

數學示例：高斯曲率與平均曲率

我們在《數學示例：主曲率》中介紹了主曲率，這是某曲面 S 於 q 點處的最大和最小法曲率，能有效反映 S 於 q 點處的彎曲情況。不過，每點處 (除非是「臍點」) 一般都有兩個相異的主曲率。現在的問題是，能否把這兩個主曲率整合成一個曲率，以作為「曲面的曲率」？本文的主旨是介紹兩個這樣的曲率，這兩個曲率的共同點是它們都可由兩個主曲率定義。

第一個要介紹的曲面曲率稱為**高斯曲率**(Gaussian curvature)。設某曲面 S 具有以下坐標卡：

$$X : E \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; X(u_1, u_2) = (x(u_1, u_2), y(u_1, u_2), z(u_1, u_2)) \quad (1)$$

設 $q = X(u_1, u_2)$ 為 S 上一點，並且 $\kappa_M(u_1, u_2)$ 和 $\kappa_m(u_1, u_2)$ 分別為 S 於 q 點處的最大和最小法曲率 (即兩個主曲率)，那麼 S 於 q 點處的高斯曲率，以下記作 $K(u_1, u_2)$ ，可定義如下：

$$K(u_1, u_2) = \kappa_M(u_1, u_2) \times \kappa_m(u_1, u_2) \quad (2)$$

舉例說，考慮我們在《數學示例：主曲率》中討論過的 r 半徑球面，其坐標卡為 (下式等於上述網頁 (22) 中的 X_5)：

$$\begin{aligned} X_1 : \quad & (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^3; \\ X_1(u_1, u_2) = \quad & (r \cos u_1 \cos u_2, r \sin u_1 \cos u_2, r \sin u_2) \end{aligned} \quad (3)$$

我們在上述網頁中求得 $(\kappa_M)_1(u_1, u_2) = (\kappa_m)_1(u_1, u_2) = -\frac{1}{r}$ ，由此根據 (2)，可得

$$\begin{aligned} K_1(u_1, u_2) &= \left(-\frac{1}{r}\right) \times \left(-\frac{1}{r}\right) \\ &= \frac{1}{r^2} \end{aligned}$$

上述結果顯示， r 半徑球面於各點處的高斯曲率是常值，這符合我們對球面的直觀理解：球面上每一點處的彎曲程度都是相同的，因此在各點處有相

同的曲面曲率。請注意當球面的半徑是 1 時，其高斯曲率於各點處恆為 1，這是單位球面的特點。

根據 (2)，高斯曲率是兩個主曲率的乘積，而根據《數學示例：主曲率》，在計算主曲率時，要應用第一、第二基本形式係數 $g_{ij}(u_1, u_2)$ 、 $L_{ij}(u_1, u_2)$ 和韋因加爾滕矩陣 $W(u_1, u_2)$ 等概念，由此可以推知，應可用上述概念寫出高斯曲率的計算公式。事實上，可以證明以下計算公式：

$$K(u_1, u_2) = \frac{\det([L_{ij}(u_1, u_2)])}{\det([g_{ij}(u_1, u_2)])} = \det(W(u_1, u_2)) \quad (4)$$

以下提供若干個關鍵概念的計算公式 (以下公式等於上述網頁的 (5)、(6)、(7) 和 (14))：

$$N(u_1, u_2) = \frac{\frac{\partial X}{\partial u_1}(u_1, u_2) \times \frac{\partial X}{\partial u_2}(u_1, u_2)}{\left\| \frac{\partial X}{\partial u_1}(u_1, u_2) \times \frac{\partial X}{\partial u_2}(u_1, u_2) \right\|} \quad (5)$$

$$L_{ij}(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j}(u_1, u_2) \cdot N(u_1, u_2) \quad (6)$$

$$g_{ij}(u_1, u_2) = \frac{\partial X}{\partial u_i}(u_1, u_2) \cdot \frac{\partial X}{\partial u_j}(u_1, u_2) \quad (7)$$

$$W(u_1, u_2) = [g_{ij}(u_1, u_2)]^{-1} \times [L_{ij}(u_1, u_2)] \quad (8)$$

以 r 半徑球面為例，我們在上述網頁求得其韋因加爾滕矩陣如下：

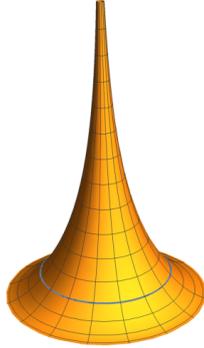
$$W_1(u_1, u_2) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} \end{bmatrix}$$

由此根據 (4) 的後半部，可得

$$\begin{aligned} K_1(u_1, u_2) &= \left(-\frac{1}{r}\right) \times \left(-\frac{1}{r}\right) - 0 \times 0 \\ &= \frac{1}{r^2} \end{aligned}$$

這與前面的計算結果吻合，讀者可自行驗證，使用 (4) 的前半部也可得到相同結果。

如前所述，球面的高斯曲率是正的常數。有趣的是，也有其高斯曲率為負常數的曲面，我們在《數學示例：曲面的參數化》中討論過的「偽球面」(pseudosphere) 便是這類曲面。這類曲面像球面那樣於每一點處有相同的彎曲程度，但其高斯曲率卻是負數，故稱「偽球面」。以下是偽球面的圖象：



偽球面的坐標卡為 (下式大致等於上述網頁 (15) 中的 X_{10}) :

$$\begin{aligned} X_2 : & \quad (0, 2\pi) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3; \\ X_2(u_1, u_2) = & \quad (\cos u_1 \operatorname{sech} u_2, \sin u_1 \operatorname{sech} u_2, u_2 - \tanh u_2) \quad (9) \end{aligned}$$

在計算偽球面的高斯曲率時, 要應用與雙曲函數有關的以下結果 :

$$\begin{aligned} \tanh^2 x + \operatorname{sech}^2 x &= 1 \\ \frac{d}{dx}(\tanh x) &= \operatorname{sech}^2 x \\ \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) &= -\tanh x \operatorname{sech} x \end{aligned}$$

讀者可自行驗證以下計算結果 :

$$\begin{aligned} [(g_{ij})_2(u_1, u_2)] &= \begin{bmatrix} \operatorname{sech}^2 u_2 & 0 \\ 0 & \tanh^2 u_2 \end{bmatrix} \\ [(L_{ij})_2(u_1, u_2)] &= \begin{bmatrix} -\tanh u_2 \operatorname{sech} u_2 & 0 \\ 0 & \tanh u_2 \operatorname{sech} u_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

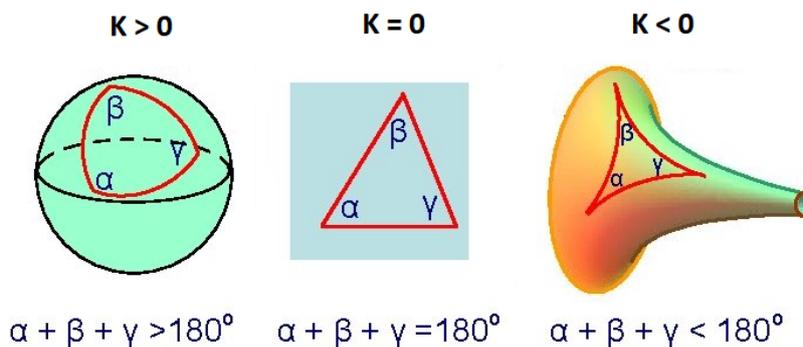
由此根據 (4), 可求得

$$\begin{aligned} K_2(u_1, u_2) &= \frac{(-\tanh u_2 \operatorname{sech} u_2)(\tanh u_2 \operatorname{sech} u_2) - (0)(0)}{(\operatorname{sech}^2 u_2)(\tanh^2 u_2) - (0)(0)} \\ &= -1 \end{aligned}$$

上述結果適用於偽球面上的所有點, 由此可知偽球面每一點處的高斯曲率都是 -1 。

球面和偽球面的重要性在於它們分別體現了「非歐幾里得幾何」(non-Euclidean geometry) 的兩個分支—「橢圓幾何」(elliptic geometry) 和「雙

曲幾何」(hyperbolic geometry) 的很多性質。這些性質跟傳統「歐幾里得幾何」(Euclidean geometry) 體現在平面上的性質有別，其中一種重要性質是「三角形內角和」，而上述三種幾何的差異又可歸結為球面、偽球面和平面的高斯曲率的差別，如下圖所示：



上面中圖展示平面的情況，平面的高斯曲率恆為 0，而平面上三角形的內角和恆等於 180° ；上面左圖展示球面的情況，球面的高斯曲率是大於 0 的常數，而球面上三角形的內角和大於 180° ；上面右圖展示偽球面的情況，偽球面的高斯曲率是小於 0 的常數，而偽球面上三角形的內角和小於 180° 。

上面提到平面的高斯曲率恆為 0，為證實這一點，以下引入平面的坐標卡 (下式大致等於《數學示例：曲面的參數化》(2) 中的 X_1)：

$$\begin{aligned}
 X_3 : & \quad (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3; \\
 X_3(u_1, u_2) = & \quad (a_1u_1 + b_1u_2, a_2u_1 + b_2u_2, a_3u_1 + b_3u_2) \quad (10)
 \end{aligned}$$

為求平面的高斯曲率，我們首先注意到上式的各個二階偏導數都是 $(0, 0, 0)$ ，由此從 (6) 可知，

$$[(L_{ij})_3(u_1, u_2)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

並可求得

$$\det([(L_{ij})_3(u_1, u_2)]) = 0 \quad (12)$$

另一方面，我們有以下定理。

定理 1：設 $X(u_1, u_2)$ 為某曲面的坐標卡，則

$$\left\| \frac{\partial X}{\partial u_1}(u_1, u_2) \times \frac{\partial X}{\partial u_2}(u_1, u_2) \right\|^2 = \det([(g_{ij})(u_1, u_2)])$$

由於 X_3 是坐標卡，它具有正則性，因此根據我們在《數學示例：曲面的參數化》的討論，必有

$$\frac{\partial X_3}{\partial u_1}(u_1, u_2) \times \frac{\partial X_3}{\partial u_2}(u_1, u_2) \neq (0, 0, 0)$$

由此根據上述定理，必有

$$\det([(g_{ij})_3(u_1, u_2)]) > 0 \quad (13)$$

綜合 (12) 和 (13)，從 (4) 可求得

$$K_3(u_1, u_2) = 0$$

有趣的是，除了平面外，還有一些其高斯曲率恆為 0 的曲面，在微分幾何中，這類曲面稱為**可展曲面**(developable surface)。直觀地看，可展曲面是指可拉伸(但不許摺疊)為平面的曲面，因此可展曲面可被看成平面概念的推廣。

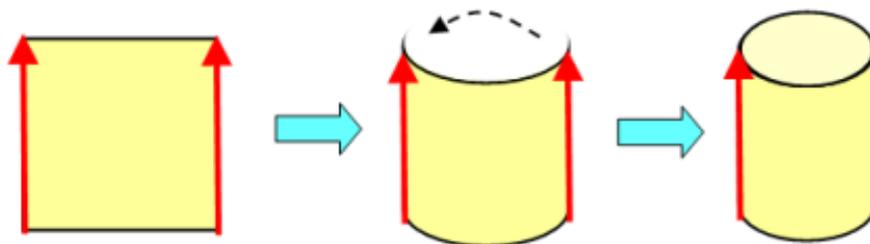
可以證明任何可展曲面都是直紋曲面(但反之不必然)，因此我們可以在直紋曲面中尋找可展曲面。根據我們在《數學示例：曲面的參數化》的討論，平面是一種直紋曲面，而根據上述定義，平面當然也是一種可展曲面。此外，圓柱面也是直紋曲面，以下是圓柱面的坐標卡(下式等於《數學示例：主曲率》(9)中的 X_1)：

$$X_4 : (-\pi, \pi) \times (0, h) \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad X_4(u_1, u_2) = (r \cos u_1, r \sin u_1, u_2) \quad (14)$$

根據上述網頁的計算結果， $(\kappa_M)_4(u_1, u_2) = 0$ 和 $(\kappa_m)_4(u_1, u_2) = -\frac{1}{r}$ 。由此根據 (2)，可得

$$K_4(u_1, u_2) = 0$$

因此圓柱面也是可展曲面。上述結果可用下圖來作直觀解釋：



上圖顯示，把一張矩形紙屈曲，並把其中兩邊黏合後，可以得到一個圓柱面。反過來看，把一個紙製圓柱面沿著圓柱面的高剪開後，可把它拉伸成

一張矩形紙，而上述屈曲和拉伸的過程都沒有造成摺疊。如果把上述矩形紙看成平面，那麼可以看到圓柱面是可展曲面。跟圓柱面不同，如果能把一張紙屈曲成一個球面，必會對那張紙造成摺疊。由此可見，球面不是可展曲面，而我們在前面已算出球面的高斯曲率不等於 0。

第二個要介紹的曲面曲率稱為**平均曲率**(mean curvature),以下記作 $H(u_1, u_2)$ 。顧名思義，平均曲率就是兩個主曲率的平均數，即

$$H(u_1, u_2) = \frac{1}{2}(\kappa_M(u_1, u_2) + \kappa_m(u_1, u_2)) \quad (15)$$

以前面討論過的圓柱面為例，根據上式，我們有

$$\begin{aligned} H_4(u_1, u_2) &= \frac{1}{2} \left(0 + \left(-\frac{1}{r} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{2r} \end{aligned}$$

如同高斯曲率的情況，平均曲率也有另一條計算公式 (為使下式較為簡潔，以下略去各個函數的論元)：

$$H = \frac{g_{11}L_{22} - 2g_{12}L_{12} + g_{22}L_{11}}{2 \times \det([g_{ij}])} = \frac{1}{2}\text{tr}(W) \quad (16)$$

在上式中， $\text{tr}([M_{ij}])$ 代表 2×2 矩陣 $[M_{ij}]$ 的「跡」(trace)，其定義是該矩陣主對角線上各項之和，即

$$\text{tr}([M_{ij}]) = M_{11} + M_{22} \quad (17)$$

仍以圓柱面為例，我們在《數學示例：主曲率》中求得其韋因加爾滕矩陣如下：

$$W_4(u_1, u_2) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由此根據 (16) 的後半部，可得

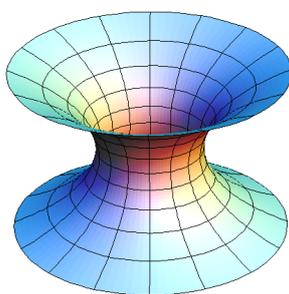
$$\begin{aligned} H_4(u_1, u_2) &= \frac{1}{2} \left(\left(-\frac{1}{r} \right) + 0 \right) \\ &= -\frac{1}{2r} \end{aligned}$$

這與前面的計算結果吻合，讀者可自行驗證，使用 (16) 的前半部也可得到相同結果。

在微分幾何中，平均曲率恆為 0 的曲面稱為極小曲面(minimal surface)，這類曲面在物理學上有重要應用，因為由肥皂泡形成的極薄皂膜就是極小曲面的實例。平面(見前面(10)的 X_3)就是一種極小曲面，這是因為根據(11)， X_3 的第二基本形式係數全是 0，因此(16)前半部的分子等於 0；而根據(13)，(16)前半部的分母不等於 0，綜合以上結果，可知

$$H_3(u_1, u_2) = 0$$

另一種極小曲面則是「懸鏈曲面」(catenoid)，這是由 x - z 平面上的「懸鏈線」(catenary)繞 z 軸旋轉一周後所形成的曲面，以下是其圖象：



以下是 x - z 平面上懸鏈線的參數化形式：

$$Y_5 : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3; Y_5(u_2) = \left(c \cosh \frac{u_2}{c}, 0, u_2 \right)$$

上式應用了基本雙曲函數 $\cosh x$ ，這個函數連同另一個基本雙曲函數 $\sinh x$ 可以定義如下：

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

由此根據《數學示例：曲面的參數化》中的(11)和(12)，可得懸鏈曲面的坐標卡如下：

$$\begin{aligned} X_5 : & (0, 2\pi) \times (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3; \\ X_5(u_1, u_2) = & \left(c \cos u_1 \cosh \frac{u_2}{c}, c \sin u_1 \cosh \frac{u_2}{c}, u_2 \right) \quad (18) \end{aligned}$$

接著計算上式的第一和第二基本形式係數，為此要應用與雙曲函數有關的以下結果：

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\ \frac{d}{dx}(\sinh x) &= \cosh x \\ \frac{d}{dx}(\cosh x) &= \sinh x \end{aligned}$$

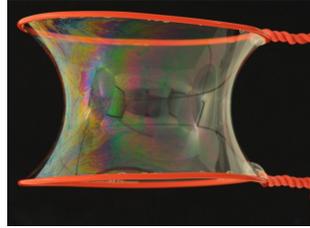
讀者可自行驗證以下計算結果：

$$[(g_{ij})_5(u_1, u_2)] = \begin{bmatrix} c^2 \cosh^2 \frac{u_2}{c} & 0 \\ 0 & \cosh^2 \frac{u_2}{c} \end{bmatrix} \quad [(L_{ij})_5(u_1, u_2)] = \begin{bmatrix} -c & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$$

由此根據 (16)，可求得

$$\begin{aligned} H_5(u_1, u_2) &= \frac{(c^2 \cosh^2 \frac{u_2}{c}) (\frac{1}{c}) - 2(0)(0) + (\cosh^2 \frac{u_2}{c}) (-c)}{2 \times ((c^2 \cosh^2 \frac{u_2}{c}) (\cosh^2 \frac{u_2}{c}) - (0)(0))} \\ &= 0 \end{aligned}$$

上述結果適用於懸鏈曲面上的所有點，由此可知懸鏈曲面每一點處的平均曲率都是 0，因此是極小曲面。下圖顯示由皂膜形成的懸鏈曲面，證實了前述極小曲面的物理性質：



在 (2) 和 (15)，我們提供了用主曲率求高斯曲率和平均曲率的公式。反過來，也可以用高斯曲率和平均曲率來求兩個主曲率，以下是有關公式：

$$\kappa_M(u_1, u_2) = H(u_1, u_2) + \sqrt{H(u_1, u_2)^2 - K(u_1, u_2)} \quad (19)$$

$$\kappa_m(u_1, u_2) = H(u_1, u_2) - \sqrt{H(u_1, u_2)^2 - K(u_1, u_2)} \quad (20)$$

以圓柱面 (見前面 (14) 的 X_4) 為例，我們在前面求得 $K_4(u_1, u_2) = 0$ 和 $H_4(u_1, u_2) = -\frac{1}{2r}$ ，由此根據上式，可求得

$$\begin{aligned} (\kappa_M)_4(u_1, u_2) &= -\frac{1}{2r} + \sqrt{\left(-\frac{1}{2r}\right)^2 - 0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\kappa_m)_4(u_1, u_2) &= -\frac{1}{2r} - \sqrt{\left(-\frac{1}{2r}\right)^2 - 0} \\ &= -\frac{1}{r} \end{aligned}$$

上述計算結果與前面提到的圓柱面的主曲率一致。

連結至數學專題
連結至周家發網頁