數學示例：格林函數

我們在《數學示例：待定係數法》和《數學示例：參數變異法》中介紹了求解非齊次常微分／差分方程的兩種方法。對於「2 階非齊次常微分／差分方程初值／邊值問題」，我們還有第三種求解方法，這種方法要應用格林函數(Green's function) 的概念。

先從「具有齊次初始條件的 2 階非齊次常微分方程」說起，這種方程具有以下一般形式 (以下初始條件的右端不含非零常數，故稱「齊次初始條件」，否則是「非齊次初始條件」)：

$$k_2(x)D^2f(x)+k_1(x)Df(x)+k_0(x)f(x)+g(x)=0, f(a)=0, Df(a)=0 \qquad (1)$$

如果撇除上式中的初始條件，並且已知上述方程的補助解 (即齊次方程 $k_2(x)D^2f(x)+k_1(x)Df(x)+k_0(x)f(x)=0$ 的通解) 為 $f_c(x)=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)$，那麼可以運用《數學示例：參數變異法》中介紹的「參數變異法」求解上述方程 (不含初始條件的部分)。其原理為假設上述方程的通解具有以下形式 (下式等於上述網頁中的 (3))：

$$f_g(x)=f_1(x)h_1(x)+f_2(x)h_2(x) \qquad (2)$$

然後求出上式中的待求函數 $h_1(x)$ 和 $h_2(x)$。根據上述網頁，可以先用下式計算 $Dh_1(x)$ 和 $Dh_2(x)$ (以下兩式等於上述網頁註腳 2 中的公式 (i))：

$$Dh_1(x)=\frac{f_2(x)g(x)}{k_2(x)W[f_1,f_2](x)},\quad Dh_2(x)=-\frac{f_1(x)g(x)}{k_2(x)W[f_1,f_2](x)} \qquad (3)$$

其中 $W[f_1,f_2](x)$ 是 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的「朗斯基行列式」，其定義為 (下式可從《數學示例：基本解集》中的公式 (4) 而得)：

$$W[f_1,f_2](x)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ Df_1(x) & Df_2(x) \end{vmatrix} \qquad (4)$$

接著對 $Dh_1(x)$ 和 $Dh_2(x)$ 進行不定積分運算，從而求得 $h_1(x)$ 和 $h_2(x)$。然後運用 (2)，便可求得通解 $f_g(x)$。

為求解 (1) 所示的初值問題，固然可以依循《數學示例：方程與解》中介紹的方法，把 (1) 中的初始條件代入上面求得的 $f_g(x)$，解出其任意常數，從而得到 (1) 的特解。但除此以外，還有另一個方法：先把 (3) 中的變項 x 改為 t，接著對 $Dh_1(t)$ 和 $Dh_2(t)$ 進行以常數 a 為下限以及變數 x 為上限的定積分運算，最後把所得結果代入 (2) 中的 $h_1(x)$ 和 $h_2(x)$，便可得到 (1) 的特解 $f_p(x)$。現把上述計算總結成以下公式：

$$f_p(x) = f_1(x)\int_{t=a}^{t=x} \frac{f_2(t)g(t)}{k_2(t)W[f_1,f_2](t)} - f_2(x)\int_{t=a}^{t=x} \frac{f_1(t)g(t)}{k_2(t)W[f_1,f_2](t)} \qquad (5)$$

請注意上述方法的特點是直接求特解 $f_p(x)$ 而無需先求通解 $f_g(x)$。為方便應用，我們對上式作一些簡化。由於上式中的 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的論元 x 與積分變項 t 不同，可不妨把 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 移入積分符號內，經整理後，便可把上式改寫成

$$f_p(x) = \int_{t=a}^{t=x} G(x,t)g(t) \qquad (6)$$

其中

$$G(x,t) = \frac{f_1(x)f_2(t) - f_2(x)f_1(t)}{k_2(t)W[f_1,f_2](t)} \qquad (7)$$

上式中的 $G(x,t)$ 稱為「微分方程初值問題 (1) 的格林函數」。請注意上述函數只依賴於 (1) 的補助解中的 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 而並不依賴於其非齊次項 $g(x)$，因此任何僅在非齊次項上有差異的非齊次方程都可共用同一個格林函數 $G(x,t)$。

舉例說，考慮以下微分方程初值問題：

$$D^2f(x) + f(x) - \tan x = 0,\ \ f(0) = 0, Df(0) = 0 \qquad (8)$$

讀者可自行驗證,若撇除初始條件,上述方程的補助解 (即 $D^2f(x)+f(x) = 0$ 的通解) 為 $f(x) = c_1\sin x + c_2\cos x$，由此有 $f_1(x) = \sin x$、$f_2(x) = \cos x$，$Df_1(x) = \cos x$ 和 $Df_2(x) = -\sin x$，此外還有 $k_2(x) = 1$。根據 (4)，可求得

$$\begin{aligned} W[f_1,f_2](x) &= \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} \\ &= -1 \end{aligned}$$

把以上結果代入 (7)，可得「微分方程初值問題 (8) 的格林函數」如下：

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \frac{\sin x\cos t - \cos x\sin t}{(1)(-1)} \\ &= \sin(t-x) \qquad (9) \end{aligned}$$

接著便可用 (6) 求解 (8) 如下：

$$\begin{aligned} f_p(x) &= \int_{t=0}^{t=x} \sin(t-x)(-\tan t) \\ &= [-\cos x(\ln|\tan t+\sec t|-\sin t)-\sin x\cos t]_{t=0}^{t=x} \\ &= \sin x-\cos x\ln|\tan x+\sec x| \qquad (10) \end{aligned}$$

格林函數 (9) 還可用來求解僅在非齊次項上與 (8) 有差異的方程，例如如把 (8) 中的 $-\tan x$ 改為 1，那麼只需把上述定積分計算中的 $-\tan t$ 改為 1，便可求得相應微分方程初值問題的特解，讀者可自行驗證，這個特解是 $f_p(x) = \cos x - 1$。

我們可以把上述概念推廣到「具有齊次初始條件的 2 階非齊次常差分方程」，這種方程具有以下一般形式：

$$k_2(x)E^2f(x)+k_1(x)Ef(x)+k_0(x)f(x)+g(x)=0, f(a)=0, Ef(a)=0 \qquad (11)$$

類似前面的情況，如果已知上述方程 (撇除其初始條件) 的補助解 (即齊次方程 $k_2(x)E^2f(x) + k_1(x)Ef(x) + k_0(x)f(x) = 0$ 的通解) 為 $f_c(x) = c_1f_1(x) + c_2f_2(x)$，那麼根據《數學示例：參數變異法》，可以假設上述方程的通解同樣具有 (2) 的形式，並用下式計算 $\Delta h_1(x)$ 和 $\Delta h_2(x)$ (以下兩式等於上述網頁註腳 3 中的公式 (ii))：

$$\Delta h_1(x) = \frac{Ef_2(x)g(x)}{k_2(x)C[Ef_1, Ef_2](x)},\ \Delta h_2(x) = -\frac{Ef_1(x)g(x)}{k_2(x)C[Ef_1, Ef_2](x)} \qquad (12)$$

其中 $C[Ef_1, Ef_2](x)$ 是 $Ef_1(x)$ 和 $Ef_2(x)$ 的「卡索拉蒂行列式」，其定義為 (下式可從《數學示例：基本解集》中的公式 (5) 而得)：

$$C[Ef_1, Ef_2](x) = \begin{vmatrix} Ef_1(x) & Ef_2(x) \\ E^2f_1(x) & E^2f_2(x) \end{vmatrix} \qquad (13)$$

接著對 $\Delta h_1(x)$ 和 $\Delta h_2(x)$ 進行不定和分運算，從而求得 $h_1(x)$ 和 $h_2(x)$。然後運用 (2)，便可求得通解 $f_g(x)$。

為求解 (11) 所示的初值問題，固然可以把 (11) 中的初始條件代入上面求得的 $f_g(x)$，解出其任意常數，從而得到 (1) 的特解。但除此以外，也可以先把 (12) 中的變項 x 改為 t，接著對 $\Delta h_1(t)$ 和 $\Delta h_2(t)$ 進行以常數 a 為下限以及變數 $x-1$ 為上限的定和分運算，最後把所得結果代入 (2) 中的 $h_1(x)$ 和 $h_2(x)$，便可得到 (11) 的特解 $f_p(x)$。現把上述計算總結成以下公式：

$$f_p(x) = f_1(x)\sum_{t=a}^{t=x-1} \frac{Ef_2(t)g(t)}{k_2(t)C[Ef_1, Ef_2](t)} - f_2(x)\sum_{t=a}^{t=x-1} \frac{Ef_1(t)g(t)}{k_2(t)C[Ef_1, Ef_2](t)} \qquad (14)$$

類似前面的情況，我們可以對上式作一些簡化和整理，從而得到 $f_p(x)$ 的計算公式如下：

$$f_p(x) = \sum_{t=a}^{t=x-1} G(x,t)g(t) \qquad (15)$$

其中

$$G(x,t) = \frac{f_1(x)Ef_2(t) - f_2(x)Ef_1(t)}{k_2(t)C[Ef_1, Ef_2](t)} \qquad (16)$$

上式中的 $G(x,t)$ 稱為「差分方程初值問題 (11) 的格林函數」。

舉例說，考慮以下差分方程初值問題：

$$E^2f(x) - 2Ef(x) + f(x) - x = 0, \;\; f(0) = 0, Ef(0) = 0 \qquad (17)$$

讀者請自行驗證，若撇除初始條件，上述方程的補助解 (即 $E^2f(x) - 2Ef(x) + f(x) = 0$ 的通解) 為 $f(x) = c_1 + c_2x$，由此有 $f_1(x) = 1$、$f_2(x) = x$、$Ef_1(x) = 1$、$Ef_2(x) = x + 1$、$E^2f_1(x) = 1$ 和 $E^2f_2(x) = x + 2$，此外還有 $k_2(x) = 1$。根據 (13)，可求得

$$\begin{aligned} C[Ef_1, Ef_2](x) &= \begin{vmatrix} 1 & x+1 \\ 1 & x+2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \end{aligned}$$

把以上結果代入 (16)，可得「差分方程初值問題 (17) 的格林函數」如下：

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \frac{(1)(t+1) - (x)(1)}{(1)(1)} \\ &= t + 1 - x \qquad (18) \end{aligned}$$

接著便可用 (15) 求解 (17) 如下：

$$\begin{aligned} f_p(x) &= \sum_{t=0}^{t=x-1} (t+1-x)(-t) \\ &= \left[-\frac{t(t-1)(2t-1)}{6} + \frac{(x-1)t(t-1)}{2} \right]_{t=0}^{t=x} \\ &= \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x \qquad (19) \end{aligned}$$

格林函數 (16) 還可用來求解僅在非齊次項上與 (17) 有差異的方程，例如如把 (17) 中的 $-x$ 改為 1，那麼只需把上述定積分計算中的 $-t$ 改為 1，便可求得相應差分方程初值問題的特解，讀者可自行驗證，這個特解是

$f_p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$。

由於微分／差分方程和初始條件各有齊次／非齊次兩種可能，可以區分四種微分／差分方程初值問題：(i) 齊次方程、齊次條件；(ii) 齊次方程、非齊次條件；(iii) 非齊次方程、齊次條件；(iv) 非齊次方程、非齊次條件。第 (i) 和 (ii) 類問題可以用《數學示例：方程與解》和《數學示例：基本解集》中的方法求解；第 (iii) 類問題可用前面介紹的方法求解。至於第 (iv) 類問題，可以透過求解相關的第 (ii) 類和第 (iii) 類問題，然後把這兩個解相加，可以證明相加的結果就是第 (iv) 類問題的特解。

舉例說，考慮以下第 (iv) 類微分方程初值問題：

$$D^2 f(x) + f(x) - \tan x = 0,\ \ f(0) = 3, Df(0) = -1 \qquad (20)$$

以下是與 (20) 相關的第 (ii) 類微分方程初值問題：

$$D^2 f(x) + f(x) = 0,\ \ f(0) = 3, Df(0) = -1 \qquad (21)$$

讀者請自行驗證，(21) 的特解是

$$f_h(x) = -\sin x + 3\cos x \qquad (22)$$

此外，容易看到與 (20) 相關的第 (iii) 類微分方程初值問題是前面討論過的 (8)，其特解是 (10) 中的 $f_p(x)$，因此 (20) 的特解是

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = \cos x(3 - \ln|\tan x + \sec x|) \qquad (23)$$

接著考慮以下第 (iv) 類差分方程初值問題：

$$E^2 f(x) - 2Ef(x) + f(x) - x = 0,\ \ f(0) = 3, Ef(0) = -1 \qquad (24)$$

以下是與 (24) 相關的第 (ii) 類差分方程初值問題：

$$E^2 f(x) - 2Ef(x) + f(x) = 0,\ \ f(0) = 3, Ef(0) = -1 \qquad (25)$$

讀者請自行驗證，(25) 的特解是

$$f_h(x) = -4x + 3 \qquad (26)$$

此外，容易看到與 (24) 相關的第 (iii) 類差分方程初值問題是前面討論過的 (17)，其特解是 (19) 中的 $f_p(x)$，因此 (24) 的特解是

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{3}x + 3 \qquad (27)$$

除了「初值問題」外，格林函數的概念也適用於「邊值問題」，我們先從「具有齊次邊界條件的 2 階非齊次常微分方程」說起，這種方程具有以下一般形式 (以下邊界條件的右端不含非零常數，故稱「齊次邊界條件」，否則是「非齊次邊界條件」；另請注意，為免出現複雜情況，以下討論的邊界條件較《數學示例：方程與解》數式 (31) 中的邊界條件簡單)：

$$\begin{aligned} &k_2(x)D^2f(x)+k_1(x)Df(x)+k_0(x)f(x)+g(x)=0,\ \ x\in(a,b),\\ &a_1f(a)+a_2Df(a)=0, b_1f(b)+b_2Df(b)=0 \qquad (28)\end{aligned}$$

現設已知上述方程 (撇除其邊界條件) 的補助解為 $f_c(x)=c_1g_1(x)+c_2g_2(x)$，並設我們可以把適當的常數 c_1 和 c_2 代入這個補助解以得到兩個互相線性獨立的函數 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，使得它們分別滿足 (28) 中的第一和第二個邊界條件。把 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 代入 (3) 和 (4)，可得 $Dh_1(x)$ 和 $Dh_2(x)$。接下來對 $Dh_1(t)$ 和 $Dh_2(t)$ 進行定積分運算，但由於現在有兩個點 a 和 b，我們要對 $Dh_1(t)$ 進行以常數 b 為下限以及變數 x 為上限的定積分運算，並對 $Dh_2(t)$ 進行以常數 a 為下限以及變數 x 為上限的定積分運算。最後把所得結果代入 (2) 中的 $h_1(x)$ 和 $h_2(x)$，便可得到 (28) 的特解 $f_p(x)$。現把上述計算總結成以下公式[1]：

$$f_p(x)=f_1(x)\int_{t=b}^{t=x}\frac{f_2(t)g(t)}{k_2(t)W[f_1,f_2](t)}-f_2(x)\int_{t=a}^{t=x}\frac{f_1(t)g(t)}{k_2(t)W[f_1,f_2](t)} \qquad (29)$$

為方便應用，我們對上式作一些簡化，把 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 移入積分符號內，並且對調上面第一個積分的上下限 (並且把該積分乘以 -1)。經整理後，便可把上式改寫成

$$f_p(x)=-\int_{t=a}^{t=b}G(x,t)g(t) \qquad (30)$$

其中

$$G(x,t)=\begin{cases}\frac{f_2(x)f_1(t)}{k_2(t)W[f_1,f_2](t)} & 若 a<t\le x\\ \frac{f_1(x)f_2(t)}{k_2(t)W[f_1,f_2](t)} & 若 x\le t<b\end{cases} \qquad (31)$$

上式中的 $G(x,t)$ 稱為「微分方程邊值問題 (28) 的格林函數」，這個函數雖然是分段定義函數，但可以證明當 t 在區間 $[a,b]$ 上取某個定值時這個函數是 x 的連續函數。

舉例說，考慮以下微分方程邊值問題：

$$x^2D^2f(x)-3xDf(x)+3f(x)-24x^5=0,\ \ x\in(1,2),\ \ f(1)=0, f(2)=0 \qquad (32)$$

[1]在微分／差分方程的理論中，其實還有另一種「微分／差分方程邊值問題格林函數」的形式，但由於這種形式較複雜，本文不介紹這種形式。

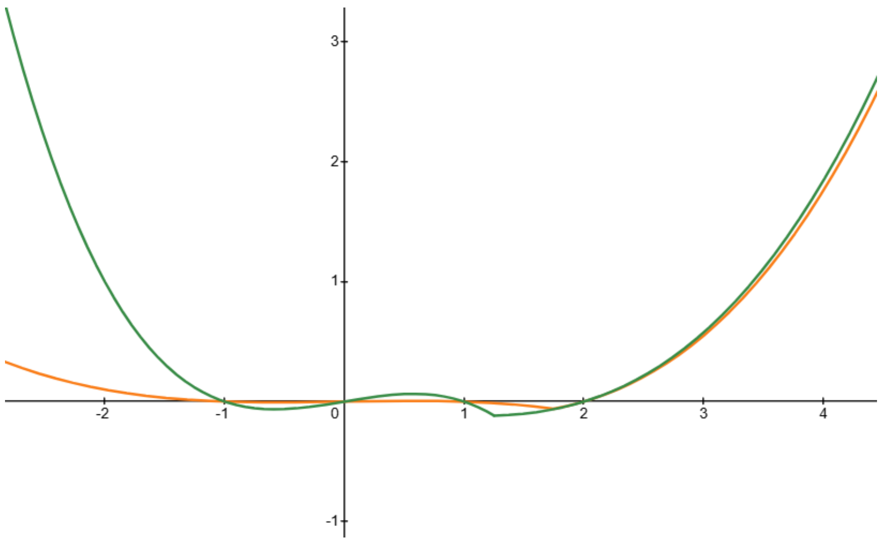
上述方程是「柯西-歐拉微分方程」，運用《數學示例：積分／和分因子》中介紹的方法，可求得上述方程的補助解 (即齊次方程 $x^2D^2f(x)-3xDf(x)+3f(x)=0$ 的通解) 為 $f_c(x)=c_1x+c_2x^3$。讀者請自行驗證，不難找到適當的常數 c_1 和 c_2 並把它們代入這個補助解，從而得到 $f_1(x)=x-x^3$ 和 $f_2(x)=4x-x^3$，使得 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 分別滿足 (32) 的第一和第二個邊界條件，並且互相線性獨立。由此有 $Df_1(x)=1-3x^2$ 和 $Df_2(x)=4-3x^2$，此外還有 $k_2(x)=x^2$。根據 (4)，可求得

$$\begin{aligned} W[f_1,f_2](x) &= \begin{vmatrix} x-x^3 & 4x-x^3 \\ 1-3x^2 & 4-3x^2 \end{vmatrix} \\ &= 6x^3 \end{aligned}$$

把以上結果代入 (31)，可得「微分方程邊值問題 (32) 的格林函數」如下：

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \begin{cases} \frac{(4x-x^3)(t-t^3)}{(t^2)(6t^3)} & \text{若}1<t\le x \\ \frac{(x-x^3)(4t-t^3)}{(t^2)(6t^3)} & \text{若}x\le t<2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{x(4-x^2)(1-t^2)}{6t^4} & \text{若}1<t\le x \\ \frac{x(1-x^2)(4-t^2)}{6t^4} & \text{若}x\le t<2 \end{cases} \qquad (33) \end{aligned}$$

由於 $G(x,t)$ 是二元函數，難以在平面上清晰描繪其圖象，我們選定 t 的某個固定值 t_0 ($t_0\in[1,2]$)，把這個二元函數轉化成只隨 x 而變化的一元函數 $G(x,t_0)$，並描繪其圖象。下圖展示 $G(x,1.25)$ (綠色曲線) 和 $G(x,1.75)$ (橙色曲線) 的圖象：



上圖顯示的圖象儘管分別在 1.25 和 1.75 點處不光滑，但這兩條曲線是連

續的。求得上述格林函數後，便可用 (30) 求解 (32) 如下：

$$\begin{aligned} f_p(x) &= -\int_{t=1}^{t=x}\left(\frac{x(4-x^2)(1-t^2)}{6t^4}\right)(-24t^5)-\int_{t=x}^{t=2}\left(\frac{x(1-x^2)(4-t^2)}{6t^4}\right)(-24t^5) \\ &= [x(x^2-4)(t^2-1)^2]_{t=1}^{t=x}+[x(x^2-1)(t^2-4)^2]_{t=x}^{t=2} \\ &= 3x^5-15x^3+12x \qquad (34) \end{aligned}$$

格林函數 (33) 還可用來求解僅在非齊次項上與 (32) 有差異的方程，例如如把 (32) 中的 $-24x^5$ 改為 $-18x^4$，那麼只需把上述定積分計算中的 $-24t^5$ 改為 $-18t^4$，便可求得相應微分方程邊值問題的特解，讀者可自行驗證，這個特解是 $f_p(x) = 6x^4 - 14x^3 + 8x$。

我們也可以把上述概念推廣到「具有齊次邊界條件的 2 階非齊次常差分方程」，這種方程具有以下一般形式：

$$\begin{aligned} &k_2(x)E^2f(x)+k_1(x)Ef(x)+k_0(x)f(x)+g(x)=0,\ \ x\in\{a,a+1,\ldots,(b-1,b)\}, \\ &a_1f(a)+a_2Ef(a)=0, b_1f(b)+b_2Ef(b)=0 \qquad (35) \end{aligned}$$

類似前面的情況，如果已知上述方程 (撇除其邊界條件) 的補助解為 $f_c(x) = c_1g_1(x) + c_2g_2(x)$，並設我們可以把適當的常數 c_1 和 c_2 代入這個補助解以得到兩個互相線性獨立的函數 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，使得它們分別滿足 (35) 中的第一和第二個邊界條件。把 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 代入 (12) 和 (13)，可得 $\Delta h_1(x)$ 和 $\Delta h_2(x)$。接下來對 $\Delta h_1(t)$ 進行以常數 b 為下限以及變數 $x-1$ 為上限的定和分運算，並對 $Dh_2(t)$ 進行以常數 a 為下限以及變數 $x-1$ 為上限的定和分運算。最後把所得結果代入 (2) 中的 $h_1(x)$ 和 $h_2(x)$，便可得到 (35) 的特解 $f_p(x)$。現把上述計算總結成以下公式[2]：

$$f_p(x) = f_1(x)\sum_{t=b}^{t=x-1}\frac{Ef_2(t)g(t)}{k_2(t)C[Ef_1,Ef_2](t)} - f_2(x)\sum_{t=a}^{t=x-1}\frac{Ef_1(t)g(t)}{k_2(t)C[Ef_1,Ef_2](t)} \qquad (36)$$

類似前面的情況，我們可以對上式作一些簡化和整理，從而得到 $f_p(x)$ 的計算公式如下：

$$f_p(x) = -\sum_{t=a}^{t=b-1}G(x,t)g(t) \qquad (37)$$

其中

$$G(x,t) = \begin{cases} \frac{f_2(x)Ef_1(t)}{k_2(t)C[Ef_1,Ef_2](t)} & 若 a\le t\le x-1 \\ \frac{f_1(x)Ef_2(t)}{k_2(t)C[Ef_1,Ef_2](t)} & 若 x\le t\le b-1 \end{cases} \qquad (38)$$

[2]請注意根據「差和分基本定理」(見《數學示例：積分與和分》中的「定理 2」)，對任何函數 $f(t)$ 和任何整數 m 和 n，都有 $\sum_{t=m}^{t=n} f(t) = -\sum_{t=n+1}^{t=m-1} f(t)$，因此 $x-1$ 不管取甚麼整數值，以下定和分都是有定義的。另請注意根據上述定理，不難推導出 $\sum_{t=n}^{t=n-1} f(t) = 0$ 和 $\sum_{t=n}^{t=n} f(t) = f(n)$。

上式中的 $G(x,t)$ 稱為「差分方程邊值問題 (35) 的格林函數」。

舉例說，考慮以下差分方程邊值問題：

$$E^2f(x)-3Ef(x)+2f(x)-2^x=0,\ \ x\in\{0,1,2,(3,4)\},$$
$$f(0)-Ef(0)=0,-2f(4)+Ef(4)=0 \qquad (39)$$

讀者請自行驗證,若撇除邊界條件,上述方程的補助解 (即 $E^2f(x)-3Ef(x)+2f(x)=0$ 的通解) 為 $f_c(x)=c_1+c_22^x$。此外，不難找到適當的常數 c_1 和 c_2 並把它們代入這個補助解，從而得到 $f_1(x)=1$ 和 $f_2(x)=2^x$，使得 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 分別滿足 (39) 的第一和第二個邊界條件，並且互相線性獨立。由此有 $Ef_1(x)=1$、$Ef_2(x)=2\times 2^x$、$E^2f_1(x)=1$ 和 $E^2f_2(x)=4\times 2^x$，此外還有 $k_2(x)=1$。根據 (13)，可求得

$$\begin{aligned} C[f_1,f_2](x) &= \begin{vmatrix} 1 & 2\times 2^x \\ 1 & 4\times 2^x \end{vmatrix} \\ &= 2\times 2^x \end{aligned}$$

把以上結果代入 (38)，可得「差分方程邊值問題 (39) 的格林函數」如下：

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \begin{cases} \frac{(2^x)(1)}{2\times 2^t} & 若0\le t\le x-1 \\ \frac{(1)(2\times 2^t)}{2\times 2^t} & 若x\le t\le 3 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2^{x-1-t} & 若0\le t\le x-1 \\ 1 & 若x\le t\le 3 \end{cases} \qquad (40) \end{aligned}$$

求得上述格林函數後，便可用 (37) 求解 (39) 如下：

$$\begin{aligned} f_p(x) &= -\sum_{t=0}^{t=x-1}(2^{x-1-t})(-2^t)-\sum_{t=x}^{t=3}(1)(-2^t) \\ &= [2^{x-1}t]_{t=0}^{t=x}+[2^t]_{t=x}^{t=4} \\ &= -2^x+\frac{1}{2}x2^x+16 \qquad (41) \end{aligned}$$

格林函數 (40) 還可用來求解僅在非齊次項上與 (39) 有差異的方程，例如如把 (39) 中的 -2^x 改為 -1，那麼只需把上述定和分計算中的 -2^x 改為 -1，便可求得相應差分方程邊值問題的特解，讀者可自行驗證，這個特解是 $f_p(x)=2^x-x+3$。

由於微分／差分方程和邊界條件各有齊次／非齊次兩種可能，也可以區分四種微分／差分方程邊值問題。類似前面的情況，第 (iv) 類問題 (即非齊次方程、非齊次條件) 可以透過求解相關的第 (ii) 類 (即齊次方程、非齊

次條件) 和第 (iii) 類問題 (即非齊次方程、齊次條件)，然後把這兩個解相加，可以證明相加的結果就是第 (iv) 類問題的特解。

舉例說，考慮以下第 (iv) 類微分方程邊值問題：

$$x^2D^2f(x)-3xDf(x)+3f(x)-24x^5=0,\ \ x\in(1,2),\ \ f(1)=1, f(2)=-4 \qquad (42)$$

以下是與 (42) 相關的第 (ii) 類微分方程邊值問題：

$$x^2D^2f(x)-3xDf(x)+3f(x)=0,\ \ x\in(1,2),\ \ f(1)=1, f(2)=-4 \qquad (43)$$

讀者請自行驗證，(43) 的特解是

$$f_h(x)=-x^3+2x \qquad (44)$$

此外，容易看到與 (42) 相關的第 (iii) 類微分方程邊值問題是前面討論過的 (32)，其特解是 (34) 中的 $f_p(x)$，因此 (42) 的特解是

$$f(x)=f_h(x)+f_p(x)=3x^5-16x^3+14x \qquad (45)$$

接著考慮以下第 (iv) 類差分方程邊值問題：

$$\begin{aligned}&E^2f(x)-3Ef(x)+2f(x)-2^x=0,\ \ x\in\{0,1,2,(3,4)\},\\&f(0)-Ef(0)=-5, -2f(4)+Ef(4)=2 \qquad (46)\end{aligned}$$

以下是與 (46) 相關的第 (ii) 類差分方程邊值問題：

$$\begin{aligned}&E^2f(x)-3Ef(x)+2f(x)=0,\ \ x\in\{0,1,2,(3,4)\},\\&f(0)-Ef(0)=-5, -2f(4)+Ef(4)=2 \qquad (47)\end{aligned}$$

讀者請自行驗證，(47) 的特解是

$$f_h(x)=5\times 2^x-2 \qquad (48)$$

此外，容易看到與 (46) 相關的第 (iii) 類差分方程邊值問題是前面討論過的 (39)，其特解是 (41) 中的 $f_p(x)$，因此 (46) 的特解是

$$f(x)=f_h(x)+f_p(x)=4\times 2^x+\frac{1}{2}x2^x+14 \qquad (49)$$

格林函數的概念還可以推廣到更高階的常微分／差分方程以至偏微分／差分方程，但這都涉及更高深的理論，這裡不擬作更深入的討論。

連結至數學專題
連結至周家發網頁