數學示例：霍奇星與音樂同構

微分形式的一個重要應用是把向量分析中某些概念和結果統一起來。為此，我們須先引入兩個與微分形式有關的運算－「霍奇星算子」和「音樂同構」。本文主旨是介紹這兩種運算，然後將之應用到向量分析中的三個「微分算子」(differential operator) －「梯度」、「旋度」和「散度」。

由於「霍奇星算子」的定義須用到向量代數中的「點積」運算，我們先重溫此一運算的定義。給定 $\mathbb{R}^n$ 中兩個寫成線性組合形式的向量 $v = \Sigma_{i=1}^{n} v_i e_i$ 和 $w = \Sigma_{i=1}^{n} w_i e_i$，其中 $(e_1, \ldots, e_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 這個向量空間的有序基底，而 $v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}$，它們的點積是一個實數，其計算公式如下：

$$v \cdot w = v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n \qquad (1)$$

上述運算可以推廣至 k 向量空間和 k 餘向量空間。為免討論過於冗長，以下集中討論 k 餘向量空間 $\bigwedge^k T_p^* M$，其中 M 為 m 維流形，p 為其上一點 (儘管以下內容也適用於一般 k 向量空間和 k 餘向量空間)。我們在《數學示例：k 向量和 k 餘向量》中指出，$\bigwedge^k T_p^* M$ 也是一種向量空間，因此其成員也可互相進行點積運算，其計算公式與 (1) 完全相同 (只需把 (1) 中的 v 和 w 重新理解為 k 餘向量)。

舉例說，考慮 $\bigwedge^2 T_p^* \mathbb{R}^3$，以下是這個空間的有序基底：

$$(dx_1 \wedge dx_2, dx_1 \wedge dx_3, dx_2 \wedge dx_3) \qquad (2)$$

現設有 $\bigwedge^2 T_p^* \mathbb{R}^3$ 中的兩個成員：

$$\alpha_I = dx_1 \wedge dx_3 \qquad (3)$$

$$\alpha_{II} = 2dx_1 \wedge dx_2 - 17dx_1 \wedge dx_3 + 9dx_2 \wedge dx_3 \qquad (4)$$

對上述兩個 2 餘向量進行點積運算時，須先把 α_I 理解為以下線性組合：

$$\alpha_I = 0dx_1 \wedge dx_2 + 1dx_1 \wedge dx_3 + 0dx_2 \wedge dx_3$$

接著便可用 (1) 進行點積運算：

$$\begin{aligned}\alpha_I \cdot \alpha_{II} &= (0)(2) + (1)(-17) + (0)(9) \\ &= -17\end{aligned}$$

交代了點積的基本概念後，便可介紹霍奇星算子(Hodge star operator)。設 M 為 m 維流形，α 為 $\bigwedge^k T_p^* M$ 中的 k 餘向量 (其中 $k \leq m$)，霍奇星算子 (以下記作 $\star$) 的作用是把 α 映射為 $\bigwedge^{m-k} T_p^* M$ 中的 $m-k$ 餘向量 $\star\alpha$，而 $\star\alpha$ 是這樣的 $m-k$ 餘向量：把 $\bigwedge^k T_p^* M$ 中的任意 k 餘向量 β 與 $\star\alpha$ 進行楔積運算，均有以下結果：

$$\beta \wedge \star\alpha = (\beta \cdot \alpha) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m \qquad (5)$$

上式是合理的，因為等號左端的數式是一個 k 餘向量 β 與一個 $m-k$ 餘向量 $\star\alpha$ 的楔積，其結果是一個 m 餘向量；而等號右端是一個實數 (即 β 與 α 的點積) 與 $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$ 的乘積，其結果也是一個 m 餘向量。

接下來讓我們以 $\star\alpha_I$ 的計算為例說明如何運用 (5)。由於 (5) 對任何 β 都成立，我們可以把 α_I 代入 (5) 中的 β (以及 α)，從而得到下式：

$$\alpha_I \wedge \star\alpha_I = (\alpha_I \cdot \alpha_I) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

這樣做的好處是使上式等號右端出現一個容易計算的點積 $\alpha_I \cdot \alpha_I = 1$，從上式可得

$$(dx_1 \wedge dx_3) \wedge \star\alpha_I = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

由此容易看到

$$\star\alpha_I = -dx_2 \qquad (6)$$

讀者可自行驗證，運用上述方法，可求得在 $\mathbb{R}^3$ 上有以下結果：

$$\begin{array}{lll} \star 1 = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 & & \\ \star dx_1 = dx_2 \wedge dx_3 & \star dx_2 = -dx_1 \wedge dx_3 & \star dx_3 = dx_1 \wedge dx_2 \\ \star(dx_1 \wedge dx_2) = dx_3 & \star(dx_1 \wedge dx_3) = -dx_2 & \star(dx_2 \wedge dx_3) = dx_1 \\ \star(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) = 1 & & \end{array} \qquad (7)$$

可以證明霍奇星算子具有線性性質，即若 $\alpha, \beta \in \bigwedge^k T_p^* M$ 並且 $c \in \mathbb{R}$，則有

$$\star(\alpha + \beta) = \star\alpha + \star\beta \qquad (8)$$

$$\star(c\alpha) = c(\star\alpha) \qquad (9)$$

利用上述線性性質，便可求得霍奇星算子對較複雜 k 餘向量作用的結果，以下讓我們用 (7) 和上述線性性質求 $\star\alpha_{II}$ 如下：

$$\begin{aligned}
&\star\alpha_{II}\\
=\ & 2\times\star(dx_1\wedge dx_2)-17\times\star(dx_1\wedge dx_3)+9\times\star(dx_2\wedge dx_3)\\
=\ & 2\times dx_3-17\times(-dx_2)+9\times dx_1\\
=\ & 9dx_1+17dx_2+2dx_3
\end{aligned}$$

接著介紹霍奇星的逆運算 $\star^{-1}$，這個算子具有以下特點：對任何 $\alpha\in\bigwedge^k T_p^*M$，均有

$$\star(\star^{-1}\alpha)=\star^{-1}(\star\alpha)=\alpha \qquad (10)$$

可以證明若 m 維流形 M 是 $\mathbb{R}^m$ 的子集，並且 $\alpha\in\bigwedge^k T_p^*M$，那麼

$$\star^{-1}=\begin{cases}\star, & \text{若 } m \text{ 是奇數}\\ (-1)^k\star, & \text{若 } m \text{ 是偶數}\end{cases} \qquad (11)$$

根據上式，由於 3 是奇數，所有 $\alpha\in\bigwedge^k T_p^*\mathbb{R}^3$ $(0\le k\le 3)$ 都有 $\star^{-1}=\star$。為驗證這一點，我們計算

$$\begin{aligned}
\star(\star^{-1}dx_1) &= \star(\star dx_1)\\
&= \star(dx_2\wedge dx_3)\\
&= dx_1\\
\star^{-1}(\star dx_1) &= \star^{-1}(dx_2\wedge dx_3)\\
&= \star(dx_2\wedge dx_3)\\
&= dx_1
\end{aligned}$$

讀者可用 (7) 中的結果驗證其他 $\alpha\in\bigwedge^k T_p^*\mathbb{R}^3$ $(0\le k\le 3)$ 均滿足 (10)[1]。

接著介紹音樂同構(musical isomorphism)，這是指把流形 M 於 p 點處的切向量與餘切向量互相轉換的兩個算子。由於這兩個算子借用音樂中的降號(flat) $\flat$ 和升號(sharp) $\sharp$ 作為符號，故稱「音樂同構」。簡言之，「降號」用來把切向量的基底轉化成餘切向量的相應基底 (即把 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 轉化成 dx_i)，其分量保持不變；「升號」則用來把餘切向量的基底轉化成切向量的相應基底 (即把 dx_i 轉化成 $\frac{\partial}{\partial x^i}$)，其分量保持不變[2]。具體地說，設有 T_pM 中的切向量

[1]讀者如欲驗證 (11) 的第二行，可自行計算在 $\mathbb{R}^2$ 上，$\star dx_1=dx_2$ 和 $\star dx_2=-dx_1$，並由此根據 (11) 的第二行，得 $\star^{-1}dx_1=-dx_2$ 和 $\star^{-1}dx_2=dx_1$。接著便可計算 $\star(\star^{-1}dx_1)=\star^{-1}(\star dx_1)=dx_1$ 以及 $\star(\star^{-1}dx_2)=\star^{-1}(\star dx_2)=dx_2$。

[2]這裡「降」和「升」這兩個名稱是來自張量分析的一種特殊表示法，由於本文並不使用此一表示法，這裡無法解釋其理據，讀者只能死記降號和升號的作用。另請注意，跟前面介紹的 $\star$ 算子可以作用於任意 k 餘切向量 (其中 $0\le k\le m$) 不同，這裡介紹的 $\flat$ 和 $\sharp$ 算子只能作用於 1 切向量和 1 餘切向量。

$v = v_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + v_m\frac{\partial}{\partial x_m}$ 和 T_p^*M 中的餘切向量 $\alpha = \alpha_1 dx_1 + \ldots + \alpha_m dx_m$，那麼

$$\flat v = v_1 dx_1 + \ldots + v_m dx_m \qquad (12)$$

$$\sharp\alpha = \alpha_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \alpha_m\frac{\partial}{\partial x_m} \qquad (13)$$

容易看到上述降號與升號算子互為對方的逆運算。舉例說，設有 $T_p\mathbb{R}^3$ 中的以下切向量：

$$v_{III} = 3\frac{\partial}{\partial x_1} - 9\frac{\partial}{\partial x_2} + 8\frac{\partial}{\partial x_3} \qquad (14)$$

以及 $T_p^*\mathbb{R}^3$ 中的以下餘切向量：

$$\alpha_{III} = 3dx_1 - 9dx_2 + 8dx_3 \qquad (15)$$

根據 (12)，$\flat v_{III} = \alpha_{III}$。根據 (13)，$\sharp\alpha_{III} = v_{III}$。綜合以上結果，我們有 $\sharp(\flat v_{III}) = v_{III}$ 和 $\flat(\sharp\alpha_{III}) = \alpha_{III}$，由此驗證了 $\flat$ 與 $\sharp$ 互為對方的逆運算。

以上介紹的三種算子也可應用於向量場和微分 k 形式，而且前面有關上述算子的性質也可推廣至向量場和微分 k 形式 (但要作適當調整，例如把 (9) 中的實數 c 改為實值函數)，這是因為向量場和微分 k 形式是一種函數，而我們可以借助函數的作用來定義上述算子。舉例說，考慮 $\mathbb{R}^3$ 上的以下向量場和微分 1 形式：

$$v_{IV}(x_1, x_2, x_3) = 3x_1\frac{\partial}{\partial x_1} - {x_3}^2\frac{\partial}{\partial x_2} + {x_2}^3\frac{\partial}{\partial x_3} \qquad (16)$$

$$\alpha_{IV}(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 dx_1 - {x_3}^2 dx_2 + {x_2}^3 dx_3 \qquad (17)$$

利用 (7) 和 $\star$ 算子的線性性質，可以計算 $\star\alpha_{IV}$ 如下：

$$\begin{aligned}
& \star\alpha_{IV} \\
= \; & 3x_1 \times \star dx_1 - {x_3}^2 \times \star dx_2 + {x_2}^3 \times \star dx_3 \\
= \; & 3x_1 \times (dx_2 \wedge dx_3) - {x_3}^2 \times (-dx_1 \wedge dx_3) + {x_2}^3 \times (dx_1 \wedge dx_2) \\
= \; & {x_2}^3 dx_1 \wedge dx_2 + {x_3}^2 dx_1 \wedge dx_3 + 3x_1 dx_2 \wedge dx_3
\end{aligned}$$

利用 (12) 和 (13)，可以求得 $\flat v_{IV} = \alpha_{IV}$ 和 $\sharp\alpha_{IV} = v_{IV}$。

接下來介紹向量分析中的三個「微分算子」，由於本文主旨並非介紹向量分析，以下只對這些微分算子的計算公式和作用略作介紹。第一個微分算子稱為梯度(gradient)，一般記作 grad，也可記作 ∇ (讀作“nabla”或“del”)，

這個算子以 $\mathbb{R}^3$ 上的實值函數 (又稱「純量場」scalar field) 作為論元，並輸出 $\Gamma(T\mathbb{R}^3)$ 中的一個向量場。在笛卡爾坐標下，這個算子的計算公式如下[3]：

$$\nabla = \mathrm{grad} = \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k \qquad (18)$$

把上述算子作用於 $\mathbb{R}^3$ 上實值函數 f，所得結果 ∇f 是一個向量場，其於 p 點處的值 $\nabla f(p)$ 是一個向量。利用這個向量和下式，可以求得以下斜率：

$$f \text{ 於 } p \text{ 點處沿著向量 } v \text{ 方向的斜率} = \frac{\nabla f(p) \cdot v}{\|v\|} \qquad (19)$$

可以證明如 $\nabla f(p) \neq 0$，那麼 $\nabla f(p)$ 的方向是 f 於 p 點處能達到最大斜率的方向，而 $\|\nabla f(p)\|$ 則是 f 於 p 點處的最大斜率。

舉例說，設有 $\mathbb{R}^3$ 上實值函數：

$$f_I(x, y, z) = 3x + 2y^2 + z^3 \qquad (20)$$

根據 (18)，可求得

$$\begin{aligned} \nabla f_I &= \frac{\partial f_I}{\partial x}i + \frac{\partial f_I}{\partial y}j + \frac{\partial f_I}{\partial z}k \\ &= 3i + 4yj + 3z^2k \end{aligned}$$

把 $(2, 1, 0)$ 代入上式中的 (x, y, z)，可得

$$\nabla f_I(2, 1, 0) = 3i + 4j$$

根據前面的討論，可知 f_I 於點 $(2, 1, 0)$ 處沿著 $3i + 4j$ 方向可達到最大斜率，而此一最大斜率是 $\|\nabla f_I(2, 1, 0)\| = 5$。為驗證這一點，讀者可自行運用 (19) 求 f_I 於點 $(2, 1, 0)$ 處沿著 $3i + 4j$ 方向的斜率：

$$\frac{(3i + 4j) \cdot (3i + 4j)}{\|3i + 4j\|} = 5$$

接著可再運用 (19) 求 f_I 於點 $(2, 1, 0)$ 處沿著另一方向 (例如 $i + j + k$) 的斜率：

$$\frac{(3i + 4j) \cdot (i + j + k)}{\|i + j + k\|} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

由於 $\frac{7}{\sqrt{3}} < 5$，上述結論乃得驗證。

[3]以下沿襲有關 $\mathbb{R}^3$ 的向量分析的習慣，用 x、y 和 z 作為 $\mathbb{R}^3$ 笛卡爾坐標的符號，並以 (i, j, k) 作為笛卡爾坐標下 $T_p\mathbb{R}^3$ 的有序基底。

第二個微分算子稱為旋度(curl)，一般記作 curl，這個算子以 $\Gamma(T\mathbb{R}^3)$ 中的向量場作為論元，並輸出 $\Gamma(T\mathbb{R}^3)$ 中的另一個向量場。利用前面介紹的 ∇ 算子，可以把 curl 定義如下：

$$\mathrm{curl} = \nabla \times \qquad (21)$$

在上式中，$\times$ 代表向量的「叉積」。上式的意思是，給定向量場 $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$，curl $v = \nabla \times v$。利用 (18) 以及叉積的行列式表示法，可以寫出在笛卡爾坐標下 curl v 的計算公式如下：

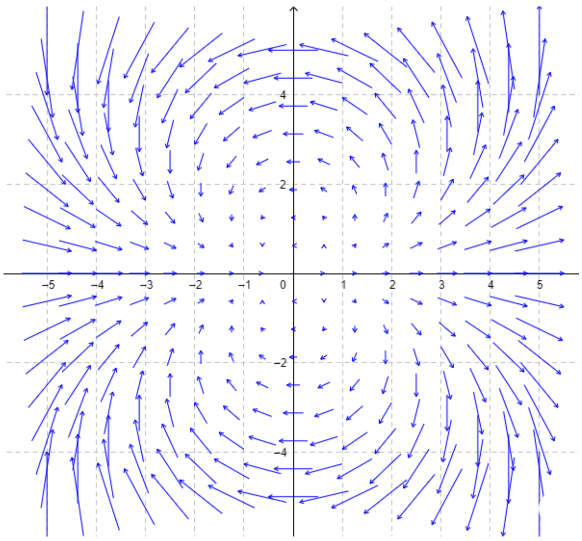
$$\begin{aligned} \mathrm{curl}\ v &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) k \qquad (22) \end{aligned}$$

上式顯示 curl v 是一個向量場，把這個向量場作用於點 p，可得到向量 curl $v(p)$。粗略地說，這個向量的模反映向量場 v 所代表流體於 p 點處旋轉的量，而這個向量的方向則垂直於 v 於 p 點處呈現最大旋轉的平面。

舉例說，設有以下向量場：

$$v_V(x, y, z) = (x^2 - y^2)i + 2xyj \qquad (23)$$

以下是上述向量場的圖象 (由於上式的 k 分量等於 0，以下只需繪出 x-y 平面上的圖象)：



運用 (22)，可求得

$$\mathrm{curl}\ v_V = 4yk$$

根據上式，在 x 軸 (即橫軸) 上的點 (具有形式 $(x,0,0)$)，curl $v_V(x,0,0)=0$，由此可知 v_V 在這些點處不旋轉。此外，上式也顯示在 x 軸以上和以下的點，curl $v_V(p)$ 的值分別為正數和負數，由此可見，x 軸以上和以下的點朝不同方向 (逆／順時針) 旋轉。

第三個微分算子稱為散度(divergence)，一般記作 div，這個算子以 $\Gamma(T\mathbb{R}^3)$ 中的向量場作為論元，並輸出 $\mathbb{R}^3$ 上的一個實值函數 (即純量場)。利用前面介紹的 ∇ 算子，可以把 div 定義如下：

$$\mathrm{div} = \nabla\cdot \tag{24}$$

在上式中，$\cdot$ 代表前面介紹的「點積」。上式的意思是，給定向量場 $v = v_1i + v_2j + v_3k$，div $v = \nabla\cdot v$。利用 (18) 和 (1)，可以寫出在笛卡爾坐標下 div v 的計算公式如下：

$$\mathrm{div}\ v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \tag{25}$$

上式顯示 div v 是 $\mathbb{R}^3$ 上的實值函數，把這個函數作用於點 p，可得到實數 div $v(p)$。粗略地說，div $v(p)$ 的值反映向量場 v 所代表流體「淨流出」(即流出減去流入) p 點的量。以前面討論過的向量場 v_V 為例，運用 (25)，可以求得

$$\mathrm{div}\ v_V = 4x$$

根據上式，在 y 軸 (即縱軸) 上的點 (具有形式 $(0,y,0)$)，div $v_V(0,y,0)=0$，由此可知 v_V 流入和流出這些點的量一樣多 (因此其「淨流出」等於 0)。此外，上式也顯示在 y 軸右方和左方的點，div $v_V(p)$ 的值分別為正數和負數，由此可見，對 y 軸右方的點而言，v_V 流出這些點的量較流入為多；對 y 軸左方的點而言，v_V 流入這些點的量則較流出為多。

以上介紹了向量分析的三個微分算子，接下來讓我們用與微分形式相關的符號來表示這三個算子。以下將圍繞下圖展開討論：

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "\mathrm{grad}"] \arrow[d, "I"'] & \Gamma(T\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\mathrm{curl}"] \arrow[d, "\flat"'] & \Gamma(T\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, "\star\circ\flat"'] & \mathbb{R}^{\mathbb{R}^3} \arrow[d, "\star"'] \\
\Gamma(\bigwedge^0 T^*\mathbb{R}^3) \arrow[r, "d"] & \Gamma(\bigwedge^1 T^*\mathbb{R}^3) \arrow[r, "d"] & \Gamma(\bigwedge^2 T^*\mathbb{R}^3) \arrow[r, "d"] & \Gamma(\bigwedge^3 T^*\mathbb{R}^3)
\end{tikzcd}$$

上圖包含八個節點和十個箭頭。每個節點都代表由某種以 $\mathbb{R}^3$ 作為定義域的函數或場組成的集合，其中 $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^3}$ 是實值函數組成的集合，$\Gamma(T\mathbb{R}^3)$ 是向量場組成的集合，而 $\Gamma(\bigwedge^k T^*\mathbb{R}^3)$ (其中 $0\le k\le 3$) 則是微分 k 形式 (即 k 餘向量場) 組成的集合。

上圖中的箭頭代表上述集合之間的函數關係。上三個向右箭頭代表本文介紹的三個微分算子，上圖顯示 grad 把實值函數映射為向量場，curl 把向量場映射為向量場，div 則把向量場映射為實值函數，這些都與前面介紹的情況相符。下三個向右箭頭上的 d 代表「外導數」運算，上圖顯示 d 把微分 k 形式映射為微分 $k+1$ 形式，這一點與我們在《數學示例：外導數》介紹的情況相符。

上圖中最左一個向下箭頭旁的 I 代表「恆等映射」，這是合理的，因為根據《數學示例：k 向量與 k 餘向量》，實值函數相等於微分 0 形式，因此 $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^3}$ 與 $\Gamma(\bigwedge^0 T^*\mathbb{R}^3)$ 是同一個集合。其餘三個向下箭頭也是合理的，因為根據前面的討論，$\flat$ 把向量場映射為微分 1-形式；$\star \circ \flat$ 先把向量場映射為微分 1 形式，然後再把微分 1 形式映射為微分 2 形式；$\star$ 則把微分 0 形式 (即實值函數) 映射為微分 3 形式。

上圖的重要性在於它是一個「交換圖表」(commutative diagram)，這即是說如從圖中某一節點經兩條不同路徑到達同一個節點，則該兩條路徑所代表的函數應被視為相同的函數。舉例說，從上圖左上角的 $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^3}$ 到達左起第一個 $\Gamma(T\mathbb{R}^3)$ 有兩條路徑：第一條僅需沿著向右箭頭 grad 前進一步，這代表函數 grad；第二條先經向下箭頭 I，接著經向右箭頭 d，然後再經與 $\flat$ 逆向的向上箭頭 (即 $\flat^{-1}$)，這代表複合函數 $\flat^{-1} \circ d \circ I$。由 $\flat^{-1} = \sharp$ 以及 $d \circ I = d$，可得以下等式：

$$\mathrm{grad} = \sharp \circ d \qquad (26)$$

上式就是用與微分形式相關的符號表示 grad 的式子。利用相同方法，還可得到以下兩式 (以下要用到下列事實：$\sharp^{-1} = \flat$；在 $\mathbb{R}^3$ 上，$\star^{-1} = \star$ 以及對任何函數 f, g，$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$)：

$$\mathrm{curl} = \sharp \circ \star \circ d \circ \flat \qquad (27)$$

$$\mathrm{div} = \star \circ d \circ \star \circ \flat \qquad (28)$$

接著讓我們驗證上述三個等式。首先驗證 (26)，設有實值函數 f。對 f 進行外導數運算，可得

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

接著把 $\sharp$ 作用於上式，可得[4]

$$(\sharp \circ d)f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k$$

[4]由於 (i, j, k) 是 $T_p\mathbb{R}^3$ 中的有序基底，它們的作用相當於一般 3 維切空間的有序基底 $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$，所以這裡可以用 i、j、k 代替前面 (13) 中的 $\frac{\partial}{\partial x_1}$、$\frac{\partial}{\partial x_2}$、$\frac{\partial}{\partial x_3}$。

但上式等於把 (18) 作用於 f 的結果，由此可得 $(\sharp \circ d)f = \text{grad } f$，(26) 乃得驗證。

其次驗證 (27)，設有向量場 $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$。把 $\flat$ 作用於 v，可得

$$\flat v = v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz$$

對上式進行外導數運算，可得

$$(d \circ \flat)(v) = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial z}\right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) dy \wedge dz$$

先後用 $\star$ 和 $\sharp$ 作用於上式，可得

$$(\sharp \circ \star \circ d \circ \flat)(v) = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) k$$

但上式等於 (21) 等號右端的式子，由此可得 $(\sharp \circ \star \circ d \circ \flat)(v) = \text{curl } v$，(27) 乃得驗證。

最後驗證 (28)，設有向量場 $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$。把 $\flat$ 和 $\star$ 先後作用於 v，可得

$$(\star \circ \flat)(v) = v_1 dy \wedge dz - v_2 dx \wedge dz + v_3 dx \wedge dy$$

對上式進行外導數運算，可得

$$(d \circ \star \circ \flat)(v) = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$$

用 $\star$ 作用於上式，可得

$$(\star \circ d \circ \star \circ \flat)(v) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

上式等於 (25) 等號右端的式子，由此可得 $(\star \circ d \circ \star \circ \flat)(v) = \text{div } v$，(28) 乃得驗證。

在上述三個等式中，d 都起著關鍵作用，$\star$、$\flat$ 和 $\sharp$ 只是用來把基底切向量和基底餘切向量轉換成適當的形式。以 curl 和 (27) 為例，給定一個向量場，我們無法直接對其進行外導數運算，因此須先用 $\flat$ 把它轉換成微分 1 形式，然後才能對這個微分 1 形式進行外導數運算，得到一個微分 2 形式。接著我們又無法直接把微分 2 形式轉換成向量場，所以須用 $\star$ 把它轉換成微分 1 形式，最後才用 $\sharp$ 把這個微分 1 形式轉換成向量場。總括而言，grad、curl 和 div 雖然在向量分析中被看成把純量場／向量場映射為純量

場／向量場的微分算子，但在流形分析中可被統一處理成 d 的變體。

由於 d 不僅適用於 3 維空間, 由此我們提出一個問題, 是否可以利用 (26) － (28) 把上述三個微分算子推廣到其他維的空間，特別是 curl (因為在向量分析中，curl 只能作用於 3 維空間上的向量場) ? 例如能否定義作用於 4 維空間向量場的 curl ? 由於 (26) － (28) 不僅涉及 d，還涉及 $\star$、$\flat$ 和 $\sharp$ 這三個算子，如要進行上述推廣，便要把 $\flat$ 和 $\sharp$ 的作用範圍加以推廣，此外還要考慮推廣後的概念的物理意義。由於這涉及新的內容, 我們的討論只能到此為止。

連結至數學專題
連結至周家發網頁