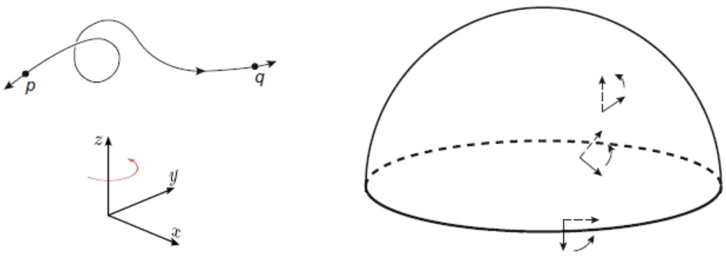
數學示例：廣義斯托克斯定理

我們在《數學示例：霍奇星與音樂同構》中介紹了如何使用與微分形式相關的算子來統一表達向量分析中的三個微分算子。本文主旨是介紹如何用與微分形式相關的一條定理來統一表達向量分析 (以至一元函數微積分) 中的多個積分定理，這條定理稱為「廣義斯托克斯定理」。

由於有關定理涉及流形的邊界及其定向，以下先對低維度 (0 維至 3 維) 流形的邊界及其定向作出直觀介紹。請注意並非所有流形都有邊界，閉合的曲線、曲面，例如圓形、球面，便是沒有邊界的流形。對於有邊界的流形來說，它們的維度與其邊界的維度存在以下簡單關係。設 M 為有邊界的 m 維流形，則 M 的邊界(boundary)，記作 ∂M，為 $m-1$ 維流形。如果把空集 $\emptyset$ 定為任意維流形，那麼上述陳述也適用於沒有邊界的 m 維流形，因為我們可以說這些流形的邊界是 $m-1$ 維流形 $\emptyset$。



舉例說，上面左上圖顯示一條曲線，這是 1 維流形，其邊界是由點 p 和 q 組成的集合，是 0 維流形。上面右圖則顯示一個北半球面，這是 2 維流形，其邊界是其底部的圓邊，這是 1 維流形。最後，考慮一個球體，這是 3 維流形，其邊界則是位於其外圍的 2 維球面。

我們在《數學示例：微分形式的積分》中介紹了流形的定向，可以證明若 M 是有邊界的可定向流形，則其邊界 ∂M 也是可定向流形。但 ∂M 有兩個可能定向，其中一個與本文主旨相關，稱為誘導定向(induced orientation)。如何在 ∂M 的兩個可能定向中確定哪一個是誘導定向？方法是在 ∂M 上的每一點處加一個外指單位法向量(outward-pointing unit normal) v，使得 v

與 M 相切，與 ∂M 垂直，並且其指向遠離 M。請注意把 v 加上 ∂M 的其中一個可能定向，構成 m 維空間上的某個定向。如果這個定向與 M 的定向一致，那麼 ∂M 的定向就是誘導定向，否則 ∂M 的另一可能定向才是誘導定向。此外，對於沒有邊界的流形來說，我們規定其邊界 $\emptyset$ 的定向是空集，而且這個定向必是誘導定向。

舉例說，考慮上面左上圖的曲線，這條曲線的定向是從 p 點流向 q 點。現在其兩個邊界點 p 和 q 處各加一個外指單位法向量，並為 p 點和 q 點分別指派 $-$ 號和 $+$ 號作為其定向。請注意 p 點處的法向量加上 $-$ 號構成 1 維空間上與該法向量反向的定向 (因為 $-$ 號代表「相反」)，這個定向正與曲線的定向一致；而 q 點處的法向量加上 $+$ 號構成 1 維空間上與該法向量同向的定向 (因為 $+$ 號代表「相同」)，這個定向也正與曲線的定向一致，因此上述 p 點和 q 點的定向都是誘導定向。

接著考慮上面右圖的北半球面，這個曲面的定向是逆時針方向。現在其邊界 (即底部的圓邊) 的某一點處加一個外指單位法向量，並為圓邊指派從 $(1, 0, 0)$ 點經 $(0, 1, 0)$ 點、$(-1, 0, 0)$ 點、$(0, -1, 0)$ 點繞一圈返回 $(1, 0, 0)$ 點的定向，此一定向反映在圓邊上指向右方的切向量。請注意上述法向量加上上述切向量構成 2 維空間上的逆時針方向 (因為從上述法向量旋轉至上述切向量的方向是逆時針方向)，而這正與北半球面的定向一致，因此上述圓邊的定向是誘導定向。

最後考慮一個定向為右手性方向的球體，如前所述，這個球體的邊界是其外圍的球面。現在這個球面的某一點處加一個外指單位法向量，例如上面左下圖所示的 z 軸，並為球面指派逆時針方向作為其定向，此一定向反映在 x 軸旋轉至 y 軸的方向。請注意上述 z 軸的指向加上從 x 軸旋轉至 y 軸的逆時針方向構成 3 維空間上的右手性方向，而這正與球體的定向一致，因此上述球面的定向是誘導定向。

具備上述概念後，便可介紹以下定理。

定理 1 (廣義斯托克斯定理Generalized Stokes' Theorem)：設 M 為帶有某定向的 m 維緊致流形[1]，其邊界 ∂R 帶有誘導定向，α 為 $\Gamma(\bigwedge^{m-1} T^*M)$ 中的微分 $(m-1)$ 形式，則

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha \qquad (1)$$

[1]有關「緊致」的定義，請參閱《數學示例：緊致性》。根據該網頁，歐幾里得空間的子集是緊致的當且僅當該集合是有界閉集。這裡把積分範圍 M 限制為緊致集合，是要避免討論 $\int_0^\infty t dt$、$\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ 等「瑕積分」(improper integral)。請注意在這兩個瑕積分中，前者的積分範圍是無窮區間 $[0, \infty)$，後者的積分範圍是半開半閉區者 $(0, 1]$ (由於 $\frac{1}{t}$ 在 $t = 0$ 處無定義，所以後一個積分的積分範圍是 $(0, 1]$ 而非 $[0, 1]$)，兩者都不是緊致集合。

上式等號兩端的積分是合理的。左端的積分中，積分範圍是 m 維流形 M，被積的 $d\alpha$ 是微分 m 形式；右端的積分中，積分範圍是 $m-1$ 維流形 ∂M，被積的 α 是微分 $m-1$ 形式。

接下來逐一介紹向量分析中的三個積分定理 (以及它們的特例)，讀者將會看到這些定理都是上述定理的特例。第一個定理涉及向量線積分。

定理 2 (線積分基本定理Fundamental Theorem of Line Integral，又稱「梯度定理」Gradient Theorem)：設 M 為被嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中且有以下參數化形的 1 維緊致流形 (即曲線)：

$$\psi:[a,b]\to M;\ \ \psi(t)=(x,y,z),\ \text{其中}x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t) \qquad (2)$$

f 為 M 上的實值函數 (即微分 0 形式)，則

$$\int_M (\text{grad } f)\cdot ds = f(\psi(b)) - f(\psi(a)) \qquad (3)$$

以下提供一個有關平面曲線的例子，請注意上述定理也適用於平面曲線，因為平面曲線可被看成其 z 坐標恆為 0 的空間曲線。設 M_I 為 x-y 平面上的拋物線 $x=4-y^2$ 從 $(-5,-3)$ 點到 $(0,2)$ 點的一段，這是一個緊致流形，以下是這條曲線的參數化形式 (下式大致等於《數學示例：微分形式的積分》中的 (9))：

$$\psi_I:[-3,2]\to M_I;\ \ \psi_I(t)=(x,y),\ \text{其中}x=4-t^2,\ y=t \qquad (4)$$

考慮 M_I 上的實值函數：

$$f_I(x,y)=x^2y \qquad (5)$$

一方面，根據《數學示例：霍奇星與音樂同構》中有關 grad 的定義 (即該網頁的 (18))，我們有

$$\text{grad } f_I(x,y)=[2xy,x^2]^T \qquad (6)$$

利用《數學示例：微分形式的積分》中有關向量線積分的計算公式 (即該網頁的 (22))，可求得

$$\begin{aligned}\int_{M_I}(\text{grad } f_I)\cdot ds &= \int_{-3}^{2}[8t-2t^3,16-8t^2+t^4]^T\cdot[-2t,1]^T dt\\ &= 75\end{aligned}$$

另一方面，根據 f_I 和 ψ_I 的定義，又可求得

$$f_I(\psi_I(2))-f_I(\psi_I(-3))=75$$

上述計算結果顯示 $\int_{M_I}(\text{grad } f_I)\cdot ds = f_I(\psi_I(2)) - f_I(\psi_I(-3))$，由此驗證了「定理 2」。

接著證明「定理 2」是「定理 1」的特例。一方面，根據 grad 的定義，我們有

$$\text{grad } f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right]^T$$

根據 $\flat$ 的定義，又有

$$\flat(\text{grad } f) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

但根據外導數算子 d 的定義，上式等號右端等於 df，由此有

$$\flat(\text{grad } f) = df \qquad (7)$$

應用《數學示例：微分形式的積分》中的「定理 1」(但須把該定理中的積分範圍 R 改為 M)，把 grad f 代入該網頁 (26) 中的 v，並利用 (7)，可得

$$\int_M (\text{grad } f)\cdot ds = \int_M df \qquad (8)$$

另一方面，根據 (2)，M 是從 $\psi(a)$ 流向 $\psi(b)$ 的曲線，因此根據前面的討論，∂M 的兩個成員 $\psi(a)$ 和 $\psi(b)$ 的誘導定向分別為 $-$ 和 $+$。由此根據《數學示例：微分形式的積分》中的公式 (2) 以及以下事實：若集合 A 和 B 互斥，則 $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$，我們有

$$\begin{aligned}\int_{\partial M} f &= \int_{\{\psi(a)\}} f + \int_{\{\psi(b)\}} f \\ &= f(\psi(b)) - f(\psi(a)) \qquad (9)\end{aligned}$$

把 (8) 和 (9) 分別代入 (3) 等號左、右兩端，可得

$$\int_M df = \int_{\partial M} f$$

上式是把微分 0 形式 f 代入 (1) 中 α 的結果，由此證得「定理 2」是「定理 1」的特例。

若 M 是 $\mathbb{R}$ 上的緊致直線，那麼 M 等於一個有限區間 $[a, b]$，其參數化形式因而化簡為

$$\psi : [a, b] \to [a, b];\ \ \psi(t) = t \qquad (10)$$

此外, f 也化簡為只有一個論元 t 的函數, 因而有 $\text{grad}\ f = \frac{df}{dt}$, 而 $\flat(\text{grad}\ f) = \frac{df}{dt}dt$, 因此根據《數學示例：微分形式的積分》中的「定理 1」, 有

$$\int_a^b (\text{grad}\ f) \cdot ds = \int_a^b \frac{df}{dt} dt \qquad (11)$$

把 (11) 和 (10) 分別代入 (3) 等號左、右兩端, 可得

$$\int_a^b \frac{df}{dt} dt = f(b) - f(a)$$

上式就是微積分第二基本定理(Second Fundamental Theorem of Calculus), 由此可見, 「微積分第二基本定理」是「定理 2」的特例, 因而也是「定理 1」的特例。

第二個積分定理涉及向量面積分與向量線積分的關係。

定理 3 (斯托克斯定理Stokes' Theorem, 又稱「旋度定理」Curl Theorem)：設 M 為被嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中帶有某定向且有以下參數化形式的 2 維緊致流形 (即曲面)：

$$\psi : D \to M;\ \ \psi(s, t) = (x, y, z),\ \text{其中} x = x(s, t), y = y(s, t), z = z(s, t)) \qquad (12)$$

其邊界 ∂M 為帶有誘導定向的閉合曲線, v 為具有以下形式的向量場：

$$v(x, y, z) = [v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z)]^T \qquad (13)$$

則

$$\iint_M (\text{curl}\ v) \cdot dS = \int_{\partial M} v \cdot ds \qquad (14)$$

為驗證上述定理, 設 M_{II} 為帶有標準定向 (即逆時針方向) 的單位北半球面, 這是一個緊致流形, 以下是這個曲面的參數化形式 (下式大致等於《數學示例：微分形式的積分》中的 (15))：

$$\begin{aligned} \psi_{II} &: [0, 2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to M_{II}; \\ \psi_{II}(s, t) &= (x, y, z),\ \text{其中} x = \cos s \cos t,\ y = \sin s \cos t,\ z = \sin t \end{aligned} \qquad (15)$$

考慮以下向量場：

$$v_{II}(x, y, z) = [-y, x, z]^T \qquad (16)$$

一方面, 根據《數學示例：霍奇星與音樂同構》中有關 curl 的定義 (即該網頁的 (22)), 我們有

$$\text{curl}\ v_{II}(x, y, z) = [0, 0, 2]^T \qquad (17)$$

利用《數學示例：微分形式的積分》中有關向量面積分的計算公式 (即該網頁的 (29))，可求得

$$\begin{aligned}\iint_{M_{II}} (\text{curl } v_{II}) \cdot dS &= \iint_{[0,2\pi]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} [0,0,2]^T \cdot ([-\sin s\cos t, \cos s\cos t, 0]^T \\ &\quad \times [-\cos s\sin t, -\sin s\sin t, \cos t]^T) d(s,t) \\ &= 2\pi\end{aligned}$$

另一方面，M_{II} 的邊界是位於其底部的單位圓邊。我們在前面曾指出，當 M_{II} 的定向是標準定向時，∂M_{II} 的誘導定向是從 $(1,0,0)$ 點經 $(0,1,0)$ 點、$(-1,0,0)$ 點、$(0,-1,0)$ 點繞一圈返回 $(1,0,0)$ 點。以下是帶有上述誘導定向的 ∂M_{II} 的參數化形式：

$$\psi_{III} : [0,2\pi] \to \partial M_{II};\ \ \psi_{III}(t) = (x,y,z),\ \text{其中} x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 0 \qquad (18)$$

由此利用《數學示例：微分形式的積分》中有關向量線積分的計算公式 (即該網頁的 (22))，可求得

$$\begin{aligned}\int_{\partial M_{II}} v_{II} \cdot ds &= \int_0^{2\pi} [-\sin t, \cos t, 0]^T \cdot [-\sin t, \cos t, 0]^T dt \\ &= 2\pi\end{aligned}$$

上述計算結果顯示 $\iint_{M_{II}} (\text{curl } v_{II}) \cdot dS = \int_{\partial M_{II}} v_{II} \cdot ds$, 由此驗證了「定理 3」。

接著證明「定理 3」是「定理 1」的特例。一方面，根據 curl 的定義，我們有

$$\text{curl } v = \left[\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right]^T$$

根據 $\star$ 和 $\flat$ 的定義，又有

$$\begin{aligned}(\star \circ \flat)(\text{curl } v) &= \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) dx \wedge dy \\ &\quad + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial z}\right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) dy \wedge dz\end{aligned}$$

讀者可自行驗證，根據 d 和 $\flat$ 的定義，上式等號右端等於 $d(\flat v)$，由此有

$$(\star \circ \flat)(\text{curl } v) = d(\flat v) \qquad (19)$$

應用《數學示例：微分形式的積分》中的「定理 2」(但須把該定理中的積分範圍 R 改為 M)，把 curl v 代入該網頁 (33) 中的 v，並利用 (19)，可得

$$\iint_M \text{curl } v \cdot dS = \int_M d(\flat v) \qquad (20)$$

另一方面，根據《數學示例：微分形式的積分》中的「定理 1」，我們有

$$\int_{\partial M} v \cdot ds = \int_{\partial M} \flat v \qquad (21)$$

把 (20) 和 (21) 分別代入 (14) 等號左、右兩端，可得

$$\int_M d(\flat v) = \int_{\partial M} \flat v$$

上式是把微分 1 形式 $\flat v$ 代入 (1) 中 α 的結果，由此證得「定理 3」是「定理 1」的特例。

若 M 是 $\mathbb{R}^2$ 上的 2 維緊致平面，那麼 M 的參數化形式化簡為

$$\psi : D \to M; \;\; \psi(s,t) = (x(s,t), y(s,t), 0) \qquad (22)$$

此外，(13) 中的 v 也化簡為

$$v(x,y,0) = [v_1(x,y,0), v_2(x,y,0), 0]^T$$

由此有

$$\text{curl } v = \left[0, 0, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right]^T$$

一方面，由於 $(\star \circ \flat)(\text{curl } v) = (\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}) dx \wedge dy$，因此根據《數學示例：微分形式的積分》中的「定理 2」，有

$$\iint_M (\text{curl } v) \cdot dS = \iint_M \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) d(x,y) \qquad (23)$$

另一方面，由於 $\flat v = v_1 dx + v_2 dy$，因此根據《數學示例：微分形式的積分》中的「定理 1」，有

$$\int_{\partial M} v \cdot ds = \int_{\partial M} (v_1 dx + v_2 dy) \qquad (24)$$

把 (23) 和 (24) 分別代入 (14) 等號左、右兩端，可得

$$\iint_M \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) d(x,y) = \int_{\partial M} (v_1 dx + v_2 dy)$$

上式就是格林定理(Green's Theorem)，由此可見，「格林定理」是「定理 3」的特例，因而也是「定理 1」的特例。

第三個積分定理涉及一般三重積分與向量面積分的關係。

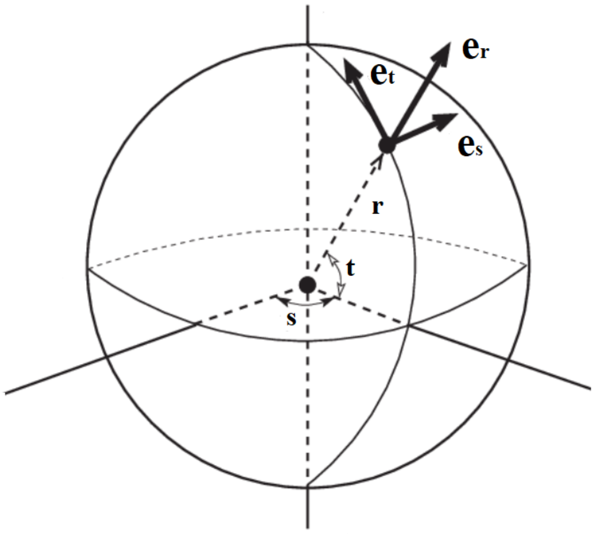
定理 4 (高斯定理Gauss' Theorem，又稱「散度定理」Divergence Theorem)：設 M 為 $\mathbb{R}^3$ 空間中帶有標準定向的 3 維緊致流形 (即立體)，其邊界 ∂M 為帶有誘導定向的閉合曲面，v 為如 (13) 所示的向量場，則

$$\iiint_M (\text{div } v) d(x,y,z) = \iint_{\partial M} v \cdot dS \qquad (25)$$

為驗證上述定理，設 M_{IV} 為帶有標準定向 (即右手性方向) 的單位球體，這是一個緊致流形，以下是這個立體的參數化形式：

$$\begin{aligned} \psi_{IV} &: [0,1] \times [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to M_{IV}; \\ \psi_{IV}(r,s,t) &= (x,y,z), \text{ 其中} x = r\cos s \cos t,\ y = r \sin s \cos t,\ z = r \sin t \qquad (26) \end{aligned}$$

下圖展示上述球體的坐標 (r,s,t)，這三個坐標上的單位向量 $\{e_r, e_s, e_t\}$ 呈右手性方向排佈：



考慮前面討論過的向量場 v_{II} (見 (16))。一方面，根據《數學示例：霍奇星與音樂同構》中有關 div 的定義 (即該網頁的 (25))，我們有

$$\text{div } v_{II}(x,y,z) = 1 \qquad (27)$$

為求 $\iiint_{M_{IV}} (\text{div } v_{II}) d(x,y,z)$，固然可以使用微積分中涉及變項變換的方法，但由於 div $v_{II} = 1$，這個積分實際等於單位球體的體積，因此可以應用球體體積的公式來直接求得

$$\iiint_{M_{IV}} (\text{div } v_{II}) d(x,y,z) = \frac{4}{3}\pi$$

另一方面，M_{IV} 的邊界是單位球面 (以下記作 ∂M_{IV})。當 M_{IV} 的定向是標準定向時，∂M_{IV} 的誘導定向也是標準定向 (即逆時針方向)。以下是帶有上述誘導定向的 ∂M_{IV} 的參數化形式：

$$\begin{aligned}\psi_V &: [0,2\pi]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\partial M_{IV};\\ \psi_V(s,t) &= (x,y,z),\ \text{其中}x=\cos s\cos t,\ y=\sin s\cos t,\ z=\sin t \qquad (28)\end{aligned}$$

由此利用《數學示例：微分形式的積分》中有關向量面積分的計算公式 (即該網頁的 (29))，可求得

$$\begin{aligned}\iint_{\partial M_{IV}} v_{II}\cdot dS &= \iint_{[0,2\pi]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}[-\sin s\cos t,\cos s\cos t,\sin t]^T\\ &\quad\cdot([-\sin s\cos t,\cos s\cos t,0]^T\times[-\cos s\sin t,-\sin s\sin t,\cos t]^T)d(s,t)\\ &= \frac{4}{3}\pi\end{aligned}$$

上述計算結果顯示 $\iiint_{M_{IV}}(\text{div } v_{II})d(x,y,z)=\iint_{\partial M_{IV}} v_{II}\cdot dS$，由此驗證了「定理 4」。

接著證明「定理 4」是「定理 1」的特例。一方面，根據 div 的定義，我們有

$$(\text{div } v)dx\wedge dy\wedge dz=\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz$$

讀者可自行驗證，根據 d、$\star$ 和 $\flat$ 的定義，上式等號右端等於 $d((\star\circ\flat)v)$，由此有

$$(\text{div } v)dx\wedge dy\wedge dz=d((\star\circ\flat)v)$$

由於「定理 4」中的 M 是位於 $\mathbb{R}^3$ 中而非嵌入到較高維空間中的立體，根據《數學示例：微分形式的積分》中的 (4)，有 $\iiint_M(\text{div } v)d(x,y,z)=\int_M(\text{div } v)dx\wedge dy\wedge dz$，由此應用上式，我們有

$$\iiint_M(\text{div } v)d(x,y,z)=\int_M d((\star\circ\flat)v) \qquad (29)$$

另一方面，根據《數學示例：微分形式的積分》中的「定理 2」，我們有

$$\iint_{\partial M} v\cdot dS=\int_{\partial M}(\star\circ\flat)v \qquad (30)$$

把 (29) 和 (30) 分別代入 (25) 等號左、右兩端，可得

$$\int_M d((\star\circ\flat)v)=\int_{\partial M}(\star\circ\flat)v$$

上式是把微分 2 形式 $(\star\circ\flat)v$ 代入 (1) 中 α 的結果，由此證得「定理 4」是「定理 1」的特例。

以上討論的例子都是有邊界的流形，但「定理 1」其實也適用於沒有邊界的流形。為證明這一點，須引入兩個概念。設 α 為微分 k 形式。若 $d\alpha=0$，我們說 α 是閉形式(closed form)。若存在微分 $k-1$ 形式 β 使得 $d\beta=\alpha$，我們便說 α 是恰當形式(exact form)。舉例說，以下微分 2 形式既是閉形式又是恰當形式：

$$\alpha_I(x,y,z)=2dx\wedge dy \qquad (31)$$

因為 $d\alpha_I=0$，並且有微分 1 形式 $\alpha_{II}(x,y,z)=-ydx+xdy+zdz$ 使得 $d\alpha_{II}=\alpha_I$。對於恰當形式，我們有以下重要定理。

定理 5：設 M 為 m 維閉合流形，α 為恰當微分 m 形式，則

$$\int_M \alpha=0 \qquad (32)$$

舉例說，前面討論過的單位球面 ∂M_{IV} (其參數化形式見 (28)) 是 2 維閉合流形，而 α_I 則是恰當微分 2 形式。讀者可自行驗證，運用《數學示例：微分流形的積分》中的 (7)，可求得

$$\begin{aligned}\int_{\partial M_{IV}}\alpha_I &= \int_{{\psi_V}^{-1}(\partial M_{IV})}(\psi_V)^*\alpha_I\\ &= \int_{[0,2\pi]\times\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]} 2\sin t\cos t ds\wedge dt\\ &= 0\end{aligned}$$

由此驗證了「定理 5」。

接著讓我們證明「定理 1」適用於沒有邊界的流形。設 M 為沒有邊界的 m 維流形 (即閉合流形)，α 為微分 $m-1$ 形式。一方面，根據恰當形式的定義，$d\alpha$ 必然是恰當微分 m 形式，由此根據「定理 5」，必有 $\int_M d\alpha=0$。另一方面，由於 M 沒有邊界，故有 $\partial M=\emptyset$，而且 $\emptyset$ 的定向必是誘導定向，故必有 $\int_{\partial M}\alpha=0$。綜合以上結果，我們有 $\int_M d\alpha=\int_{\partial M}\alpha$，即「定理 1」成立。

連結至數學專題
連結至周家發網頁