感受伽羅瓦：根與係數的關係

本章介紹一種求多項式方程根式解的方法，設有以下一般二次多項式方程 (其中 $a_2 \neq 0$)：

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \qquad (1)$$

在上述方程中，給定的是係數(coefficient) a_2、a_1 和 a_0，而我們要求的是這個方程的根(root，以下把多項式方程的「解」稱為「根」)，並把這些根表示成這些係數的函數，因此求解上述方程的目標就是找出方程的根與係數的關係。為方便找出這種關係，首先把上式除以 a_2，從而得到下式：

$$x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_0}{a_2} = 0 \qquad (2)$$

另一方面，假設上述方程的兩個 (複數) 根是 x_1 和 x_2，那麼上述方程也可以寫成 (在下式中，s_1 和 s_2 是上一章介紹的基本對稱多項式)：

$$\begin{aligned} (x - x_1)(x - x_2) &= 0 \\ x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 &= 0 \\ x^2 - s_1x + +s_2 &= 0 \qquad (3) \end{aligned}$$

把 (2) 和 (3) 中的係數加以比較，可得到以下關係：

$$\begin{cases} s_1(= x_1 + x_2) = -\frac{a_1}{a_2} \\ s_2(= x_1x_2) = \frac{a_0}{a_2} \end{cases} \qquad (4)$$

上述關係可看成一組聯立方程，可是僅憑上述包含基本對稱多項式的方程，無法簡單解出 x_1 和 x_2。不過，如果能夠找出容易解出 x_1 和 x_2 的數式，並設法建立這些數式與基本對稱多項式的聯繫，便能利用上式求解。為此，可以設定以下數式：

$$\begin{cases} \alpha_1 = x_1 + x_2 \\ \alpha_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

請注意從以上兩式容易解得 x_1 和 x_2 如下：

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \qquad (5) \\ x_2 &= \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \qquad (6) \end{aligned}$$

接下來要設法建立 α_1 和 α_2 與基本對稱多項式 s_1 和 s_2 的聯繫，首先容易看到

$$\alpha_1 = s_1 \qquad (7)$$

其次應看到 ${\alpha_2}^2$ 是對稱多項式。由此根據《感受伽羅瓦：排列與對稱多項式》中的「對稱多項式基本定理」(即「定理 1」)，可以把 ${\alpha_2}^2$ 表示成以 s_1 和 s_2 作為變項的多項式，事實上，容易求得

$${\alpha_2}^2 = {s_1}^2 - 4s_2 \qquad (8)$$

利用 (7)、(8) 和 (4)，可以把 (5) 和 (6) 改寫如下：

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{s_1 + \sqrt{{s_1}^2 - 4s_2}}{2} \\ &= \frac{-a_1 + \sqrt{{a_1}^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} \\ x_2 &= \frac{s_1 - \sqrt{{s_1}^2 - 4s_2}}{2} \\ &= \frac{-a_1 - \sqrt{{a_1}^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} \end{aligned}$$

以上就是二次方程 (1) 的根式解，跟我們在中學所學習的完全相同。

接著考慮以下一般三次方程 (其中 $a_3 \neq 0$)：

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \qquad (9)$$

為簡化求解過程，我們先對 (9) 進行前面各章介紹的契爾恩豪斯變換，即把全式除以 a_3，並把 $x = y - \frac{a_2}{3a_3}$ 代入，從而得到：

$$y^3 + Py + Q = 0 \qquad (10)$$

類似二次方程的情況，我們可以把上述方程的三個根記作 y_1、y_2 和 y_3，並把上述方程寫成 $(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3) = 0$ 的形式，然後比較係數，從而寫出這三個根與上述方程係數的關係如下：

$$\begin{cases} s_1(= y_1 + y_2 + y_3) = 0 \\ s_2(= y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3) = P \\ s_3(= y_1y_2y_3) = -Q \end{cases} \qquad (11)$$

接下來要找出容易解出 y_1、y_2 和 y_3 且能與基本對稱多項式建立聯繫的數式，數學家發現以下數式符合我們的需要 (在下式中，ω_3 是 1 的主幅角為

$\frac{2\pi}{3}$ 的立方根，並且根據《感受伽羅瓦：二次方程與複數》中的「定理 2」，有 $1+\omega_3+{\omega_3}^2=0$)：

$$\begin{cases} 0 = y_1+y_2+y_3 \\ \beta_1 = y_1+\omega_3 y_2+{\omega_3}^2 y_3 \\ \beta_2 = y_1+{\omega_3}^2 y_2+\omega_3 y_3 \end{cases}$$

請注意從以上三式容易解得 y_1、y_2 和 y_3 如下：

$$y_1 = \frac{\beta_1+\beta_2}{3} \qquad (12)$$

$$y_2 = \frac{{\omega_3}^2\beta_1+\omega_3\beta_2}{3} \qquad (13)$$

$$y_3 = \frac{\omega_3\beta_1+{\omega_3}^2\beta_2}{3} \qquad (14)$$

接下來要設法建立 β_1 和 β_2 與基本對稱多項式 s_1、s_2 和 s_3 的聯繫，首先應看到 ${\beta_1}^3+{\beta_2}^3$ 和 $\beta_1\beta_2$ 是對稱多項式。由此根據「對稱多項式基本定理」，可以把這兩個對稱多項式表示成以 s_1、s_2 和 s_3 作為變項的多項式，事實上，利用《感受伽羅瓦：排列與對稱多項式》中介紹的方法，可以求得[1]：

$${\beta_1}^3+{\beta_2}^3 = 2{s_1}^3-9s_1s_2+27s_3 \qquad (15)$$

$$\beta_1\beta_2 = {s_1}^2-3s_2 \qquad (16)$$

以上兩式並不直接提供 β_1 和 β_2 與基本對稱多項式的聯繫，但請注意 ${\beta_1}^3$ 和 ${\beta_2}^3$ 可被看成二次方程 $z^2-({\beta_1}^3+{\beta_2}^3)z+{\beta_1}^3{\beta_2}^3=0$ 的根，因此利用 (15)、(16) 和 (11)，可以寫出一個以 P 和 Q 的組合為係數的二次方程如下：

$$\begin{aligned} z^2-({\beta_1}^3+{\beta_2}^3)z+{\beta_1}^3{\beta_2}^3 &= 0 \\ z^2-(2{s_1}^3-9s_1s_2+27s_3)z+({s_1}^2-3s_2)^3 &= 0 \\ z^2-(2(0)^3-9(0)(P)+27(-Q))z+((0)^2-3P)^3 &= 0 \\ z^2+27Qz-27P^3 &= 0 \qquad (17) \end{aligned}$$

上述方程是三次方程 (10) 的二次預解式[2]，它的兩個根就是 ${\beta_1}^3$ 和 ${\beta_2}^3$，對這兩個根開立方可得到 β_1 和 β_2，將此結果代入到 (12) － (14)，可求得經化簡的三次方程 (10) 的根式解。最後利用前述的代入 $x=y-\frac{a_2}{3a_3}$，便可得到原來三次方程 (9) 的根式解。

[1]請注意以下的 ${\beta_1}^3+{\beta_2}^3$ 其實就是《感受伽羅瓦：排列與對稱多項式》中的 P_1，此一計算結果可在該網頁中找到。

[2]請注意如用 $27u$ 代入 (17) 中的變項 z，然後把全式除以 27^2，便可得到《感受伽羅瓦：三次方程的根式解》中的「二次預解式」(即該網頁的公式 (5))。

接著考慮以下一般四次方程 (其中 $a_4 \neq 0$)：

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \qquad (18)$$

為簡化求解過程，我們先對 (18) 進行契爾恩豪斯變換，即把全式除以 a_4，並把 $x = y - \frac{a_3}{4a_4}$ 代入，從而得到：

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 \qquad (19)$$

類似二次方程的情況，我們把上述方程的四個根記作 y_1、y_2、y_3 和 y_4，並把上述方程寫成 $(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)(y-y_4) = 0$ 的形式，然後比較係數，從而寫出這四個根與上述方程係數的關係如下：

$$\begin{cases} s_1(= y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 0 \\ s_2(= y_1y_2 + y_1y_3 + y_1y_4 + y_2y_3 + y_2y_4 + y_3y_4) = p \\ s_3(= y_1y_2y_3 + y_1y_2y_4 + y_1y_3y_4 + y_2y_3y_4) = -q \\ s_4(= y_1y_2y_3y_4) = r \end{cases} \qquad (20)$$

接下來要找出容易解出 y_1、y_2、y_3 和 y_4 且能與基本對稱多項式建立聯繫的數式，數學家發現以下數式符合我們的需要：

$$\begin{cases} 0 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \\ \gamma_1 = (y_1 + y_2)(y_3 + y_4) \\ \gamma_2 = (y_1 + y_3)(y_2 + y_4) \\ \gamma_3 = (y_1 + y_4)(y_2 + y_3) \end{cases}$$

利用上面第一和第二式,可以得到 $\gamma_1 = -(y_1+y_2)^2$,由此可得 $y_1+y_2 = \sqrt{-\gamma_1}$。類似地，也可求得 $y_3 + y_4 = -\sqrt{-\gamma_1}$、$y_1 + y_3 = \sqrt{-\gamma_2}$、$y_2 + y_4 = -\sqrt{-\gamma_2}$、$y_1 + y_4 = \sqrt{-\gamma_3}$、$y_2 + y_3 = -\sqrt{-\gamma_3}$。利用這些算式以及 $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$，不難解得

$$y_1 = \frac{\sqrt{-\gamma_1} + \sqrt{-\gamma_2} + \sqrt{-\gamma_3}}{2} \qquad (21)$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{-\gamma_1} - \sqrt{-\gamma_2} - \sqrt{-\gamma_3}}{2} \qquad (22)$$

$$y_3 = \frac{-\sqrt{-\gamma_1} + \sqrt{-\gamma_2} - \sqrt{-\gamma_3}}{2} \qquad (23)$$

$$y_4 = \frac{-\sqrt{-\gamma_1} - \sqrt{-\gamma_2} + \sqrt{-\gamma_3}}{2} \qquad (24)$$

接下來要設法建立 γ_1、γ_2 和 γ_3 與基本對稱多項式 s_1、s_2、s_3 和 s_4 的聯繫，首先應看到 $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$、$\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_3 + \gamma_2\gamma_3$ 和 $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ 是對稱多項式。由此

根據「對稱多項式基本定理」，可以把這三個對稱多項式表示成以 s_1、s_2、s_3 和 s_4 作為變項的多項式，事實上，可以求得[3]：

$$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 = 2s_2 \qquad (25)$$
$$\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\gamma_3+\gamma_2\gamma_3 = {s_2}^2+s_1s_3-4s_4 \qquad (26)$$
$$\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = s_1s_2s_3-{s_1}^2s_4-{s_3}^2 \qquad (27)$$

以上三式並不直接提供 γ_1、γ_2 和 γ_3 與基本對稱多項式的聯繫，但請注意 γ_1、γ_2 和 γ_3 可被看成三次方程 $z^3-(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)z^2+(\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\gamma_3+\gamma_2\gamma_3)z-(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)=0$ 的根，因此利用 (25)、(26)、(27) 和 (20)，可以寫出一個以 p、q 和 r 的組合為係數的三次方程如下：

$$\begin{aligned}
z^3-(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)z^2+(\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\gamma_3+\gamma_2\gamma_3)z-(\gamma_1\gamma_2\gamma_3) &= 0\\
z^3-(2s_2)z^2+({s_2}^2+s_1s_3-4s_4)z-(s_1s_2s_3-{s_1}^2s_4-{s_3}^2) &= 0\\
z^3-(2p)z^2+(p^2+(0)(-q)-4r)z-((0)(p)(-q)-(0)^2(r)-(-q)^2) &= 0\\
z^3-2pz^2+(p^2-4r)z+q^2 &= 0 \qquad (28)
\end{aligned}$$

上述方程是四次方程 (19) 的三次預解式[4]，它的三個根就是 γ_1、γ_2 和 γ_3，將此結果代入到 (21) － (24)，可求得經化簡的四次方程 (19) 的根式解。最後利用前述的代入 $x=y-\frac{a_3}{4a_4}$，便可得到原來四次方程 (18) 的根式解。

從以上討論可見，要找出容易解出三次或四次方程的根且能與基本對稱多項式建立聯繫的數式，已不是簡單的事，對於五次或更高次方程而言，上述方法就更是無能為力。以一般五次方程為例，根據數學家的實踐，運用上述方法充其量只能找到一個「六次預解式」，但由於六次方程比五次方程更難求解，這無助求一般五次方程的根式解。因此伽羅瓦理論的要旨不是求五次或更高次方程的根式解，而是解釋為何這些方程一般沒有根式解，儘管個別方程 (例如 $x^5-1=0$) 存在根式解。

接著讓我們用上述方法再次求解以下在《感受伽羅瓦：四次方程的根式解》中處理過的四次方程：

$$16x^4+32x^3-88x^2+24x-75=0 \qquad (29)$$

以下將沿用上述網頁的一些計算結果，經契爾恩豪斯變換 (這裡要代入 $x=y-\frac{1}{2}$) 後，可得到

$$\begin{aligned}
p &= -7\\
q &= 8\\
r &= -7
\end{aligned}$$

[3]請注意以下的 $\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\gamma_3+\gamma_2\gamma_3$ 其實就是《感受伽羅瓦：排列與對稱多項式》中的 P_2，此一計算結果可在該網頁中找到。

[4]請注意如用 $-z$ 代入 (28) 中的變項 z，然後把全式乘以 -1，便可得到《感受伽羅瓦：四次方程的根式解》中的「三次預解式」(即該網頁的公式 (14))。

即 (29) 可化簡為

$$y^4-7y^2+8y-7=0 \qquad (30)$$

把以上的 p、q、r 代入 (28)，可得以下三次預解式：

$$\begin{aligned} z^3-2(-7)z^2+((-7)^2-(4)(-7))z+8^2 &= 0 \\ z^3+14z^2+77z+64 &= 0 \qquad (31) \end{aligned}$$

接下來我們用上述方法求解上述三次方程。經契爾恩豪斯變換 (這裡要代入 $z=u-\frac{14}{3}$) 後，可得到[5]：

$$\begin{aligned} P &= \frac{35}{3} \\ Q &= -\frac{2486}{27} \end{aligned}$$

即 (31) 可化簡為

$$u^3+\frac{35}{3}u-\frac{2486}{27}=0 \qquad (32)$$

把以上的 P、Q 代入 (17)，可得以下二次預解式 (以下把二次預解式的變項改為 v)：

$$\begin{aligned} v^2+(27)\left(-\frac{2486}{27}\right)v-(27)\left(\frac{35}{3}\right)^3 &= 0 \\ v^2-2486v-42875 &= 0 \end{aligned}$$

如前所述，接下來我們求解上述二次預解式，並對所得的兩個根開立方，從而得到 β_1 和 β_2，即

$$\begin{aligned} \beta_{1,2} &= \sqrt[3]{\frac{-(-2486)\pm\sqrt{(-2486)^2-4(1)(-42875)}}{2\times 1}} \\ &= \sqrt[3]{1243\pm 234\sqrt{29}} \end{aligned}$$

利用 (12) − (14)(須把式中的變項 y 改為 u)，便可求得 (32) 的三個根如下[6]：

$$u_1 = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{1243+234\sqrt{29}}+\sqrt[3]{1243-234\sqrt{29}}\right)$$

---

[5]由於 (31) 跟《感受伽羅瓦：四次方程的根式解》中的三次預解式 (18) 僅在二次項係數和常數項上有不同的正負號，以下可以沿用該網頁的計算結果，其中 P 與該網頁中的 P 相同，Q 則是該網頁中的 Q 的負值。

[6]在以下計算中，筆者使用了 $\sqrt[3]{1243+234\sqrt{29}}+\sqrt[3]{1243-234\sqrt{29}}=11$ 和 $\sqrt[3]{1243+234\sqrt{29}}-\sqrt[3]{1243-234\sqrt{29}}=\sqrt{261}$ 這兩個中間計算結果，這純粹是在進行數值計算時偶然發現的事實。

$$
\begin{aligned}
&= \frac{11}{3} \\
u_2 &= \frac{1}{3}\left(\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\sqrt[3]{1243+234\sqrt{29}}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\sqrt[3]{1243-234\sqrt{29}}\right) \\
&= -\frac{11}{6}-\frac{\sqrt{87}}{2}i \\
u_3 &= \frac{1}{3}\left(\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\sqrt[3]{1243+234\sqrt{29}}+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\sqrt[3]{1243-234\sqrt{29}}\right) \\
&= -\frac{11}{6}+\frac{\sqrt{87}}{2}i
\end{aligned}
$$

利用代換 $z = u - \frac{14}{3}$，便可得到三次預解式 (31) 的三個根如下：

$$
\begin{aligned}
z_1 &= -1 \\
z_2 &= -\frac{13}{2}-\frac{\sqrt{87}}{2}i \\
z_3 &= -\frac{13}{2}+\frac{\sqrt{87}}{2}i
\end{aligned}
$$

如前所述，這三個根就是 γ_1、γ_2 和 γ_3。接下來，應用我們在《感受伽羅瓦：四次方程的根式解》中的計算結果，容易求得這三個值的負值的平方根如下：

$$
\begin{aligned}
\sqrt{-\gamma_1} &= \sqrt{1} \\
&= 1 \\
\sqrt{-\gamma_2} &= \sqrt{\frac{13}{2}+\frac{\sqrt{87}}{2}i} \\
&= \frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\
\sqrt{-\gamma_3} &= \sqrt{\frac{13}{2}-\frac{\sqrt{87}}{2}i} \\
&= -\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}
$$

把上述結果代入 (21) － (24)，便可求得 (30) 的四個根如下：

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
&= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_2 &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{29}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{\sqrt{29}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\
&= \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\\
y_3 &= \frac{1}{2}\left(-1+\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{\sqrt{29}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\
&= -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2}\\
y_4 &= \frac{1}{2}\left(-1-\frac{\sqrt{29}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{\sqrt{29}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\
&= -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2}
\end{aligned}
$$

最後，利用代換 $x = y - \frac{1}{2}$，便可得到四次方程 (29) 的根式解如下：

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2}i\\
x_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{2}i\\
x_3 &= -1+\frac{\sqrt{29}}{2}\\
x_4 &= -1-\frac{\sqrt{29}}{2}
\end{aligned}
$$

此結果與《感受伽羅瓦：四次方程的根式解》中的結果相同。

連結至數學專題
連結至周家發網頁