希爾伯特-施密特理論

我們在《數學示例：施圖姆-劉維爾理論》和《數學示例：傅立葉級數》中介紹了「自伴算子」、「特徵函數」、「傅立葉級數」等概念，這些構成與「微分／差分方程邊值問題」相關的「施圖姆-劉維爾理論」的內容。有趣的是，上述概念也可推廣應用於「弗雷德霍姆積分／和分方程」，構成希爾伯特-施密特理論(Hilbert-Schmidt Theory) 的內容，本文主旨是簡介這些概念在上述積分／和分方程上的應用。

首先介紹具有以下形式的「自伴算子積分方程」：

$$f(x) + \lambda T_{\int} f(x) = 0,\ \text{其中} T_{\int} f(x) = \int_{t=a}^{t=b} K(x,t) f(t) \qquad (1)$$

上式中的 $T_{\int}$ 是一種「自伴算子」，其中的核 $K(x,t)$ 須具有以下對稱性：

$$K(x,t) = K(t,x) \qquad (2)$$

故稱對稱核(symmetric kernel)。由於 (1) 是「齊次方程」，不論 λ 取甚麼值，它都有 $f(x) = 0$ 這個「平凡解」。現在我們的問題是，λ 在取何值的情況下 (1) 有「非平凡解」(請注意這個值必不等於 0)？沿用《數學示例：施圖姆-劉維爾理論》中的概念，以下把這樣的 λ 值稱為 (1) 的「特徵值」，並把相關的非平凡解稱為「特徵函數」。但跟「自伴算子微分方程」不同，「自伴算子積分方程」並不附帶「權重函數」(也可說這類方程的權重函數為常值函數 $w(x) = 1$)。

我們在《數學示例：可分變項與可分核》中介紹了求解具有「可分核」的弗雷德霍姆積分／和分方程的方法，因此以下只討論具有「可分對稱核」的方程。首先考慮以下積分方程：

$$f(x) - \lambda \int_{t=0}^{t=\pi} \sin(x+t) f(t) = 0 \qquad (3)$$

上式中的核 $-\sin(x+t)$ 是對稱的，我們運用三角恆等式 $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ 把上式改寫成帶有可分核的形式：

$$f(x) - \lambda \int_{t=0}^{t=\pi} (\sin x \cos t + \cos x \sin t) f(t) = 0 \qquad (4)$$

運用上述網頁的方法，首先定義以下常數：

$$c_1 = \int_{t=0}^{t=\pi} \cos t f(t) \qquad (5)$$

$$c_2 = \int_{t=0}^{t=\pi} \sin t f(t) \qquad (6)$$

由此可把 (4) 改寫成

$$f(x) = \lambda(c_1 \sin x + c_2 \cos x) \qquad (7)$$

把上式依次代入 (5) 和 (6) 並進行定積分運算，可得到以下 1 次方程組：

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 - \frac{1}{2}c_2\lambda\pi = 0 \\ c_2 - \frac{1}{2}c_1\lambda\pi = 0 \end{array} \right. \qquad (8)$$

從上面第二個方程可得 $c_2 = \frac{1}{2}c_1\lambda\pi$，把這個 c_2 代入上面第一個方程可得 $c_1(1 - \frac{1}{4}\lambda^2\pi^2) = 0$。現在如果 $c_1 = 0$，那麼由上面第二個方程必也有 $c_2 = 0$，這樣根據 (7)，(4) 只有平凡解 $f(x) = 0$。為得到非平凡解，必須假設 $c_1 \neq 0$，由此必有

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{4}\lambda^2\pi^2 &= 0 \\ \lambda &= \pm\frac{2}{\pi} \qquad (9) \end{aligned}$$

如把 $\lambda = \frac{2}{\pi}$ 代入 (8)，可得到 $c_2 = c_1$，把此一結果代入 (7)，可得 (4) 的一個非平凡解 $f(x) = \frac{2c_1}{\pi}(\sin x + \cos x)$。如把 $\lambda = -\frac{2}{\pi}$ 代入 (8)，則可得到 $c_2 = -c_1$，把此一結果代入 (7)，可得 (4) 的另一個非平凡解 $f(x) = \frac{2c_1}{\pi}(\sin x - \cos x)$。總括而言，(4) 有以下兩個特徵值和相應的特徵函數[1]：

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = \frac{2}{\pi}, & f_1(x) = \sin x + \cos x \\ \lambda_2 = -\frac{2}{\pi}, & f_2(x) = \sin x - \cos x \end{array} \qquad (10)$$

接著介紹具有以下形式的「自伴算子和分方程」：

$$f(x) + \lambda T_\Sigma f(x) = 0, \text{其中} T_\Sigma f(x) = \sum_{t=a}^{t=b} K(x,t)f(t) \qquad (11)$$

[1]請注意把特徵函數乘以任何常數，所得結果仍是特徵函數，所以以下把特徵函數寫成較簡單的形式。

上式中的 T_Σ 也是一種「自伴算子」，其中的核 $K(x,t)$ 也必須是對稱核。跟自伴算子積分方程相似，「特徵值」和「特徵函數」概念也適用於自伴算子和分方程。舉例說，考慮以下和分方程：

$$f(x) - \lambda \sum_{t=0}^{t=4} (x+t) f(t) = 0 \qquad (12)$$

上式中的核 $-(x+t)$ 是對稱並且可分的。運用《數學示例：可分變項與可分核》的方法，首先定義以下常數：

$$c_1 = \sum_{t=0}^{t=4} f(t) \qquad (13)$$

$$c_2 = \sum_{t=0}^{t=4} t f(t) \qquad (14)$$

由此可把 (12) 改寫成

$$f(x) = \lambda(c_1 x + c_2) \qquad (15)$$

把上式依次代入 (13) 和 (14) 並進行定和分運算，可得到以下 1 次方程組：

$$\begin{cases} c_1 - 10c_1\lambda - 5c_2\lambda = 0 \\ c_2 - 30c_1\lambda - 10c_2\lambda = 0 \end{cases} \qquad (16)$$

從上面第一個方程可得 $c_2 = \frac{c_1 - 10c_1\lambda}{5\lambda}$，把這個 c_2 代入上面第二個方程可得 $c_1(50\lambda^2 + 20\lambda - 1) = 0$。現在如果 $c_1 = 0$，那麼由上面第一個方程必也有 $c_2 = 0$，這樣根據 (15)，(12) 只有平凡解 $f(x) = 0$。為得到非平凡解，必須假設 $c_1 \neq 0$，由此必有

$$\begin{aligned} 50\lambda^2 + 20\lambda - 1 &= 0 \\ \lambda &= \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{10} \end{aligned} \qquad (17)$$

如把 $\lambda = \frac{-2+\sqrt{6}}{10}$ 代入 (16)，可得到 $c_2 = \sqrt{6}c_1$，把此一結果代入 (15)，可得 (12) 的一個非平凡解 $f(x) = \frac{(-2+\sqrt{6})c_1}{10}(x+\sqrt{6})$。如把 $\lambda = \frac{-2-\sqrt{6}}{10}$ 代入 (16)，則可得到 $c_2 = -\sqrt{6}c_1$，把此一結果代入 (15)，可得 (12) 的另一個非平凡解 $f(x) = \frac{(-2-\sqrt{6})c_1}{10}(x-\sqrt{6})$。總括而言，(12) 有以下兩個特徵值和相應的特徵函數：

$$\begin{matrix} \lambda_1 = \frac{-2+\sqrt{6}}{10}, & f_1(x) = x + \sqrt{6} \\ \lambda_2 = \frac{-2-\sqrt{6}}{10}, & f_2(x) = x - \sqrt{6} \end{matrix} \qquad (18)$$

我們在《數學示例：施圖姆-劉維爾理論》中也介紹了函數之間「內積」的概念，此一概念也適用於本文討論的函數，其定義如下。設 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 為受到 (1) 中算子 $T_\int$ 作用的連續實值函數，則 (以下定義等同於上述網頁的 (27))：

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_a^b f_1(x) f_2(x) \qquad (19)$$

設 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 為受到 (11) 中算子 T_Σ 作用的離散實值函數，則 (以下定義基本等同於上述網頁的 (28)，但其上、下限有所不同)：

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \sum_a^b f_1(x) f_2(x) \qquad (20)$$

我們有以下定理。

定理 1：設 $\langle\ \rangle$ 如上定義，

(i) 設 $T_\int$ 為 (1) 中的算子，並且 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 為受到這個算子作用的連續實值函數，則有

$$\langle T_\int f_1, f_2 \rangle = \langle f_1, T_\int f_2 \rangle \qquad (21)$$

(ii) 設 T_Σ 為 (11) 中的算子，並且 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 為受到這個算子作用的離散實值函數，則有

$$\langle T_\Sigma f_1, f_2 \rangle = \langle f_1, T_\Sigma f_2 \rangle \qquad (22)$$

請注意上述定理中的關係 (21) 和 (22) 跟上述網頁「定理 1」中的關係 (29) 和 (30) 相同，這就是我們把 $T_\int$ 和 T_Σ 也稱為「自伴算子」的原因。容易看到 (21) 和 (22) 成立，以 (21) 為例，根據 (19) 和 (1)，並運用 (2) 和《數學示例：偏微／差分與重積／和分》中的「定理 2」，我們有

$$\begin{aligned}
\langle T_\int f_1, f_2 \rangle &= \int_a^b T_\int f_1(x) f_2(x) \\
&= \int_{x=a}^{x=b} \int_{t=a}^{t=b} K(x,t) f_1(t) f_2(x) \\
&= \int_{t=a}^{t=b} \int_{x=a}^{x=b} K(t,x) f_1(t) f_2(x) \\
&= \int_{t=a}^{t=b} f_1(t) \int_{x=a}^{x=b} K(t,x) f_2(x) \\
&= \int_a^b f_1(t) T_\int f_2(t) \\
&= \langle f_1, T_\int f_2 \rangle
\end{aligned}$$

「正交」和「範數」的概念也可推廣到積分／和分方程 (這裡無需應用權重函數)。設 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 為如上定義的函數，則它們正交，如果下式成立 (下式大致等於《數學示例：施圖姆-劉維爾理論》中的 (35))：

$$\langle f_1, f_2 \rangle = 0 \qquad (23)$$

$f_1(x)$ 的範數則定義如下 (下式大致等於《數學示例：傅立葉級數》中的 (1))：

$$\|f_1\| = \sqrt{\langle f_1, f_1 \rangle} \qquad (24)$$

以下定理提供自伴算子積分／和分方程特徵值和特徵函數的一些重要性質。

定理 2：方程 (1) 和 (11) 有有限多個或可數無窮多個特徵值，這些特徵值全為實數，對應於不同特徵值的特徵函數互相正交。

接下來讓我們用 (18) 中的兩個特徵函數 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 驗證上述定理，根據 (20)，我們有

$$\begin{aligned}\langle f_1, f_2 \rangle &= \sum_0^4 (x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6}) \\ &= \sum_0^4 (x^2-6) \\ &= 0\end{aligned}$$

由此可見 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的確互相正交。

此外，還可以從每個自伴算子積分／和分方程得到一個「特徵函數正交歸一序列」$(f_n)_{n\in I}$，其中各個成員互相正交，並且其範數都等於 1 (把函數 f 除以其範數 $\|f\|$，其結果 $\frac{f}{\|f\|}$ 就是一個其範數等於 1 的函數)。這個序列的重要性在於，任何可以表示成 $T_{\int} f(x)$ (若有關方程是積分方程並且 $f(x)$ 是連續函數) 或 $T_{\Sigma} f(x)$ (若有關方程是和分方程並且 $f(x)$ 是離散函數) 的函數 $g(x)$ 都可在形式上表示成這個序列中成員的「傅立葉級數」，即以下線性組合：

$$g(x) = \sum_{n\in I} c_n f_n(x) \qquad (25)$$

上式中的實係數 c_n 可用下式計算出來：

$$c_n = \langle g, f_n \rangle \qquad (26)$$

舉例說，考慮積分方程 (3) 的特徵函數 (列於 (10))，根據 (24)，可求得

$$\|\sin x + \cos x\| = \sqrt{\int_0^{\pi} (\sin x + \cos x)^2} = \sqrt{\pi} \qquad (27)$$

$$\|\sin x - \cos x\| = \sqrt{\int_0^{\pi} (\sin x - \cos x)^2} = \sqrt{\pi} \qquad (28)$$

從以上結果可得到 (3) 的特徵值序列和特徵函數正交歸一序列如下：

$$\left(\frac{2}{\pi}, -\frac{2}{\pi}\right), \quad \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\pi}}\right) \qquad (29)$$

現設有函數

$$\begin{aligned} g(x) &= T_{\int} x \\ &= -\int_{t=0}^{t=\pi} (\sin(x+t) \times t) \\ &= 2\sin x - \pi \cos x, \quad x \in [0, \pi] \qquad (30) \end{aligned}$$

由於 $2\sin x - \pi \cos x$ 可以表示成 $T_{\int} x$，這個連續函數應可表示成 (29) 中序列成員的傅立葉級數。接著用 (26) 求這個級數的兩個係數如下：

$$c_1 = \int_0^{\pi} (2\sin x - \pi \cos x) \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}(2-\pi)}{2} \qquad (31)$$

$$c_2 = \int_0^{\pi} (2\sin x - \pi \cos x) \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}(2+\pi)}{2} \qquad (32)$$

從以上結果可得 (30) 的連續傅立葉級數展開式如下：

$$2\sin x - \pi \cos x = \frac{\sqrt{\pi}(2-\pi)}{2} \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\pi}}\right) + \frac{\sqrt{\pi}(2+\pi)}{2} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\pi}}\right) \qquad (33)$$

接著考慮和分方程 (12) 的特徵函數 (列於 (18))，根據 (24)，可求得

$$\|x + \sqrt{6}\| = \sqrt{\sum_0^4 (x + \sqrt{6})^2} = \sqrt{60 + 20\sqrt{6}} \qquad (34)$$

$$\|x - \sqrt{6}\| = \sqrt{\sum_0^4 (x - \sqrt{6})^2} = \sqrt{60 - 20\sqrt{6}} \qquad (35)$$

從以上結果可得到 (12) 的特徵值序列和特徵函數正交歸一序列如下：

$$\left(\frac{-2+\sqrt{6}}{10}, \frac{-2-\sqrt{6}}{10}\right), \quad \left(\frac{x+\sqrt{6}}{\sqrt{60+20\sqrt{6}}}, \frac{x-\sqrt{6}}{\sqrt{60-20\sqrt{6}}}\right) \qquad (36)$$

現設有函數

$$\begin{aligned} g(x) &= T_\Sigma(2-x) \\ &= \sum_{t=0}^{t=4}(-(x+t)(2-t)) \\ &= 10, \ \ x \in \{0, \ldots, 4\} \qquad (37) \end{aligned}$$

由於 10 可以表示成 $T_\Sigma(2-x)$，這個 (常值) 離散函數應可表示成 (36) 中序列成員的傅立葉級數。接著用 (26) 求這個級數的兩個係數如下：

$$c_1 = \sum_0^4 10\left(\frac{x+\sqrt{6}}{\sqrt{60+20\sqrt{6}}}\right) = \frac{100+50\sqrt{6}}{\sqrt{60+20\sqrt{6}}} \qquad (38)$$

$$c_2 = \sum_0^4 10\left(\frac{x-\sqrt{6}}{\sqrt{60-20\sqrt{6}}}\right) = \frac{100-50\sqrt{6}}{\sqrt{60-20\sqrt{6}}} \qquad (39)$$

從以上結果可得 (37) 的離散傅立葉級數展開式如下：

$$10 = \frac{100+50\sqrt{6}}{\sqrt{60+20\sqrt{6}}}\left(\frac{x+\sqrt{6}}{\sqrt{60+20\sqrt{6}}}\right) + \frac{100-50\sqrt{6}}{\sqrt{60-20\sqrt{6}}}\left(\frac{x-\sqrt{6}}{\sqrt{60-20\sqrt{6}}}\right) \qquad (40)$$

上述傅立葉級數也可用於求解「自伴算子非齊次積分方程」和「自伴算子非齊次和分方程」，這兩類方程分別具有以下一般形式：

$$f(x) + \mu T_\int f(x) + g(x) = 0 \qquad (41)$$

$$f(x) + \mu T_\Sigma f(x) + g(x) = 0 \qquad (42)$$

其中的 $g(x)$ 和 μ 分別是給定的函數和實數。在上式中，如果設定 $g(x) = 0$ 並且以參數 λ 代替 μ，可得到與上述方程相關的「自伴算子齊次積分／和分方程」。現設根據前面介紹的方法求得這個齊次方程的特徵值序列 $(\lambda_n)_{n\in I}$ 和相對應的正交歸一特徵函數序列 $(f_n)_{n\in I}$。根據特徵值和特徵函數的定義，對於每個 $n \in I$，我們有 (以下用 T 概括 $T_\int$ 和 T_Σ)：

$$Tf_n(x) = -\frac{1}{\lambda_n} f_n(x) \qquad (43)$$

由於 $g(x)$ 不一定能表示成 $(f_n)_{n\in I}$ 成員的傅立葉級數，以下假設未知函數可寫成以下形式：

$$f(x) = -g(x) + \sum_{n\in I} d_n f_n(x) \qquad (44)$$

接下來要解出各個 d_n。為此，把 (44) 和 (43) 代入 (41) 或 (42) 的第一行 (但把下標 n 改為 m)，並加以整理：

$$\begin{aligned}
-g(x) + \sum_{m\in I} d_m f_m(x) + \mu T\left(-g(x) + \sum_{m\in I} d_m f_m(x)\right) + g(x) &= 0 \\
\sum_{m\in I} d_m f_m(x) - \mu T g(x) - \mu \sum_{m\in I} \frac{d_m}{\lambda_m} f_m(x) &= 0 \\
\sum_{m\in I} \left(d_m - \frac{\mu d_m}{\lambda_m}\right) f_m(x) - \mu T g(x) &= 0
\end{aligned}$$

接著把上式兩端同時與 $f_n(x)$ 進行內積運算，並利用內積運算的線性性質、$(f_n)_{n\in I}$ 的正交歸一性質以及「定理 1」，可推導出

$$\begin{aligned}
\left\langle \sum_{m\in I} \left(d_m - \frac{\mu d_m}{\lambda_m}\right) f_m(x) - \mu T g(x), f_n(x) \right\rangle &= 0 \\
d_n - \frac{\mu d_n}{\lambda_n} - \langle \mu g(x), T f_n(x)\rangle &= 0 \\
d_n \left(1 - \frac{\mu}{\lambda_n}\right) + \frac{\mu \langle g(x), f_n(x)\rangle}{\lambda_n} &= 0 \qquad (45)
\end{aligned}$$

由此可解出 d_n 如下：

$$d_n = \frac{\mu}{\mu - \lambda_n} \langle g(x), f_n(x)\rangle \qquad (46)$$

請注意如果 $g(x)$ 可表示成 $(f_n)_{n\in I}$ 成員的傅立葉級數，那麼上式中的 $\langle g(x), f_n(x)\rangle$ 便等於上述傅立葉級數中 f_n 項的係數。

接下來要考慮三種情況。情況 (i)：對任何 $n \in I$，都有 $\mu \neq \lambda_n$。在此情況下，(41) 或 (42) 有唯一解 (44)，其中的 d_n 由 (46) 給出。情況 (ii)：有至少一個 $i \in I$ 使得 $\mu = \lambda_i$，並且 $\langle g(x), f_n(x)\rangle = 0$。這即是說，當 $n = i$，不論 d_i 取何值，(45) 都必然得到滿足 (因為等號兩端都是 0)，因而 d_i 不受任何限制，實際是一個任意常數，而其他 d_n (其中 $n \neq i$) 則仍由 (46) 給出，因此 (41) 或 (42) 有包含任意常數的解。情況 (iii)：有至少一個 $n \in I$ 使得 $\mu = \lambda_n$，並且 $\langle g(x), f_n(x)\rangle \neq 0$。這即是說，當 $n = i$，不論 d_i

取何值, (45) 都得不到滿足 (因為等號左端不是 0), 因此 (41) 或 (42) 沒有解。

舉例說，考慮以下非齊次積分方程：

$$f(x)+\frac{1}{\pi}\int_{t=0}^{t=\pi}\sin(x+t)f(t)+1=0 \qquad (47)$$

把上式與 (41) 比較，如設定 $K(x,t)=-\sin(x+t)$，$\mu=-\frac{1}{\pi}$，$g(x)=1$，那麼 (3) 就是與上述方程相關的齊次方程，而 (3) 的特徵值和特徵函數正交歸一序列則載於 (29))。由於對任何 $n\in\{1,2\}$，$-\frac{1}{\pi}\neq\lambda_n$，這屬於上述情況 (i)，可知 (47) 有唯一解。由於 $g(x)$ 不能表示成 (29) 中正交歸一序列成員的傅立葉級數[2]，根據 (46)，先求：

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{-\frac{1}{\pi}}{-\frac{1}{\pi}-\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}(1\times\tfrac{sinx+\cos x}{\sqrt{\pi}})=\frac{2}{3\sqrt{\pi}} \\ d_2 &= \frac{-\frac{1}{\pi}}{-\frac{1}{\pi}-(-\frac{2}{\pi})}\int_0^{\pi}(1\times\tfrac{sinx-\cos x}{\sqrt{\pi}})=-\frac{2}{\sqrt{\pi}} \end{aligned} \qquad (48)$$

把以上結果代入 (44)，便可求得 (47) 的解為

$$\begin{aligned} f(x) &= -1+\frac{2}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\pi}}\right)-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{\pi}}\right) \\ &= -1-\frac{4}{3\pi}\sin x+\frac{8}{3\pi}\cos x \qquad (49) \end{aligned}$$

如把 (47) 改為以下方程：

$$f(x)+\frac{2}{\pi}\int_{t=0}^{t=\pi}\sin(x+t)f(t)+\sin x+\cos x=0 \qquad (50)$$

這裡有 $\mu=-\frac{2}{\pi}$，$g(x)=\sin x+\cos x$。由於根據 (29)，$-\frac{2}{\pi}=\lambda_2$，並且 $\langle g(x),f_2(x)\rangle=\int_0^{\pi}(\sin x+\cos x)(\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{\pi}})=0$，這屬於上述情況 (ii)，可知 d_2 是任意常數。另外, 容易看到 $\sin x+\cos x$ 可以表示成 (29) 中正交歸一序列的傅立葉級數：$\sin x+\cos x=\sqrt{\pi}\times\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\pi}}$，即有 $\langle g(x),f_1(x)\rangle=\sqrt{\pi}$。根據 (46)，我們有

$$d_1=\frac{-\frac{2}{\pi}}{-\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}}\times\sqrt{\pi}=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad (51)$$

綜合以上結果，可得到 (50) 的解如下：

$$\begin{aligned} f(x) &= -\sin x-\cos x+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\pi}}\right)+d_2\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{\pi}}\right) \\ &= -\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)+c(\sin x-\cos x) \qquad (52) \end{aligned}$$

[2]如假設 1 可以表示成上述傅立葉級數，並用 (26) 求得 $c_1=c_2=\frac{2}{\sqrt{\pi}}$，所得傅立葉級數並不等於 1，即有 $\frac{2}{\sqrt{\pi}}(\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\pi}})+\frac{2}{\sqrt{\pi}}(\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{\pi}})\neq 1$。

其中 $c=\frac{d_2}{\sqrt{\pi}}$ 是任意常數。

接著考慮以下非齊次和分方程：

$$f(x)-\frac{\sqrt{6}}{10}\sum_{t=0}^{t=4}(x+t)f(t)+10=0 \qquad (53)$$

把上式與 (42) 比較，如設定 $K(x,t)=-(x+t)$，$\mu=\frac{\sqrt{6}}{10}$，$g(x)=10$，那麼 (12) 就是與上述方程相關的齊次方程，而 (12) 的特徵值和特徵函數正交歸一序列則載於 (36)。由於對任何 $n\in\{1,2\}$，$\frac{\sqrt{6}}{10}\neq\lambda_n$，這屬於上述情況 (i)，可知 (53) 有唯一解。由於 $g(x)$ 可以表示成 (36) 中正交歸一序列成員的傅立葉級數 (見 (40))，根據 (46)，我們有

$$\begin{aligned} d_1 &= \left(\frac{\frac{\sqrt{6}}{10}}{\frac{\sqrt{6}}{10}-\frac{-2+\sqrt{6}}{10}}\right)\left(\frac{100+50\sqrt{6}}{\sqrt{60+20\sqrt{6}}}\right)=\frac{150+50\sqrt{6}}{\sqrt{60+20\sqrt{6}}} \\ d_2 &= \left(\frac{\frac{\sqrt{6}}{10}}{\frac{\sqrt{6}}{10}-\frac{-2-\sqrt{6}}{10}}\right)\left(\frac{100-50\sqrt{6}}{\sqrt{60-20\sqrt{6}}}\right)=\frac{90-40\sqrt{6}}{\sqrt{60-20\sqrt{6}}} \end{aligned} \qquad (54)$$

把以上結果代入 (44)，便可求得 (53) 的解為

$$\begin{aligned} f(x) &= -10+\frac{150+50\sqrt{6}}{\sqrt{60+20\sqrt{6}}}\left(\frac{x+\sqrt{6}}{\sqrt{60+20\sqrt{6}}}\right)+\frac{90-40\sqrt{6}}{\sqrt{60-20\sqrt{6}}}\left(\frac{x-\sqrt{6}}{\sqrt{60-20\sqrt{6}}}\right) \\ &= \left(3-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)x-7+2\sqrt{6} \qquad (55) \end{aligned}$$

如把 (53) 改為以下方程：

$$f(x)-\frac{-2+\sqrt{6}}{10}\sum_{t=0}^{t=4}(x+t)f(t)+1=0 \qquad (56)$$

這裡有 $\mu=\frac{-2+\sqrt{6}}{10}, g(x)=1$。由於根據 (36), $\frac{-2+\sqrt{6}}{10}=\lambda_1$ 並且 $\langle g(x),f_1(x)\rangle=\sum_0^4(1\times\frac{x+\sqrt{6}}{\sqrt{60+20\sqrt{6}}})\neq 0$，這屬於上述情況 (iii)，可知 (56) 沒有解。

連結至數學專題
連結至周家發網頁