

## 數學示例：測地線

我們在《數學示例：曲面上曲線的性質》中介紹了測地曲率的概念。測地曲率除了反映某曲面上曲線某一方向上的彎曲程度外，還可用來定義微分幾何上一種十分重要的曲線—測地線，這是本文要介紹的內容。

首先重溫一些關鍵概念。設某曲面  $S$  具有如下所示的坐標卡：

$$X : E \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; X(u_1, u_2) = (x(u_1, u_2), y(u_1, u_2), z(u_1, u_2)) \quad (1)$$

並設某平面曲線具有以下光滑正則參數化形式：

$$Y : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2; Y(t) = (u_1(t), u_2(t)) \quad (2)$$

如有  $Y(D) \subseteq E$ ，那麼可把 (1) 與 (2) 複合，並得到一條曲面上曲線的參數化形式：

$$Z : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3; Z(t) = (x(u_1(t), u_2(t)), y(u_1(t), u_2(t)), z(u_1(t), u_2(t))) \quad (3)$$

我們可以用以下公式計算  $Z(t)$  所代表曲線於各點處的測地曲率  $\kappa_g(t)$  (下式等於上述網頁的 (20))：

$$\kappa_g(t) = \frac{(Z'(t) \times Z''(t)) \cdot N(t)}{\|Z'(t)\|^3} \quad (4)$$

在上式中， $N(t)$  是曲面單位法向量，可用以下公式求得 (下式等於上述網頁的 (5) 和 (6))：

$$N(u_1, u_2) = \frac{\frac{\partial X}{\partial u_1}(u_1, u_2) \times \frac{\partial X}{\partial u_2}(u_1, u_2)}{\left\| \frac{\partial X}{\partial u_1}(u_1, u_2) \times \frac{\partial X}{\partial u_2}(u_1, u_2) \right\|} \quad (5)$$

$$N(t) = N(u_1, u_2) \circ Y(t) \quad (6)$$

利用上述概念，可以作出以下定義。設  $Z(t)$  為上述曲面上曲線的參數化形式，若對所有  $t \in D$ ，均有  $\kappa_g(t) = 0$ ，則該曲線稱為**測地線**(geodesic)。舉

例說，任何平面直線都是測地線。為證實這一點，首先引入三維空間中平面的坐標卡（下式大致等於《數學示例：曲面的參數化》(2) 中的  $X_1$ ）：

$$\begin{aligned} X_1 : & \quad (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3; \\ X_1(u_1, u_2) = & \quad (a_1u_1 + b_1u_2, a_2u_1 + b_2u_2, a_3u_1 + b_3u_2) \quad (7) \end{aligned}$$

接著引入二維平面上一般直線的參數化形式（在以下計算中，我們只採用下面第一個  $Y_1(t)$  數式。讀者可自行驗證，如採用第二個  $Y_1(t)$  數式，可得到相同的最終計算結果）：

$$Y_1 : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad Y_1(t) = (t, pt + c) \text{ 或 } Y_1(t) = (c, t) \quad (8)$$

把 (7) 與 (8) 複合，可得三維空間中某平面上的直線的參數化形式：

$$\begin{aligned} Z_1 : & \quad (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3; \\ Z_1(t) = & \quad ((a_1 + b_1p)t + b_1c, (a_2 + b_2p)t + b_2c, (a_3 + b_3p)t + b_3c) \quad (9) \end{aligned}$$

讀者可自行驗證以下計算結果：

$$\begin{aligned} Z_1'(t) &= (a_1 + b_1p, a_2 + b_2p, a_3 + b_3p) \\ Z_1''(t) &= (0, 0, 0) \\ N_1(t) &= \frac{1}{n}(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \end{aligned}$$

其中

$$n = \sqrt{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}$$

由此根據 (4)，可求得（請參閱《數學示例：空間曲線的性質》中介紹的行列式求純量三重積的方法）：

$$\begin{aligned} (\kappa_g)_1(t) &= \frac{\frac{1}{n} \begin{vmatrix} a_1 + b_1p & a_2 + b_2p & a_3 + b_3p \\ 0 & 0 & 0 \\ a_2b_3 - a_3b_2 & a_3b_1 - a_1b_3 & a_1b_2 - a_2b_1 \end{vmatrix}}{((a_1 + b_1p)^2 + (a_2 + b_2p)^2 + (a_3 + b_3p)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

上述結果顯示任何平面直線都是測地線。

我們在《數學示例：曲面上曲線的性質》中曾指出，曲面上曲線的「測地曲率」 $\kappa_g(t)$  可被看成平面曲線的「有向曲率」 $\kappa_s(t)$  的推廣<sup>1</sup>。另一方面，我們又在《數學示例：平面曲線的性質》的「定理 2」中指出，一條平面曲

<sup>1</sup>這兩種曲率的計算公式非常相似，請參閱該網頁的 (20) 和 (21)。

線是直線當且僅當其  $\kappa_s(t)$  恆取 0 值。綜合以上結果，測地線可被看成平面直線的推廣。

我們知道，在平面上連接兩點的直線是連接該兩點的最短路徑。可以證明，在某些情況下，連接某曲面上兩點的測地線是該曲面上連接該兩點的最短路徑，由此可見測地線在某種意義上確是直線的推廣。接下來讓我們看某些曲面上曲線的測地線。考慮我們在《數學示例：切空間與可定向性》中討論過的  $r$  半徑球面，以下是其坐標卡 (下式大致等於上述網頁 (4) 中的  $X_1$ ) :

$$\begin{aligned} X_2 : \quad & (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^3; \\ X_2(u_1, u_2) = \quad & (r \cos u_1 \cos u_2, r \sin u_1 \cos u_2, r \sin u_2) \end{aligned} \quad (10)$$

現考慮以下平面曲線 (下式大致等於上述網頁 (7) 中的  $Y_2$ ，只是把其中的 0 改為  $c$ ，這裡  $c$  是區間  $(-\pi, \pi)$  中的任意實數) :

$$Y_2 : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad Y_2(t) = \left(c, t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (11)$$

把 (10) 與 (11) 複合，可得以下曲線 :

$$\begin{aligned} Z_2 : \quad & (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3; \\ Z_2(t) = \quad & \left(r \cos c \cos \left(t - \frac{\pi}{2}\right), r \sin c \cos \left(t - \frac{\pi}{2}\right), r \sin \left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right) \end{aligned} \quad (12)$$

上式代表  $r$  半徑球面上某條「子午線」。讀者可自行驗證以下計算結果 :

$$\begin{aligned} Z_2'(t) &= \left(-r \cos c \sin \left(t - \frac{\pi}{2}\right), -r \sin c \sin \left(t - \frac{\pi}{2}\right), r \cos \left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ Z_2''(t) &= \left(-r \cos c \cos \left(t - \frac{\pi}{2}\right), -r \sin c \cos \left(t - \frac{\pi}{2}\right), -r \sin \left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ N_2(t) &= \left(\cos c \cos \left(t - \frac{\pi}{2}\right), \sin c \cos \left(t - \frac{\pi}{2}\right), \sin \left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

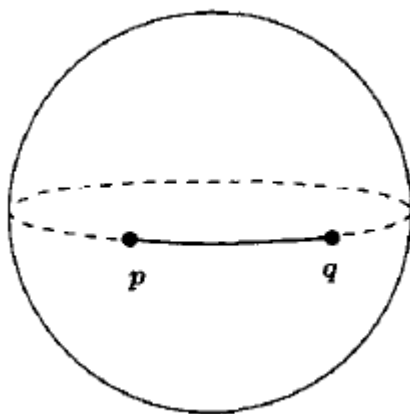
由此根據 (4)，可求得 (請注意以下行列式的第二行等於第三行乘以  $-r$ ) :

$$\begin{aligned} (\kappa_g)_2(t) &= \frac{\begin{vmatrix} -r \cos c \sin \left(t - \frac{\pi}{2}\right) & -r \sin c \sin \left(t - \frac{\pi}{2}\right) & r \cos \left(t - \frac{\pi}{2}\right) \\ -r \cos c \cos \left(t - \frac{\pi}{2}\right) & -r \sin c \cos \left(t - \frac{\pi}{2}\right) & -r \sin \left(t - \frac{\pi}{2}\right) \\ \cos c \cos \left(t - \frac{\pi}{2}\right) & \sin c \cos \left(t - \frac{\pi}{2}\right) & \sin \left(t - \frac{\pi}{2}\right) \end{vmatrix}}{r^3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

以上結果顯示， $r$  半徑球面上的「子午線」都是測地線。事實上， $r$  半徑球面上所有「子午線」和「赤道」都是測地線，而這些曲線都是  $r$  半徑球面上的

「大圓」(great circle)(即穿過  $r$  半徑球體球心的平面與  $r$  半徑球面相交所形成的曲線) 或大圓的一部分。由此可見，大圓構成  $r$  半徑球面上的測地線。

請注意並非在任何情況下測地線都是穿過曲面上兩點的最短路徑。以下圖所示球面為例，下圖中的粗黑實線就是連接  $p$  和  $q$  點的最短路徑，這條粗黑實線是球面上「赤道」(即球面上的某條測地線)的一部分。可是，下圖中的虛線也是連接  $p$  和  $q$  點的路徑，這條路徑也在「赤道」之上，但顯然不是最短路徑。由此可見，在某些情況下，測地線並不代表最短路徑。



接著考慮我們在《數學示例：曲面上曲線的性質》中討論過的圓柱面，以下是其坐標卡(下式等於上述網頁(8)中的  $X_1$ )：

$$X_3 : (-\pi, \pi) \times (0, h) \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad X_3(u_1, u_2) = (r \cos u_1, r \sin u_1, u_2) \quad (13)$$

接著引入二維平面上一般直線的參數化形式(在下式中,  $D_1$  是可使  $Y_3(D_1) \subseteq (-\pi, \pi) \times (0, h)$  的定義域。另請注意在以下計算中，我們只採用下面第一個  $Y_3(t)$  數式。讀者可自行驗證，如採用第二個  $Y_3(t)$  數式，可得到相同的最終計算結果)：

$$Y_3 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad Y_3(t) = (t, pt + c) \text{ 或 } Y_3(t) = (c, t) \quad (14)$$

把(13)與(14)複合，可得以下曲線：

$$Z_3 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad Z_3(t) = (r \cos t, r \sin t, pt + c) \quad (15)$$

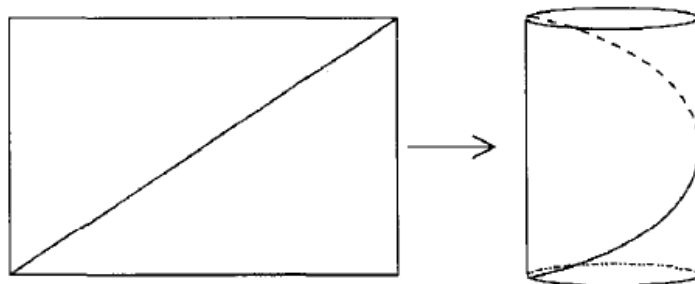
上式跟上述網頁(10)中的  $Z_1$  相似，也代表圓柱面上的圓螺旋線。讀者可自行驗證以下計算結果：

$$\begin{aligned} Z_3'(t) &= (-r \sin t, r \cos t, p) \\ Z_3''(t) &= (-r \cos t, -r \sin t, 0) \\ N_3(t) &= (\cos t, \sin t, 0) \end{aligned}$$

由此根據 (4)，可求得：

$$\begin{aligned}
 (\kappa_g)_3(t) &= \frac{\begin{vmatrix} -r \sin t & r \cos t & p \\ -r \cos t & -r \sin t & 0 \\ \cos t & \sin t & 0 \end{vmatrix}}{(r^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

上述結果顯示，圓螺旋線是圓柱面上的測地線。我們在《數學示例：高斯曲率與平均曲率》中曾指出，可以用屈曲或拉伸方法從一個平面得到一個圓柱面，或從一個圓柱面得到一個平面，而上述屈曲和拉伸不會造成摺疊，此一現象反映圓柱面與平面有相同的「高斯曲率」。但圓柱面與平面的關係其實並不只此，這兩種曲面還是「等距同構」(isometric) 的<sup>2</sup>，即當我們用上述方法把圓柱面與平面互相轉換時，圓柱面或平面上任意兩點的距離保持不變，而圓柱面或平面上的測地線在轉換後仍然是測地線，下圖展示此一現象：



上圖顯示一個矩形平面，其上有一條直線，即平面上的測地線。現在如果把該平面屈曲成圓柱面，那麼上述直線變成一條圓螺旋線。如前所述，測地線性質在上述轉換過程中保持不變，因此這條圓螺旋線必然是圓柱面上的測地線，這與前面的計算結果吻合。

當然並非所有曲面上曲線都是測地線。舉例說，考慮以下平面曲線 (在下式中， $D_5$  是可使  $Y_5(D_5) \subseteq (-\pi, \pi) \times (0, h)$  的定義域)：

$$Y_5 : D_5 \rightarrow \mathbb{R}^2; Y_5(t) = (t, t^2) \quad (16)$$

把 (13) 與 (16) 複合，可得以下曲線：

$$Z_5 : D_5 \rightarrow \mathbb{R}^3; Z_5(t) = (r \cos t, r \sin t, t^2) \quad (17)$$

<sup>2</sup>非常粗略地說，兩個曲面等距同構，如果可以用有相同「第一基本形式係數」的坐標卡來表示這兩個曲面 (請注意第一基本形式係數反映曲面的幾何量，包括距離，請參閱《數學示例：基本形式係數》)。現在如用  $X_4 : (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3; X_4(u_1, u_2) = (ru_1, u_2, 0)$  作為  $x-y$  平面的坐標卡，那麼不難計算出  $X_4$  與  $X_3$  (即圓柱面的坐標卡) 有相同的第一基本形式係數，因此平面與圓柱面等距同構。

上式代表圓柱面上的一條曲線，但並非圓螺旋線。讀者可自行驗證以下計算結果：

$$\begin{aligned}Z_5'(t) &= (-r \sin t, r \cos t, 2t) \\Z_5''(t) &= (-r \cos t, -r \sin t, 2) \\N_5(t) &= (\cos t, \sin t, 0)\end{aligned}$$

由此根據 (4)，可求得

$$\begin{aligned}(\kappa_g)_5(t) &= \frac{\begin{vmatrix} -r \sin t & r \cos t & 2t \\ -r \cos t & -r \sin t & 2 \\ \cos t & \sin t & 0 \end{vmatrix}}{(r^2 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{2r}{(r^2 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

由於上述結果不等於 0，可見  $Z_5(t)$  所代表的曲線不是測地線。

我們在《數學示例：曲面上曲線的性質》中還介紹了「測地撓率」 $\tau_g(t)$ ，其計算公式如下（下式等於上述網頁的 (22)）：

$$\tau_g(t) = \frac{U'(t) \cdot N(t)}{\|Z'(t)\|} \quad (18)$$

以下重溫與上式相關的若干關鍵概念的公式（下式等於上述網頁的 (4) 和 (7)）：

$$T(t) = \frac{Z'(t)}{\|Z'(t)\|} \quad (19)$$

$$U(t) = N(t) \times T(t) \quad (20)$$

此外，我們也曾在《數學示例：空間曲線的性質》中介紹「撓率」 $\tau(t)$ ，其計算公式如下（下式等於上述網頁的 (11)）：

$$\tau(t) = \frac{(Z'(t) \times Z''(t)) \cdot Z'''(t)}{\|Z'(t) \times Z''(t)\|^2} \quad (21)$$

測地撓率與撓率同樣稱為「撓率」，它們究竟有何關係？對於某些曲面上曲線而言，其測地撓率與撓率有相同的絕對值（但兩者可能有不同的正負號）。我們在《數學示例：曲面上曲線的性質》中便會指出，圓螺旋線具有這種

特性<sup>3</sup>。在引入測地線概念後，現在可以作出以下概括：設  $Z(t)$  為某測地線的參數化形式，則

$$|\tau_g(t)| = |\tau(t)| \quad (22)$$

以圓螺旋線為例（見前面 (15) 的  $Z_3(t)$ ），前面證明了圓螺旋線是測地線，因此圓螺旋線滿足上式<sup>4</sup>。如果某曲面上曲線不是測地線，上式便不一定成立。以  $Z_5(t)$  為例，前面證明了  $Z_5(t)$  所代表的曲線不是測地線。現在讓我們求這條曲線的測地撓率，讀者可自行驗證以下計算結果：

$$\begin{aligned} T_5(t) &= \left( -\frac{r \sin t}{\sqrt{r^2 + 4t^2}}, \frac{r \cos t}{\sqrt{r^2 + 4t^2}}, \frac{2t}{\sqrt{r^2 + 4t^2}} \right) \\ U_5(t) &= \left( \frac{2t \sin t}{\sqrt{r^2 + 4t^2}}, -\frac{2t \cos t}{\sqrt{r^2 + 4t^2}}, \frac{r}{\sqrt{r^2 + 4t^2}} \right) \\ U_5'(t) &= \left( \frac{2 \sin t + 2t \cos t}{\sqrt{r^2 + 4t^2}} - \frac{8t^2 \sin t}{(r^2 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-2 \cos t + 2t \sin t}{\sqrt{r^2 + 4t^2}} + \frac{8t^2 \cos t}{(r^2 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}}, \right. \\ &\quad \left. -\frac{4rt}{(r^2 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \end{aligned}$$

由此根據 (18)，可求得

$$\begin{aligned} (\tau_g)_5(t) &= \left[ \left( \frac{2 \sin t + 2t \cos t}{\sqrt{r^2 + 4t^2}} - \frac{8t^2 \sin t}{(r^2 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \times \cos t \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{-2 \cos t + 2t \sin t}{\sqrt{r^2 + 4t^2}} + \frac{8t^2 \cos t}{(r^2 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \times \sin t \right. \\ &\quad \left. + \left( -\frac{4rt}{(r^2 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \times 0 \right] \times \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4t^2}} \\ &= \frac{2t}{r^2 + 4t^2} \end{aligned}$$

接著求這條曲線的撓率，讀者可自行驗證以下計算結果：

$$\begin{aligned} Z_5'''(t) &= (r \sin t, -r \cos t, 0) \\ Z_5'(t) \times Z_5''(t) &= (2r \cos t + 2rt \sin t, 2r \sin t - 2rt \cos t, r^2) \\ \|Z_5'(t) \times Z_5''(t)\|^2 &= r^2(r^2 + 4t^2 + 4) \end{aligned}$$

<sup>3</sup>請注意我們在上述網頁採用的圓螺旋線參數化形式（即該網頁的 (9) 和 (10)）跟本文採用的圓螺旋線參數化形式（即前面的 (14) 和 (15)）略有不同，但讀者可自行驗證，採用本文的參數化形式可得到相同的結論。

<sup>4</sup>其實  $Z_3(t)$  滿足比上式更強的等式： $(\tau_g)_3(t) = \tau_3(t)$ ，即  $Z_3(t)$  的測地撓率與撓率不僅在絕對值上相等，而且在正負號上也相等。惟請注意，如果採用跟 (15) 不同的參數化形式，圓螺旋線的測地撓率與撓率便可能在正負號上不相等，因此這裡只能提供較弱的等式 (22)。

由此根據 (21)，可求得

$$\begin{aligned}\tau_5(t) &= \frac{\begin{vmatrix} -r \sin t & r \cos t & 2t \\ -r \cos t & -r \sin t & 2 \\ r \sin t & -r \cos t & 0 \end{vmatrix}}{r^2(r^2 + 4t^2 + 4)} \\ &= \frac{2t}{r^2 + 4t^2 + 4}\end{aligned}$$

由於  $|(\tau_g)_5(t)| \neq |\tau_5(t)|$ ，可知  $Z_5(t)$  所代表的曲線並不滿足 (22)。

惟請注意，測地線性質只是使 (22) 成立的「充分條件」而非「必要條件」。事實上，有一些曲面上曲線雖非測地線，卻滿足 (22)。舉例說，考慮以下平面曲線 (在下式中， $c$  是區間  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  內不等於 0 的實數)：

$$Y_6 : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2; Y_6(t) = (t, c) \quad (23)$$

如把  $X_2$  與上式複合，可得以下曲線：

$$Z_6 : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3; Z_6(t) = (r \cos c \cos t, r \cos c \sin t, r \sin c) \quad (24)$$

上式代表  $r$  半徑球面上的某條「北緯線」或「南緯線」，不是「赤道」。讀者可自行驗證，

$$(\kappa_g)_6(t) = \frac{\tan c}{r}$$

即上述曲線不是測地線；但卻有

$$(\tau_g)_6(t) = \tau_6(t) = 0$$

即上述曲線滿足 (22)。

連結至數學專題  
連結至周家發網頁