感受伽羅瓦：因子分解

本章將延續上一章的主旨，介紹整數 ($\mathbb{Z}$) 與有理係數多項式 ($\mathbb{Q}[x]$) 的一些共同性，本章將圍繞因子分解(factorization)[1]介紹這些共同性。此外，本章也會把眼界推廣到其他類別的多項式。

我們在上一章介紹了與整數有關的「整除」和「因數」等基本概念，以這些概念為基礎，可以把所有非零整數分為三大類：(i)單位(unit)[2]，是指有乘法逆元的整數，即 1 和 -1 (各以自身為乘法逆元)；(ii)不可約數(irreducible)，是指具有如下特點的非單位非零整數：如被寫成兩個整數的乘積，那麼這兩個整數必有一個是單位，例如 -5 如要寫成兩個整數的乘積，只能寫成 $1\times(-5)$ 或 $(-5)\times 1$ 或 $(-1)\times 5$ 或 $5\times(-1)$，不論哪一種寫法，都包含單位 1 或 -1，所以 -5 是不可約數；(iii)合數(composite)，是指既非單位又非不可約數的非零整數，例如 10 可以寫成 2×5，其中 2 和 5 都不是單位，所以 10 並非不可約數，由此可知 10 是既非單位又非不可約數的非零整數，即合數。

接著還要引入相伴(associate) 的概念，設 a 和 b 為整數，如有 $a=bu$，其中 u 是單位，則我們說 a 與 b 相伴。舉例說，由於有 $5=(-5)\times(-1)$(或者 $-5=5\times(-1)$)，可知 5 與 -5 相伴 (當然也可說 -5 與 5 相伴，此外還有 5 與 5 相伴和 -5 與 -5 相伴)。應用因數和相伴的概念，也可把不可約數定義為除了單位以及與自身相伴的整數以外沒有其他因數的非零整數，以 -5 為例，它的因數只有 1、-1、5 和 -5，其中 1 和 -1 是單位，5 和 -5 則是與 -5 相伴的整數，所以 -5 是不可約數。

看到這裡，有些讀者可能覺得這裡的「不可約數」其實就是把傳統定義擴大到負整數的「質數」。不過，在抽象代數學中，「質數」有另一個定義，設 p 為非單位非零整數，則 p 是質數(prime) 當且僅當若 $p\mid ab$，其中 a 和 b 是整數，則 $p\mid a$ 或 $p\mid b$。舉例說，10 不是質數，因為我們有 $10\mid(2\times 5)$，但 $10\nmid 2$ 並且 $10\nmid 5$。就整數而言，我們有以下定理。

[1]英語詞 factor 在不同情況下有不同譯法，整數的 factor 一般譯作「因數」，多項式的 factor 則一般譯作「因式」，本章採用「因子」以概括這兩種情況。

[2]請不要將「單位」(unit) 與上一章介紹的「單位元」(identity) 混淆。這兩者的中文譯名雖然很相似，但其英文名稱迥異。

定理 1：一個整數是不可約數當且僅當它是質數。

根據上述定理，在整數中，不可約數與質數是同一批數，所以在以下討論中，我們暫不區分這兩個概念，按傳統習慣把這兩種數都稱為「質數」。可是，日後當我們討論抽象的代數結構時，便要嚴格區分這兩個概念。

在數學上，正質數常被看成整數的「組件」(building block)，這是因為有以下定理。

定理 2 (整數唯一分解定理Unique Factorization Theorem for $\mathbb{Z}$)(又稱算術基本定理Fundamental Theorem of Arithmetic)：任何非單位非零整數均可被寫成一個單位與有限個正質數的乘積，而且如果撇除乘積內各數的排列次序不計，這個乘積是唯一的。

舉例說，-11011 便可以寫成 $(-1) \times 7 \times 11^2 \times 13$，其中 -1 是單位，7、11 和 13 則是正質數。

上述概念也適用於 $\mathbb{Q}[x]$ 的成員。具體地說，我們可以把 $\mathbb{Q}[x]$ 中的所有非零成員分為三大類：(i) 單位，由於在 $\mathbb{Q}[x]$ 中，所有並且只有非零有理常數多項式有乘法逆元 (例如 5 的乘法逆元是 $\frac{1}{5}$)，所以 $\mathbb{Q}[x]$ 中的單位包含所有非零有理常數多項式 (而非只 1 和 -1)；(ii) 不可約多項式，是指 $\mathbb{Q}[x]$ 中具有如下特點的非單位非零多項式：如被寫成 $\mathbb{Q}[x]$ 中兩個成員的乘積，那麼這兩個成員必有一個是單位，例如 $x^2 - 2$ 如要寫成 $\mathbb{Q}[x]$ 中兩個成員的乘積，只能寫成 $1 \times (x^2 - 2)$ 或 $\frac{1}{2}(2x^2 - 4)$ 或 $(-2)(-\frac{1}{2}x^2 + 1)$ 等等，不論哪一種寫法，都包含一個非零有理常數多項式 (即單位)，所以 $x^2 - 2$ 是 $\mathbb{Q}[x]$ 中的不可約多項式；(iii)可約多項式(reducible)，是指 $\mathbb{Q}[x]$ 中既非單位又非不可約多項式的非零成員，例如 $x^2 - 1$ 可以寫成 $(x + 1)(x - 1)$，其中 $x + 1$ 和 $x - 1$ 都不是單位，由此可知 $x^2 - 1$ 是 $\mathbb{Q}[x]$ 中的可約多項式。

跟整數的情況相似，也可以為 $\mathbb{Q}[x]$ 的成員定義「相伴」的概念，不過由於 $\mathbb{Q}[x]$ 有無窮多個單位，$\mathbb{Q}[x]$ 中任一成員的相伴多項式也有無窮多個。舉例說，$x^2 - 2$ 的相伴多項式便有 $2x^2 - 4$、$-\frac{1}{2}x^2 + 1$ 等等。同樣，我們也可以把不可約多項式定義為除了單位以及與自身相伴的多項式以外沒有其他因式的非零多項式，以 $x^2 - 2$ 為例，它在 $\mathbb{Q}[x]$ 中的因式只有有理常數多項式以及 $x^2 - 2$ 的相伴多項式，所以是 $\mathbb{Q}[x]$ 中的不可約多項式。

跟整數的情況相似，我們也有一個「質多項式」的概念，設 p 為 $\mathbb{Q}[x]$ 中的非單位非零成員，則 p 是質多項式當且僅當若 $p \mid ab$，其中 a 和 b 是 $\mathbb{Q}[x]$ 的成員，則 $p \mid a$ 或 $p \mid b$。同樣，就 $\mathbb{Q}[x]$ 而言，我們有以下定理。

定理 3：$\mathbb{Q}[x]$ 中的一個成員是不可約多項式當且僅當它是質多項式。

根據上述定理，在 $\mathbb{Q}[x]$ 中，不可約多項式與質多項式是同一批多項式，所以在以下討論中，我們按傳統習慣把這兩種多項式都稱為「不可約多項式」。

如前所述，在整數中，正質數扮演「組件」的角色；在 $\mathbb{Q}[x]$ 中，扮演「組件」角色的則是不可約首一多項式，因為我們有以下定理。

定理 4 (有理係數多項式唯一分解定理Unique Factorization Theorem for $\mathbb{Q}[x]$)：$\mathbb{Q}[x]$ 中任何非單位非零成員均可被寫成一個單位與有限個不可約首一多項式的乘積，而且如果撇除乘積內各多項式的排列次序不計，這個乘積是唯一的。

舉例說，$-6x^2+27x-30$ 可被因式分解為 $(2x-5)(-3x+6)$，為使這裡的兩個因式成為首一多項式，可以分別從這兩個因式抽出 2 和 -3 這兩個因子，分別得到 $2(x-\frac{5}{2})$ 和 $-3(x-2)$，由此可知 $-6x^2+27x-30$ 可被寫成 $-6(x-\frac{5}{2})(x-2)$，其中 -6 是單位，$x-\frac{5}{2}$ 和 $x-2$ 則是不可約首一多項式。

以上一直只討論有理係數多項式 (即 $\mathbb{Q}[x]$ 的成員)，但多項式也可以採用其他數系的成員作為其係數，例如整數系、實數系和複數系，以下把這三個數系分別記作 $\mathbb{Z}$、$\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$。此外，還有一種特殊數系。設 p 為某正質數，我們把 0、1、...、$p-1$ 構成一個數系，記作 $\mathbb{Z}_p$。請注意由於把任何整數 a 除以 p 後所得的餘數必然是 $\mathbb{Z}_p$ 的成員，我們可以為 $\mathbb{Z}$ 中的每個成員找到 $\mathbb{Z}_p$ 中的一個成員與 a 對應。舉例說，由於整數 6 在除以 5 後所得的餘數是 1，所以 6 在 $\mathbb{Z}_5$ 中的對應成員是 1。由此便可定義 $\mathbb{Z}_p$ 上的加法和乘法運算如下：設 a 和 b 為 $\mathbb{Z}_p$ 的成員，則 $a+b$ 和 $a\times b$ 分別等於 a 和 b 在通常整數加法和乘法下所得結果在 $\mathbb{Z}_p$ 中的對應成員。舉例說，設 $p=5$，那麼由於 2 和 3 在通常整數加法和乘法下所得的結果分別是 5 和 6，而 5 和 6 在 $\mathbb{Z}_5$ 中的對應成員分別是 0 和 1,因此在 $\mathbb{Z}_5$ 上我們有 $2+3=0$ 和 $2\times 3=1$[3]。

我們把採用上述各數系的成員作為係數的多項式的集合分別記作 $\mathbb{Z}[x]$、$\mathbb{R}[x]$、$\mathbb{C}[x]$ 和 $\mathbb{Z}_p[x]$。容易驗證上述四類多項式像 $\mathbb{Q}[x]$ 的成員那樣，滿足《感受伽羅瓦：整數與多項式》中列出的整數運算的特性 (i) 至 (viii)，而前述的「單位」、「不可約多項式」、「可約多項式」、「相伴」、「質多項式」等概念也同樣適用於上述四類多項式。此外，這四類多項式都像 $\mathbb{Q}[x]$ 的成員那樣，滿足「定理 3」(須把定理中的 $\mathbb{Q}[x]$ 改為 $\mathbb{Z}[x]$、$\mathbb{R}[x]$、$\mathbb{C}[x]$ 或 $\mathbb{Z}_p[x]$)。

不過，$\mathbb{Z}[x]$ 與其餘三類多項式存在一個重要區別，在 $\mathbb{Z}$ 中只有 1 和 -1 有

[3]上述定義其實涉及「模 p 同餘」的概念，以後的章節會詳細介紹「模 p 同餘」。

乘法逆元，因此 $\mathbb{Z}[x]$ 的單位也只包含 1 和 -1 這兩個整常數多項式。可是，$\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{Z}_p$ 的每個非零成員都有乘法逆元，例如在 $\mathbb{R}$ 中，$\sqrt{2}$ 的乘法逆元是 $\frac{1}{\sqrt{2}}$；在 $\mathbb{C}$ 中，i 的乘法逆元是 $-i$；在 $\mathbb{Z}_5$ 中，2 的乘法逆元是 3 等[4]。正由於這一點，$\mathbb{R}[x]$、$\mathbb{C}[x]$ 和 $\mathbb{Z}_p[x]$ 中的單位分別包含所有實常數多項式、複常數多項式和 $\mathbb{Z}_p$ 常數多項式。

上述差異導致 $\mathbb{Z}[x]$ 與其餘三類多項式在唯一分解定理上存在一些差異。由於 $\mathbb{R}[x]$、$\mathbb{C}[x]$ 和 $\mathbb{Z}_p[x]$ 的單位包含所有常數多項式，這三類多項式像 $\mathbb{Q}[x]$ 那樣，以不可約首一多項式作為因式分解的「組件」。另一方面，由於 $\mathbb{Z}[x]$ 的單位只包含 1 和 -1，$\mathbb{Z}[x]$ 中的不可約多項式不一定都能改寫成首一多項式。舉例說，在 $\mathbb{Z}[x]$ 中，不可約多項式 $-2x+1$ 便無法改寫成首一多項式。但我們可以退而求其次，以最高冪次項的係數為正整數的不可約多項式作為 $\mathbb{Z}[x]$ 因式分解的「組件」。舉例說，$-6x^2+27x-30$ 可被因式分解為 $(2x-5)(-3x+6)$，其中 $-3x+6$ 不符合我們對「組件」的要求，為此我們可以從這個因式抽出 -1，得到 $(-1)(3x-6)$。由此可知 $-6x^2+27x-30$ 可被寫成 $(-1)(2x-5)(3x-6)$，其中 -1 是單位，$2x-5$ 和 $3x-6$ 則是最高冪次項的係數為正整數的不可約多項式。

接下來對各類多項式的「可約性」作更深入的討論。首先必須指出，某些多項式雖然可以同時被看成多個類別的多項式，但它們的可約性在不同類別下可以各不相同。舉例說，x^2+1 在 $\mathbb{Z}[x]$、$\mathbb{Q}[x]$ 和 $\mathbb{R}[x]$ 下都是不可約多項式，但在 $\mathbb{C}[x]$ 和 $\mathbb{Z}_5[x]$ 下卻是可約多項式，這是因為 x^2+1 在 $\mathbb{C}[x]$ 下可以寫成 $(x+i)(x-i)$，而在 $\mathbb{Z}_5[x]$ 下則可以寫成 $(x+2)(x+3)$，因為在普通加法和乘法運算下，$(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$，而後者在 $\mathbb{Z}_5[x]$ 下等於 x^2+1。

另外又如 $2x+4$ 在 $\mathbb{Q}[x]$、$\mathbb{R}[x]$、$\mathbb{C}[x]$ 和 $\mathbb{Z}_5[x]$ 下都是不可約多項式 (儘管不是不可約首一多項式)，但在 $\mathbb{Z}[x]$ 下卻是可約多項式。這是因為 $2x+4$ 可以寫成 $2(x+2)$，其中常數多項式 2 在 $\mathbb{Q}[x]$、$\mathbb{R}[x]$、$\mathbb{C}[x]$ 和 $\mathbb{Z}_5[x]$ 下都是單位，但在 $\mathbb{Z}[x]$ 下卻並非單位。換句話說，$2x+4$ 只有在 $\mathbb{Z}[x]$ 下才能被分解為兩個非單位的乘積，從而滿足可約多項式的定義。上述例子說明，在討論某個多項式的可約性時，必須說清楚該多項式所屬的類別。

接著介紹一些判斷多項式可約性的方法，為方便討論，以下把 $\mathbb{Z}$、$\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{Z}_p$) 統一記作 J。在上一章我們曾指出在抽象代數學下，多項式並不總被看成函數，但在討論某些問題時，把多項式視為函數是有益的。具

[4]可以證明，當 p 是任意正整數時，$\mathbb{Z}_p$ 的成員 a 有乘法逆元當且僅當 a 與 p 互質。由於所有小於正質數 p 的正整數都與 p 互質，所以當 p 是正質數時，$\mathbb{Z}_p$ 的每個成員都有乘法逆元。反過來看，當 p 不是正質數時，並非 $\mathbb{Z}_p$ 的每個成員都有乘法逆元，例如在 $\mathbb{Z}_4$ 中，2 便沒有乘法逆元，因為 2 並不與 4 互質。

體地說，給定 $J[x]$ 中的多項式

$$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

可以把 f 看成一個把 J 映射到 J 的函數，其中 x 可被看成變項。對於任何 $c \in J$，我們用 $f(c)$ 表示 f 在 c 下的值(value)，並且

$$f(c) = a_0 + a_1(c) + a_2(c^2) + \cdots + a_{n-1}(c^{n-1}) + a_n(c^n)$$

如有 $r \in J$ 使得 $f(r) = 0$，我們便說 r 是 f 的根(root)。

定理 5 (因式定理Factor Theorem)：設 $f \in J[x]$ 並且 $r \in J$，則 r 是 f 的根當且僅當 $x - r$ 是 f 的因式。

上述定理告訴我們，多項式的根與一次因式存在一一對應關係。利用此定理，可以在某些情況下判斷某些多項式的可約性。在 $\mathbb{C}[x]$ 下，進行這種判斷尤為簡單，因為我們有以下定理。

定理 6 (代數學基本定理Fundamental Theorem of Algebra)：設 $f \in \mathbb{C}[x]$ 並且 $\deg(f) = n \geq 1$，則 f 共有 n 個根 (任何 k 重根均當作 k 個根計算)。

把上述定理與「定理 5」結合，便可得出以下結論：$\mathbb{C}[x]$ 中任何 n 次多項式都可寫成 n 個一次多項式的乘積，因此在 $\mathbb{C}[x]$ 中，任何 n 次多項式 $(n > 1)$ 都是可約多項式，而任何一次多項式都是不可約多項式。舉例說，設有以下四次多項式：

$$f_1 = 3x^4 + 12x^3 + 15x^2 + 12x + 12$$

讀者可自行驗證，上述多項式共有四個根：i 和 $-i$ 這一對一重根以及 -2 這個二重根 (請注意上式可被 $(x + 2)^2$ 整除)。上式可以因式分解為

$$f_1 = 3(x - i)(x + i)(x + 2)^2$$

請注意 f_1 的因式除了 $x - i$、$x + i$ 和 $x + 2$ 這三個不可約一次多項式外，還有 3 這個單位。

上述例子顯示，對多項式求根，只能等到該多項式的一次因式，未必能得到所有因式，其他類別的多項式尤其如此。舉例說，如把上面的 f_1 看成 $\mathbb{R}[x]$ 的成員，那麼 f_1 只有 -2 這個二重實數根，而 f_1 的因式分解結果是

$$f_1 = 3(x^2 + 1)(x + 2)^2$$

在上述結果中，只有 $x + 2$ 是 f_1 的不可約一次因式，這個因式對應著 f_1 的唯一一個 (二重) 實數根；3 和 $x^2 + 1$ 則分別是 f_1 的單位和不可約二次因

式，它們並不對應 f_1 的實數根。

在某些特定情況下，我們也可以運用「定理 5」判斷多項式的可約性，現以 $\mathbb{Z}_5[x]$ 中的下列三次多項式為例說明這一點：

$$f_2 = 3x^3 + 4x + 4$$

由於 $\mathbb{Z}_5$ 只有五個元素 0、1、2、3 和 4，我們可以把這五個元素逐一代入 f_2，得到

$$f_2(0) = 4, f_2(1) = 1, f_2(2) = 1, f_2(3) = 2, f_2(4) = 2$$

由於沒有一個值是 0，可知 $\mathbb{Z}_5$ 沒有一個元素是 f_2 的根，由此根據「定理 5」，f_2 沒有任何一次因式 (即形如 $x - r$ 的因式)。f_2 也沒有任何二次因式，因為如果 f_2 有二次因式 g，那麼 $f_2 \div g$ 就必然是 f_2 的一次因式，違反上面的結論。f_2 是否有三次因式？當然有，但 f_2 的每個三次因式都必然與 f_2 相伴，例如 $x^3 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$ 是 f_2 的三次因式，這個因式與 f_2 相伴，因為我們有 $f_2 = 3(x^3 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{3})$，其中 3 是 $\mathbb{Z}_5[x]$ 中的單位。總括以上各點，可知 f_2 在 $\mathbb{Z}_5[x]$ 下是不可約多項式。

$\mathbb{Z}_p[x]$ 成員的可約性與 $\mathbb{Z}[x]$ 成員的可約性存在一定的對應關係，這是因為我們有以下定理。

定理 7：設 $f \in \mathbb{Z}[x]$ 並且 f 的最高冪次項的係數不被 p 整除，我們用 f^* 代表把 f 中各係數轉化為在 $\mathbb{Z}_p$ 下的對應成員的多項式。如果 f 可約並且 $f = gh$，則 f^* 也可約並且 $f^* = g^*h^*$。反過來，如果 f^* 不可約，則 f 也不可約。

舉例說，在 $\mathbb{Z}[x]$ 下，

$$f_3 = x^2 - 19x - 7$$

是可約多項式，並且有 $f_3 = (2x - 7)(3x + 1)$，那麼由於 f_3 的最高冪次項的係數 1 不被 5 整除，根據上述定理，我們知道在 $\mathbb{Z}_5[x]$ 下，

$$f_3{}^* = x^2 + x + 3$$

也是可約多項式，並且 $f_3{}^* = (2x + 3)(3x + 1)$。

另外，設有 $\mathbb{Z}[x]$ 下的多項式

$$f_4 = 8x^3 - 6x - 1$$

由於 f_4 的最高冪次項的係數 8 不被 5 整除，我們可以把 f_4 轉化為 $\mathbb{Z}_5[x]$ 下的多項式

$$f_4{}^* = 3x^3 + 4x + 4$$

但 $f_4{}^*$ 等於上述的 f_2，而我們在上面已證明了 f_2 在 $\mathbb{Z}_5[x]$ 下不可約，由此根據上述定理，可知 f_4 在 $\mathbb{Z}[x]$ 下也不可約。

上述定理的要旨是借助 $\mathbb{Z}_p[x]$ 下 f^* 的不可約性以推導 $\mathbb{Z}[x]$ 下 f 的不可約性，接下來介紹一個可直接推導 $\mathbb{Z}[x]$ 下 f 的不可約性的定理。

定理 8 (艾森斯坦判別法Eisenstein Criterion)：設 $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$，並且存在一個質數 p 使得

(i) $p \nmid a_n$

(ii) $p \mid a_i$ $(i = 0, \cdots, n-1)$

(iii) $p^2 \nmid a_0$

則 f 不可約。

舉例說，設有多項式

$$f_5 = x^n - p$$

其中 p 是質數，n 是正整數，那麼由於 $p \nmid 1$、$p \mid -p$ 並且 $p^2 \nmid -p$，根據上述定理，可知 f_5 不可約。

接著討論 $\mathbb{Q}[x]$ 下成員的可約性，這裡只討論 $\mathbb{Q}[x]$ 中以整數作為係數，但容許分解為有理係數因式的多項式，首先介紹以下定理。

定理 9：設 $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$(請注意 f 也可看成 $\mathbb{Q}[x]$ 的成員)，並且 $\frac{a}{b}$ 是 f 的有理數根 (其中 $a, b \in \mathbb{Z}$，$b \neq 0$ 並且 $\gcd(a, b) = 1$)，則 $a \mid a_0$ 並且 $b \mid a_n$。

上述定理提供了有理數 $\frac{a}{b}$ 作為整係數多項式的根的必要條件。由於所有整數都是分母為 1 的有理數，上述定理其實也提供了整數 $a\,(= \frac{a}{1})$ 作為整係數多項式的根的必要條件。舉例說，考慮以下三次多項式：

$$f_6 = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$$

根據上述定理，$\frac{a}{b}$ 是 f_6 的根僅當 $a \mid 6$ 並且 $b \mid 2$，因此 f_6 的可能有理根包括 ±1、±2、±3、±6、$\pm\frac{1}{2}$ 和 $\pm\frac{3}{2}$。把上述有理數逐一代入 f_6，容易求得 -2、3 和 $\frac{1}{2}$ 是 f_6 的根。由此可得 f_6 在 $\mathbb{Q}[x]$ 下的因式分解結果如下：

$$f_6 = 2(x+2)(x-3)(x-\frac{1}{2})$$

此外，還有以下定理。

定理 10 (高斯定理Gauss's Theorem)：設 $f \in \mathbb{Z}[x]$(請注意 f 也可看成 $\mathbb{Q}[x]$ 的成員)，如果 f 可以因式分解為 gh，其中 $g, h \in \mathbb{Q}[x]$，則 f 也可因式分解為 $g'h'$，其中 $g', h' \in \mathbb{Z}[x]$，使得 $\deg(g) = \deg(g')$ 並且 $\deg(h) = \deg(h')$。反過來，如果 f 在 $\mathbb{Z}[x]$ 下不可約，則 f 在 $\mathbb{Q}[x]$ 下也不可約。

以前述的 f_6 為例，我們在上面寫出了 f_6 在 $\mathbb{Q}[x]$ 下的因式分解結果，現在可以把這個結果中的 $2(x+2)(x-3)\,(=2x^2-2x-12)$ 和 $x-\frac{1}{2}$ 分別看成上述定理中的 g 和 h。容易看到如把 2 與 $x-\frac{1}{2}$ 相乘，可得到整係數因式 $2x-1$，因此 f_6 在 $\mathbb{Z}[x]$ 下的因式分解結果是

$$f_6 = (x+2)(x-3)(2x-1)$$

其中 $(x+2)(x-3)\,(=x^2-x-6)$ 和 $2x-1$ 可被分別看成上述定理中的 g' 和 h'。

另外，我們在前面曾證明 f_4 和 f_5 在 $\mathbb{Z}[x]$ 下不可約，由此根據「定理 10」，可知這兩個多項式在 $\mathbb{Q}[x]$ 下也不可約。

連結至數學專題
連結至周家發網頁