \\
D\left(\frac{1}{x^{t_i}} f(x)\right) &= 0 \\
\frac{1}{x^{t_i}} f(x) &= c \\
f(x) &= cx^{t_i} \qquad (24)
\end{aligned}
$$

從以上計算結果可知，若 t_1 和 t_2 是相異的實數根，(17) 的通解為

$$f(x) = c_1 x^{t_1} + c_2 x^{t_2} \qquad (25)$$

舉例說，考慮以下微分方程 (以下方程等於《數學示例：方程與解》中的 (2))：

$$x^2 D^2 f(x) - xDf(x) - 3f(x) = 0, \;\; x \in (0, \infty) \qquad (26)$$

上述方程的輔助方程及其因式分解形式為

$$
\begin{aligned}
t^2 - 2t - 3 &= 0 \\
(t+1)(t-3) &= 0 \qquad (27)
\end{aligned}
$$

由於上式有兩個相異實數根：-1 和 3，根據 (25)，可知 (26) 的通解是

$$f(x) = c_1 x^{-1} + c_2 x^3 \qquad (28)$$

(25) 原則上也適用於 t_1 和 t_2 為互相共軛的複數根的情況，設 t_1 和 t_2 可以寫成 $a \pm bi$ 的形式，那麼根據 (25)，(17) 有以下一對解：$x^{a \pm bi}$。為去掉以上這對解所含的虛數單位 i，以下讓我們應用指數函數、對數函數和複數的知識以改寫這對解：

$$
\begin{aligned}
x^{a \pm bi} &= x^a \times x^{\pm bi} \\
&= x^a \times (e^{\ln x})^{\pm bi} \\
&= x^a \times e^{\pm ib \ln x} \\
&= x^a \cos(b \ln x) \pm i x^a \sin(b \ln x) \qquad (29)
\end{aligned}
$$

接著仿照《數學示例：基本解集》的做法，對 (29) 進行適當的線性組合，便可得到 (17) 的不含 i 的通解如下：

$$f(x) = c_1 x^a \cos(b \ln x) + c_2 x^a \sin(b \ln x) \qquad (30)$$

舉例說，考慮以下微分方程：

$$x^2D^2f(x) - xDf(x) + 5f(x) = 0,\ \ x \in (0, \infty) \qquad (31)$$

上述方程的輔助方程及其因式分解形式為

$$\begin{aligned} t^2 - 2t + 5 &= 0 \\ (t-1-2i)(t-1+2i) &= 0 \qquad (32) \end{aligned}$$

由於上式有一對互相共軛的複數根：$1 \pm 2i$，根據 (30)，可知 (31) 的通解是

$$f(x) = c_1x\cos(2\ln x) + c_2x\sin(2\ln x) \qquad (33)$$

接著介紹「2 階柯西-歐拉差分方程」，即具有以下一般形式的方程：

$$r_2(x+1)^{\underline{2}}\Delta^2f(x) + r_1x\Delta f(x) + r_0f(x) = 0,\ \ x \in \mathbb{N} \qquad (34)$$

請注意上式中的算子是 Δ 而非 E，而且 $x+1$ 帶有 2 次遞降階乘冪而非普通的 2 次冪。現在把上述方程寫成包含 $x\Delta$ 冪次的形式，為此，先要運用差分算子的積法則進行以下計算：

$$\begin{aligned} (x\Delta)^2 &= x\Delta(x\Delta) \\ &= x((\Delta x)\Delta + Ex\Delta(\Delta)) \\ &= x(\Delta + (x+1)\Delta^2) \\ &= x\Delta + (x+1)^{\underline{2}}\Delta^2 \end{aligned}$$

由此可得

$$(x+1)^{\underline{2}}\Delta^2 = (x\Delta)^2 - x\Delta \qquad (35)$$

利用 (35)，可以把 (34) 改寫成以下形式：

$$Tf(x) = 0,\ \ x \in \mathbb{N},\ \text{其中}T = r_2(x\Delta)^2 + (r_1 - r_2)(x\Delta) + r_0I \qquad (36)$$

把 (36) 與 (19) 比較，可以看到兩式非常相似，這就是為何 2 階柯西-歐拉差分方程要採取 (34) 的形式。容易看到，如把上式中的 $x\Delta$ 換成普通變項 t，同樣可得到 (20)，因此 (20) 也是 (34) 的「輔助方程」，而 (36) 同樣可以改寫成

$$r_2(x\Delta - t_1I) \circ (x\Delta - t_2I)f(x) = 0,\ \ x \in \mathbb{N} \qquad (37)$$

假設 t_1 和 t_2 是相異的實數根，根據前面的討論，為求上式的解，只需就每個 t_i 求解以下 1 階變係數齊次差分方程：

$$x\Delta f(x) - t_if(x) = 0 \qquad (38)$$

而這正可應用前面介紹的和分因子求解。為此，須先應用 $\Delta = E - I$ 此一關係把上式改寫成

$$xEf(x) - (x+t_i)f(x) = 0 \qquad (39)$$

把上式與 (1) 比較。可得 $k_1(x) = x$ 和 $k_0(x) = -(x+t_i)$。為求 $\nu(x)$，首先計算以下連乘積：

$$\prod_{n=1}^{x-1} n = (x-1)!$$

$$\prod_{n=1}^{x} -(n+t_i) = (-1)^x (x+t_i)^{\underline{x}}$$

由此根據 (12)，可求得

$$\nu(x) = \frac{(x-1)!}{(x+t_i)^{\underline{x}}}$$

把上述 $\nu(x)$ 乘以 (39)，利用算子 E 的定義，並進行不定和分運算，可求得

$$\begin{aligned}
\frac{x!}{(x+t_i)^{\underline{x}}}Ef(x) - \frac{(x-1)!}{(x+t_i-1)^{\underline{x-1}}}f(x) &= 0 \\
\Delta\left(\frac{(x-1)!}{(x+t_i-1)^{\underline{x-1}}}f(x)\right) &= 0 \\
\frac{(x-1)!}{(x+t_i-1)^{\underline{x-1}}}f(x) &= c' \\
f(x) &= c'\frac{(x+t_i-1)^{\underline{x-1}}}{(x-1)!}
\end{aligned}$$

為簡化結果，可以先應用《數學示例：微分／差分運算法則》中的公式 $x^{\underline{a}} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-a+1)}$ 和 $\Gamma(n+1) = n!$ (即上述網頁的公式 (9) 和 (8)，但把其中的 h 設定為 1) 把上述結果改寫成包含「伽瑪函數」的形式，然後乘以常數 $\Gamma(t_i+1)$，並把 $\frac{c'}{\Gamma(t_i+1)}$ 換成另一個任意常數 c，從而得到

$$\begin{aligned}
f(x) &= c'\frac{\Gamma(x+t_i)}{\Gamma(t_i+1)\Gamma(x)} \\
&= c\frac{\Gamma(x+t_i)}{\Gamma(x)} \text{ 或 } c(x+t_i-1)^{\underline{t_i}} \qquad (40)
\end{aligned}$$

從以上計算結果可知，若 t_1 和 t_2 是相異的實數根，(34) 的通解為

$$f(x) = c_1\frac{\Gamma(x+t_1)}{\Gamma(x)} + c_2\frac{\Gamma(x+t_2)}{\Gamma(x)} \qquad (41)$$

如果有任一個 t_i 是整數，為方便起見，也可以根據 (40) 把上式中的 $\frac{\Gamma(x+t_i)}{\Gamma(x)}$ 改寫成 $(x+t_i-1)^{\underline{t_i}}$。

舉例說，考慮以下差分方程：

$$(x+1)^{\underline{2}}\Delta^2 f(x) - x\Delta f(x) - 3f(x) = 0,\ \ x \in \mathbb{N} \qquad (42)$$

由於上述方程與 (26) 有相同的係數，它與 (26) 有相同的輔助方程和實數根，即 -1 和 3，由於這兩個解都是整數，根據 (41) 和 (40)，可知 (42) 的通解是

$$\begin{aligned} f(x) &= c_1(x-2)^{\underline{-1}} + c_2(x+2)^{\underline{3}} \\ &= \frac{c_1}{x-1} + c_2 x(x+1)(x+2) \qquad (43) \end{aligned}$$

若 t_1 和 t_2 是互相共軛的複數根 (以下把 t_2 記作 $\overline{t_1}$，其中 $\bar{}$ 代表求共軛複數的運算)，便只能把 (34) 的通解寫成 (41) 的形式。不過，可以證明 $\Gamma(\overline{z}) = \overline{\Gamma(z)}$，而且 $\overline{x+t_1} = x + \overline{t_1}$ (因為 x 是自然數)。綜合以上兩點，我們有 $\Gamma(x+\overline{t_1}) = \overline{\Gamma(x+t_1)}$，因此在此情況下，(34) 的通解可以寫成以下形式：

$$f(x) = c_1\frac{\Gamma(x+t_1)}{\Gamma(x)} + c_2\frac{\overline{\Gamma(x+t_1)}}{\Gamma(x)} \qquad (44)$$

舉例說，考慮以下差分方程：

$$(x+1)^{\underline{2}}\Delta^2 f(x) - x\Delta f(x) + 5f(x) = 0,\ \ x \in \mathbb{N} \qquad (45)$$

由於上述方程與 (31) 有相同的係數，它與 (31) 有相同的輔助方程和共軛複數根，即 $1 \pm 2i$，根據 (44)，可知 (45) 的通解是

$$f(x) = c_1\frac{\Gamma(x+1+2i)}{\Gamma(x)} + c_2\frac{\overline{\Gamma(x+1+2i)}}{\Gamma(x)} \qquad (46)$$

若柯西-歐拉微分／差分方程的輔助方程有二重實數根 (即當 $t_1 = t_2$)，情況便較為複雜，要留待介紹「降階法」後才能討論這種情況。

原則上可以把以上概念加以推廣，從而得到更高階的柯西-歐拉方程，但會涉及越來越複雜的運算，以下僅討論 3 階的情況。「3 階柯西-歐拉微分方程」具有以下一般形式：

$$r_3x^3D^3f(x) + r_2x^2D^2f(x) + r_1xDf(x) + r_0f(x) = 0,\ \ x \in (0,\infty) \qquad (47)$$

請讀者自行驗證，仿照前面的做法，可以求得

$$x^3D^3 = (xD)^3 - 3x^2D^2 - xD \qquad (48)$$

利用 (48) 和 (18)，可以把 (47) 改寫成以下形式：

$$Tf(x)=0,\ \ x\in(0,\infty),\ \text{其中}T=r_3(xD)^3+(r_2-3r_3)(xD)^2+(r_1-r_2+2r_3)(xD)+r_0I \qquad (49)$$

類似地，「3 階柯西-歐拉差分方程」具有以下一般形式：

$$r_3(x+2)^{\underline{3}}\Delta^3 f(x)+r_2(x+1)^{\underline{2}}\Delta^2 f(x)+r_1x\Delta f(x)+r_0f(x)=0,\ \ x\in\mathbb{N} \qquad (50)$$

請讀者自行驗證，仿照前面的做法，可以求得

$$(x+2)^{\underline{3}}\Delta^3=(x\Delta)^3-3(x+1)^{\underline{2}}\Delta^2-x\Delta \qquad (51)$$

利用 (51) 和 (35)，可以把 (50) 改寫成以下形式：

$$Tf(x)=0,\ \ x\in\mathbb{N},\ \text{其中}T=r_3(x\Delta)^3+(r_2-3r_3)(x\Delta)^2+(r_1-r_2+2r_3)(x\Delta)+r_0I \qquad (52)$$

請注意 (49) 與 (52) 有相同的係數，由此可得它們的共同輔助方程如下：

$$r_3t^3+(r_2-3r_3)t^2+(r_1-r_2+2r_3)t+r_0=0 \qquad (53)$$

求解上述多項式方程後，便可根據其根的形式確定 (47) 或 (50) 的解。舉例說，考慮以下微分方程和差分方程：

$$x^3D^3f(x)+5x^2D^2f(x)+7xDf(x)+8f(x)=0,\ \ x\in(0,\infty) \qquad (54)$$

$$(x+2)^{\underline{3}}\Delta^3f(x)+5(x+1)^{\underline{2}}\Delta^2f(x)+7x\Delta f(x)+8f(x)=0,\ \ x\in\mathbb{N} \qquad (55)$$

以上兩個方程有相同的係數，它們的共同輔助方程及其因式分解形式為

$$\begin{aligned} t^3+2t^2+4t+8 &= 0 \\ (t+2)(t-2i)(t+2i) &= 0 \qquad (56) \end{aligned}$$

由於上述輔助方程有一個實數根 -2 和一對互相共軛的複數根 $\pm 2i$，可知 (54) 和 (55) 的通解分別是

$$f(x)=c_1x^{-2}+c_2\cos(2\ln x)+c_3\sin(2\ln x) \qquad (57)$$

$$f(x)=c_1(x-3)^{\underline{-2}}+c_2\frac{\Gamma(x+2i)}{\Gamma(x)}+c_3\frac{\overline{\Gamma(x+2i)}}{\Gamma(x)} \qquad (58)$$

連結至數學專題
連結至周家發網頁