數學示例：希爾伯特伴隨

我們在《數學示例：完備空間》中介紹了希爾伯特空間 (即完備的內積空間) 的概念，這種空間有豐富的結構 (具有向量空間的結構，可在其上定義內積、範數和距離函數)，而且具有完備性此一良好性質，因此希爾伯特空間的理論有一些獨特的課題，其中一個課題就是本文要介紹的希爾伯特伴隨(Hilbert adjoint)[1]。

設 $(H_1, \langle\ \rangle_1)$ 和 $(H_2, \langle\ \rangle_2)$ 為希爾伯特空間，$T \in B(H_1, H_2)$，即把 H_1 映射到 H_2 內的有界線性算子，則 T 的希爾伯特伴隨，以下記作 T^*，是把 H_2 映射到 H_1 內的有界線性算子，使得對任何 $x \in H_1$ 和 $y \in H_2$，均有

$$\langle Tx, y\rangle_2 = \langle x, T^*y\rangle_1 \qquad (1)$$

以下定理保證上述概念的存在性和唯一性。

定理 1：設 T 是把 $(H_1, \langle\ \rangle_1)$ 映射到 $(H_2, \langle\ \rangle_2)$ 內的有界線性算子，則唯一存在滿足 (1) 的有界線性算子 T^*。

以下提供一些希爾伯特伴隨的例子，我們在《數學示例：完備空間》中指出 $\mathbb{C}^n$、l^2 和 $L^2[a, b]$ 是希爾伯特空間。首先考慮 $\mathbb{C}^n$，這個空間的內積函數如下 (下式就是《數學示例：內積空間》中的公式 (4)，為免數式過於繁複，以下不再為內積函數加下標)：

$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\rangle = x_1\overline{y_1} + \ldots + x_n\overline{y_n} \qquad (2)$$

根據線性代數的知識，當取定 $\mathbb{C}^n$ 和 $\mathbb{C}^m$ 上的某個基底後，則 $B(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ 的任何成員 (即把 $\mathbb{C}^n$ 映射到 $\mathbb{C}^m$ 內的有界線性算子) 都可以唯一地表示成一個 $m \times n$ 矩陣，這即是說 $B(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ 的每個成員都對應著某個 $m \times n$ 矩陣。因此 $B(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ 的成員 T 與其希爾伯特伴隨 T^* 之間的關係可以用 T 的矩陣 (以下記作 $[T]$) 與 T^* 的矩陣 (以下記作 $[T^*]$) 之間的關係來表示。可以證明，$[T^*]$ 等於 $[T]$ 的「共軛轉置」(conjugate transpose)，即把 $[T]$ 的行與

[1]「希爾伯特伴隨」有時又可簡稱「伴隨」(adjoint)，但由於在泛函分析中，還有另一個「伴隨」概念，所以採用「希爾伯特伴隨」此一名稱以作區別。此外，有些人把「希爾伯特伴隨」稱為「厄米特伴隨」(Hermitian adjoint)。

列對調並把 $[T]$ 的每一項改為其共軛複數所得的矩陣。舉例說，以下 2×2 矩陣

$$\begin{bmatrix} 1+i & 2i \\ -3i & -2-4i \end{bmatrix}$$

的共軛轉置就是以下 2×2 矩陣：

$$\begin{bmatrix} 1-i & 3i \\ -2i & -2+4i \end{bmatrix}$$

現在如果把矩陣 $[T]$ 的共軛轉置記作 $[T]^*$，那麼我們有

$$[T^*] = [T]^* \qquad (3)$$

請注意上式左右兩端中的 * 號各有不同意思 (左端的 * 號代表「希爾伯特伴隨」，右端的 * 號則代表「共軛轉置」)，但由於在 $B(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ 中這兩者存在對應關係，所以這裡用同一個 * 號代表這兩者。

從矩陣的角度看，把算子 $T \in B(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ 作用於 $x \in \mathbb{C}^n$，相當於使用對應於 T 的 $m \times n$ 矩陣 $[T]$ 乘以對應於 x 的 $n \times 1$ 矩陣 $[x]$ (請注意線性代數習慣以「$n \times 1$ 矩陣」對應「有序 n 元組」)，所得結果是對應於 Tx 的 $m \times 1$ 矩陣 $[T][x]$，即

$$[Tx] = [T][x] \qquad (4)$$

此外，內積公式 (2) 也可以用矩陣表示如下：設 $x, y \in \mathbb{C}^n$，分別對應著 $n \times 1$ 矩陣 $[x]$ 和 $[y]$，則 $\langle x, y \rangle$ 對應著以下 1×1 矩陣：

$$[\langle x, y \rangle] = [x]^T \overline{[y]} \qquad (5)$$

其中 $[x]^T$ 代表 $[x]$ 的「轉置」(transpose)(請注意「轉置」把 $n \times 1$ 矩陣 $[x]$ 變成 $1 \times n$ 矩陣 $[x]^T$)，$\overline{[y]}$ 則代表把 $[y]$ 的每項改為其共軛複數，這是因為如果 $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$，則

$$\begin{aligned} [x]^T \overline{[y]} &= \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{y_1} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 \overline{y_1} + \ldots + x_n \overline{y_n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

上述結果正好對應 (2) 的右端。利用 (3)、(4) 和 (5)，我們可以用矩陣把等式 (1) 表示成：

$$([T][x])^T \overline{[y]} = [x]^T \overline{[T]^* [y]} \qquad (6)$$

舉例說，設有 $(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$ 的成員 T_1，其定義如下：

$$T_1(x_1, x_2) = ix_1 - x_2 \qquad (7)$$

如果取定 $\mathbb{C}^2$ 和 $\mathbb{C}$ 上的標準基底 (分別為 $\{(1,0),(0,1)\}$ 和 $\{1\}$)，那麼 T_1 對應著 1×2 矩陣

$$[T_1] = \left[\begin{array}{cc} i & -1 \end{array}\right]$$

這是因為如把 $[T_1]$ 乘以對應於 (x_1,x_2) 的 2×1 矩陣，所得結果是對應於 (7) 右端的 1×1 矩陣：

$$\left[\begin{array}{cc} i & -1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} ix_1 - x_2 \end{array}\right]$$

由於 $[T_1]$ 的共軛轉置是以下 2×1 矩陣：

$$[T_1]^* = \left[\begin{array}{c} -i \\ -1 \end{array}\right]$$

由此可知 ${T_1}^*$ 應是一個把 $\mathbb{C}$ 映射到 $\mathbb{C}^2$ 的有界線性算子，其定義如下：

$$ {T_1}^* y = (-iy, -y) \qquad (8)$$

為證明這一點，設 $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{C}^2$ 和 $y\in\mathbb{C}$，並應用 (2)、(7)、(8) 以及 $\overline{xy}=\overline{x}\ \overline{y}$ 此一性質，一方面我們有

$$\begin{array}{rcl} \langle T_1(x_1,x_2), y\rangle & = & \langle ix_1 - x_2, y\rangle \\ & = & ix_1\overline{y} - x_2\overline{y} \end{array}$$

另一方面，我們又有

$$\begin{array}{rcl} \langle (x_1,x_2), {T_1}^* y\rangle & = & \langle (x_1,x_2), (-iy,-y)\rangle \\ & = & ix_1\overline{y} - x_2\overline{y} \end{array}$$

由此可見 T_1 和 ${T_1}^*$ 滿足上面的 (1)。

此外，從矩陣的角度看，一方面我們有

$$\begin{array}{rcl} ([T_1][x])^T\overline{[y]} & = & \left(\left[\begin{array}{cc} i & -1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right]\right)^T \left[\begin{array}{c} \overline{y} \end{array}\right] \\ & = & \left[\begin{array}{c} ix_1 - x_2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \overline{y} \end{array}\right] \\ & = & \left[\begin{array}{c} ix_1\overline{y} - x_2\overline{y} \end{array}\right] \end{array}$$

另一方面，我們又有

$$\begin{array}{rcl} [x]^T\overline{[T_1]^*[y]} & = & \left(\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right]\right)^T \overline{\left[\begin{array}{c} -i \\ -1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} y \end{array}\right]} \\ & = & \left[\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} i\overline{y} \\ -\overline{y} \end{array}\right] \\ & = & \left[\begin{array}{c} ix_1\overline{y} - x_2\overline{y} \end{array}\right] \end{array}$$

由此可見 $[T_1]$ 和 $[T_1]^*$ 滿足上面的 (6)。

其次考慮序列空間 l^2，這個空間中的元素 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 是滿足 $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 < \infty$ 的複數序列，這個空間的內積函數如下 (即《數學示例：內積空間》中的公式 (5))：

$$\langle (x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} \qquad (9)$$

現設有 $B(l^2, l^2)$ 的成員 T_2，其定義如下：

$$T_2(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) \qquad (10)$$

上列算子的希爾伯特伴隨就是

$$T_2{}^*(y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots) = (y_2, y_3, y_4, y_5 \ldots) \qquad (11)$$

為證明這一點，設 $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty} \in l^2$，並應用 (9)、(10) 和 (11)，一方面我們有

$$\begin{aligned} \langle T_2(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty} \rangle &= \langle (0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots), (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \ldots) \rangle \\ &= x_1\overline{y_2} + x_2\overline{y_3} + x_3\overline{y_4} + x_4\overline{y_5} + \ldots \end{aligned}$$

另一方面，我們又有

$$\begin{aligned} \langle (x_n)_{n=1}^{\infty}, T_2{}^*(y_n)_{n=1}^{\infty} \rangle &= \langle (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots), (y_2, y_3, y_4, y_5, \ldots) \rangle \\ &= x_1\overline{y_2} + x_2\overline{y_3} + x_3\overline{y_4} + x_4\overline{y_5} + \ldots \end{aligned}$$

由此可見 T_2 和 $T_2{}^*$ 滿足上面的 (1)。

接著考慮函數空間 $L^2[a, b]$，根據《數學示例：完備空間》，這個空間中的元素是以實閉區間 $[a, b]$ 為定義域且滿足 $(\int_{[a,b]} |f(x)|^2 \, d\mu)^{\frac{1}{2}} < \infty$ 的可測函數，這個空間上的內積函數如下 (即《數學示例：完備空間》中的公式 (11))：

$$\langle f, g \rangle = \int_{[a,b]} f\overline{g} \, d\mu \qquad (12)$$

現設有 $B(L^2, L^2)$ 的成員 T_3，並且 $c \in \mathbb{C}$，其定義如下：

$$T_3 f = cf \qquad (13)$$

上列算子的希爾伯特伴隨就是

$$T_3{}^* g = \overline{c} g \qquad (14)$$

為證明這一點，設 $f, g \in L^2$，並應用 (12)、(13) 和 (14)，一方面我們有

$$\begin{aligned}\langle T_3 f, g\rangle &= \langle cf, g\rangle \\ &= \int_{[a,b]} cf\overline{g}\, d\mu\end{aligned}$$

另一方面，我們又有

$$\begin{aligned}\langle f, T_3{}^* g\rangle &= \langle f, \overline{c}g\rangle \\ &= \int_{[a,b]} cf\overline{g}\, d\mu\end{aligned}$$

由此可見 T_3 和 $T_3{}^*$ 滿足上面的 (1)[2]。

利用希爾伯特伴隨的概念，還可以定義有界線性算子的某些重要子類。設 H 為希爾伯特空間，$T \in B(H, H)$，若有

$$T^* = T \qquad (15)$$

則 T 稱為自伴算子(self-adjoint operator，又稱「厄米特算子」Hermitian operator)；若 T 是可逆的 (即存在 T^{-1} 使得對 H 中任何元素 x，均有 $T^{-1}Tx = TT^{-1}x = x$) 並且

$$T^* = T^{-1} \qquad (16)$$

則 T 稱為么正算子(unitary operator，亦譯作「酉算子」)；若有

$$TT^* = T^*T \qquad (17)$$

則 T 稱為正規算子(normal operator)。

接著提供上述三類算子的例子。首先考慮 $\mathbb{C}^n$，如前所述，$B(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ 中的成員與 $n \times n$ 方陣存在對應關係，因此上述三類算子的定義可以轉化為對應矩陣 (即厄米特矩陣(Hermitian matrix)、么正矩陣(unitary matrix) 和正規矩陣(normal matrix)) 的定義，只須把上列 (15) − (17) 中有關算子的符號 (例如 T) 改為其對應矩陣的符號 (例如 $[T]$) 便可。

舉例說，容易看到所有具有以下形式的 2×2 方陣 (其中 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) 都滿足 $[T_4]^* = [T_4]$：

$$[T_4] = \begin{bmatrix} a & b + ci \\ b - ci & d \end{bmatrix}$$

[2]即使讀者不熟悉勒貝格積分，也應能看到由於上列兩個積分的被積函數 (即 $cf\overline{g}$) 相同，所以其積分值相同。

因此根據 (15)，$[T_4]$ 是厄米特矩陣，由此亦可知 $[T_4]$ 所對應的算子 T_4，即如下定義的 $B(\mathbb{C}^2,\mathbb{C}^2)$ 成員，是自伴算子：

$$T_4(x_1,x_2)=(ax_1+(b+ci)x_2,(b-ci)x_1+dx_2)$$

此外，不難證明所有具有以下形式的 2×2 方陣 (其中 $\theta\in\mathbb{R}$) 都滿足 $[T_5]^*=[T_5]^{-1}$：

$$[T_5]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \cos\theta+i\sin\theta\end{bmatrix}$$

因此根據 (16)，$[T_5]$ 是么正矩陣，由此亦可知 $[T_5]$ 所對應的算子 T_5，即如下定義的 $B(\mathbb{C}^2,\mathbb{C}^2)$ 成員，是么正算子：

$$T_5(x_1,x_2)=(x_1,(\cos\theta+i\sin\theta)x_2)$$

另外，根據上述定義，任何自伴算子和么正算子都是正規算子，這是因為若 (15) 成立，有

$$TT^*=T^*T=T^2$$

若 (16) 成立，則有

$$TT^*=T^*T=I$$

其中 I 代表「恆等算子」(identity operator)，即對定義域中任何 x，均有 $Ix=x$。但除此之外，還有其他並非自伴／么正算子的正規算子，例如不難證明所有具有以下形式的 2×2 方陣 (其 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$) 都滿足 $[T_6][T_6]^*=[T_6]^*[T_6]$[3]：

$$[T_6]=\begin{bmatrix}ai & b+ci\\ -b+ci & di\end{bmatrix}$$

因此根據 (17)，$[T_6]$ 是正規矩陣，由此亦可知 $[T_6]$ 所對應的算子 T_6，即如下定義的 $B(\mathbb{C}^2,\mathbb{C}^2)$ 成員，是正規算子：

$$T_6(x_1,x_2)=(aix_1+(b+ci)x_2,(-b+ci)x_1+dix_2)$$

其次考慮序列空間 l^2，在這個空間中，如下定義的的 $B(l^2,l^2)$ 成員是自伴算子：

$$T_7(x_1,x_2,x_3,x_4,\ldots)=(x_2,x_1+x_3,x_2+x_4,x_3+x_5,\ldots) \qquad (18)$$

由於我們不知道 $T_7{}^*$ 是甚麼，為證明 T_7 是自伴算子，我們要借助 (1)，證明對任何 $(x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty}\in l^2$，都有

$$\langle T_7(x_n)_{n=1}^{\infty},(y_n)_{n=1}^{\infty}\rangle=\langle (x_n)_{n=1}^{\infty},T_7(y_n)_{n=1}^{\infty}\rangle \qquad (19)$$

[3]下列方陣具有 $[T]^*=-[T]$ 的特點，在數學上具有此特點的矩陣稱為「斜厄米特矩陣」(skew-Hermitian matrix)。

利用 (9) 和 (18)，一方面我們有

$$\begin{aligned}
& \langle T_7(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty} \rangle \\
= \ & \langle (x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_4, x_3 + x_5, \ldots), (y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots) \rangle \\
= \ & x_1\overline{y_2} + x_2\overline{y_1} + x_2\overline{y_3} + x_3\overline{y_2} + x_3\overline{y_4} + x_4\overline{y_3} + \ldots
\end{aligned}$$

另一方面，我們又有

$$\begin{aligned}
& \langle (x_n)_{n=1}^{\infty}, T_7(y_n)_{n=1}^{\infty} \rangle \\
= \ & \langle (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots), (y_2, y_1 + y_3, y_2 + y_4, y_3 + y_5, \ldots) \rangle \\
= \ & x_1\overline{y_2} + x_2\overline{y_1} + x_2\overline{y_3} + x_3\overline{y_2} + x_3\overline{y_4} + x_4\overline{y_3} + \ldots
\end{aligned}$$

由此可見 T_7 滿足 (19)。

接著考慮函數空間 $L^2[a,b]$，前面介紹的 T_3 (見 (13)) 是正規算子。由於我們在前面提供了 ${T_3}^*$ (見 (14))，根據 (17)，為證明 T_3 是正規算子，只需證明對任何 $f \in L^2[a,b]$，都有

$$T_3{T_3}^*f = {T_3}^*T_3f \qquad (20)$$

故設 $c \in \mathbb{C}$，則

$$\begin{aligned}
T_3{T_3}^*f &= T_3(\bar{c}f) \\
&= c\bar{c}f \\
&= \bar{c}cf \\
&= {T_3}^*(cf) \\
&= {T_3}^*T_3f
\end{aligned}$$

(20) 乃得證。

如對上述 T_3 定義中的 c 作出限制，便會得到自伴算子和么正算子 (這驗證了前面提出的一個結論：自伴算子和么正算子是正規算子的子類)。如把 c 限制為實數，那麼 T_3 是自伴算子。根據 (15)，為證明這一點，只需證明對任何 $f \in L^2[a,b]$，都有

$${T_3}^*f = T_3f \qquad (21)$$

故設 $c \in \mathbb{R}$，根據共軛複數的定義，$\bar{c} = c$，由此有

$$\begin{aligned}
{T_3}^*f &= \bar{c}f \\
&= cf \\
&= T_3f
\end{aligned}$$

(21) 乃得證。

如把 c 限制為模為 1 的複數，那麼 T_3 是么正算子。根據 (16)，為證明這一點，只需證明對任何 $f \in L^2[a,b]$，都有

$$T_3{}^* f = T_3{}^{-1} f \qquad (22)$$

根據 (13)，容易看到 $T_3{}^{-1}$ 的定義如下：

$$T_3{}^{-1} f = c^{-1} f$$

故設 $c \in \mathbb{C}$ 並且 $|c| = 1$，根據複數的性質，$c\bar{c} = |c|^2$，當 $|c| = 1$ 時，我們有 $\bar{c} = c^{-1}$。由此有

$$\begin{aligned} T_3{}^* f &= \bar{c} f \\ &= c^{-1} f \\ &= T_3{}^{-1} f \end{aligned}$$

(22) 乃得證。

連結至數學專題
連結至周家發網頁