感受伽羅瓦：四次方程的根式解

本網頁介紹求實係數四次多項式方程根式解的一般方法，設 a、b、c、d、e 為實數，其中 $a \neq 0$，則四次方程的一般形式為

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \qquad (1)$$

正如我們在前兩章所做的，為易於求解，我們先對上式進行契爾恩豪斯變換，即把上式除以 a，然後用 $x = y - \frac{b}{4a}$ 代入：

$$\begin{aligned} x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} &= 0 \\ \left(y - \frac{b}{4a}\right)^4 + \frac{b}{a}\left(y - \frac{b}{4a}\right)^3 + \frac{c}{a}\left(y - \frac{b}{4a}\right)^2 + \frac{d}{a}\left(y - \frac{b}{4a}\right) + \frac{e}{a} &= 0 \\ y^4 + \left(\frac{c}{a} - \frac{3b^2}{8a^2}\right)y^2 + \left(\frac{d}{a} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{b^3}{8a^3}\right)y + \left(\frac{e}{a} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{3b^4}{256a^4}\right) &= 0 \end{aligned}$$

現在如果設 $p = \frac{c}{a} - \frac{3b^2}{8a^2}$、$q = \frac{d}{a} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{b^3}{8a^3}$ 和 $r = \frac{e}{a} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{3b^4}{256a^4}$，那麼 (1) 便變成：

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 \qquad (2)$$

上式就是經化簡的四次方程，其四次項和三次項係數分別為 1 和 0。這裡我們假設 $q \neq 0$ 和 $r \neq 0$，這是因為若 $q = 0$，那麼 (2) 化歸為 $y^4 + py^2 + r = 0$，實際等於一個二次方程 $u^2 + pu + r = 0$(用 $y^2 = u$ 代入)，可先用解二次方程的方法求解 u，然後再開平方。若 $r = 0$，那麼 (2) 化歸為 $y^4 + py^2 + qy = 0$，等同於 $y(y^3 + py + q) = 0$，這個方程的其中一個解是 0，其餘三個解則可用解三次方程的方法求得。

當 $q \neq 0$ 和 $r \neq 0$ 時，(2) 似乎並不容易求解。不過，經過多代人的求解經驗，人們發現了一種求解 (2) 的方法，其關鍵是先把 (2) 的左端寫成兩個二次多項式的乘積如下：

$$y^4 + py^2 + qy + r = (y^2 + ky + l)(y^2 + my + n) \qquad (3)$$

擴展上式右端，可得

$$y^4 + py^2 + qy + r = y^4 + (k + m)y^3 + (km + l + n)y^2 + (kn + lm)y + ln$$

從上式左右兩端的各個係數，可得到以下聯立方程：

$$\begin{cases} k+m=0 & (4) \\ km+l+n=p & (5) \\ kn+lm=q & (6) \\ ln=r & (7) \end{cases}$$

從 (4)，可得 $m=-k$。據此可把 (5) 和 (6) 化簡為

$$\begin{cases} -k^2+l+n=p & (8) \\ k(n-l)=q & (9) \end{cases}$$

由於前面假設了 $q\neq 0$，由 (9) 可知 $k\neq 0$，由此從 (8) 和 (9) 可得

$$\begin{cases} n+l=p+k^2 & (10) \\ n-l=\frac{q}{k} & (11) \end{cases}$$

計算 (10) − (11) 和 (10) + (11)，可得到

$$\begin{cases} 2l=p+k^2-\frac{q}{k} & (12) \\ 2n=p+k^2+\frac{q}{k} & (13) \end{cases}$$

從 (7) 可得 $(2l)(2n)=4r$，把 (12) 和 (13) 代入此一結果，可得

$$\begin{aligned} (p+k^2-\frac{q}{k})(p+k^2+\frac{q}{k}) &= 4r \\ p^2+2pk^2+k^4-\frac{q^2}{k^2} &= 4r \\ p^2k^2+2pk^4+k^6-q^2 &= 4rk^2 \\ k^6+2pk^4+(p^2-4r)k^2-q^2 &= 0 \end{aligned}$$

上式看似六次方程，但如把 $z=k^2$ 代入，便可得到以下三次方程：

$$z^3+2pz^2+(p^2-4r)z-q^2=0 \qquad (14)$$

上述方程稱為四次方程 (2) 的三次預解式(resolvent cubic)[1]，接著可以利用我們在《感受伽羅瓦：三次方程的根式解》中介紹的方法求得這個三次預解式的三個解 (設為 z_1、z_2 和 z_3)，現任選其中一個解 (設為 z_1)。由於前面設定了 $z=k^2$，由此可得 $k=\pm\sqrt{z_1}$。把 $k=\sqrt{z_1}$ 代入 (12) 和 (13)，便可求得 (讀者可自行驗證，如用 $k=-\sqrt{z_1}$ 代入 (12) 和 (13)，所得結果與以下分析的結果相同)：

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{2}\left(p+z_1-\frac{q}{\sqrt{z_1}}\right) \\ n &= \frac{1}{2}\left(p+z_1+\frac{q}{\sqrt{z_1}}\right) \end{aligned}$$

[1]不同數學家會提出不同的三次預解式，本網頁介紹的只是其中一個。

把以上求得 k、l、m、n 的結果代入 (3)，便可得到

$$\begin{aligned}&y^4+py^2+qy+r\\ =\ &\left(y^2+\sqrt{z_1}y+\frac{1}{2}\left(p+z_1-\frac{q}{\sqrt{z_1}}\right)\right)\left(y^2-\sqrt{z_1}y+\frac{1}{2}\left(p+z_1+\frac{q}{\sqrt{z_1}}\right)\right)\end{aligned}\qquad(15)$$

至此我們把 (2) 分解為兩個二次多項式的乘積, 對這兩個二次多項式分別求解, 共可得到四個解 (以下分別記作 y_1、y_2、y_3 和 y_4)，這就是 (2) 的四個解。請注意如在上面選擇 z_2 或 z_3 繼續進行計算，將會得到把 (2) 分解為兩個二次多項式的乘積的另一種方式，求解這兩個二次多項式，同樣可得到 (2) 的四個解。以上求得的 y_1、y_2、y_3 和 y_4 只是以 y 作為變項的四次方程 (2) 的解，但由於前面曾設定 $x=y-\frac{b}{4a}$，故可馬上求得原來以 x 作為變項的四次方程 (1) 的四個解 (以下分別記作 x_1、x_2、x_3 和 x_4),例如 $x_1=y_1-\frac{b}{4a}$ 等。

理論上，我們也可以像處理二次和三次方程那樣，寫出四次方程的根式解的公式以及討論四次方程的解的各種可能情況；但從以上介紹的方法可以看到，求解四次方程的過程涉及求解一個三次方程和兩個二次方程，另加一次開平方運算。由此可以想見，四次方程的解的公式以及解的各種可能情況一定非常複雜，因此本網頁略去這方面的內容。

接下來讓我們用上述方法求解以下四次方程：

$$16x^4+32x^3-88x^2+24x-75=0\qquad(16)$$

由於在上述方程中，$a=16$、$b=32$、$c=-88$、$d=24$ 和 $e=-75$，故有

$$\begin{aligned}p&=\frac{-88}{16}-\frac{3\times32^2}{8\times16^2}\\&=-7\\q&=\frac{24}{16}-\frac{(32)(-88)}{2\times16^2}+\frac{32^3}{8\times16^3}\\&=8\\r&=\frac{-75}{16}-\frac{32\times24}{4\times16^2}+\frac{(32^2)(-88)}{16\times16^3}-\frac{3\times32^4}{256\times16^4}\\&=-7\end{aligned}$$

因此與 (16) 相關的經化簡的四次方程是

$$y^4-7y^2+8y-7=0\qquad(17)$$

把以上求得的 p、q、r 代入 (14)，可得以下三次預解式：

$$\begin{aligned}z^3+(2)(-7)z^2+((-7)^2-(4)(-7))z-8^2&=0\\z^3-14z^2+77z-64&=0\qquad(18)\end{aligned}$$

接著運用《感受伽羅瓦：三次方程的根式解》中介紹的方法求解上述三次預解式。由於在上述方程中，$A=1$、$B=-14$、$C=77$ 和 $D=-64$[2]，故有

$$\begin{aligned}
P &= \frac{C}{A}-\frac{B^2}{3A^2} \\
&= \frac{77}{1}-\frac{(-14)^2}{3\times 1^2} \\
&= \frac{35}{3} \\
Q &= \frac{D}{A}-\frac{BC}{3A^2}+\frac{2B^3}{27A^3} \\
&= \frac{-64}{1}-\frac{(-14)(77)}{3\times 1^2}+\frac{(2)(-14)^3}{27\times 1^3} \\
&= \frac{2486}{27} \\
\Delta_3 &= \frac{Q^2}{4}+\frac{P^3}{27} \\
&= \frac{(\frac{2486}{27})^2}{4}+\frac{(\frac{35}{3})^3}{27} \\
&= \frac{19604}{9}
\end{aligned}$$

由於 $\Delta_3>0$，故知 (18) 有一個實數解和一對互為共軛複數的解。接著計算

$$\begin{aligned}
z_1 &= -\frac{B}{3A}+\sqrt[3]{-\frac{Q}{2}+\sqrt{\Delta_3}}+\sqrt[3]{-\frac{Q}{2}-\sqrt{\Delta_3}} \\
&= -\frac{-14}{3\times 1}+\sqrt[3]{-\frac{\frac{2486}{27}}{2}+\sqrt{\frac{19604}{9}}}+\sqrt[3]{-\frac{\frac{2486}{27}}{2}-\sqrt{\frac{19604}{9}}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

求得 z_1 後，我們便無須求 (18) 的其餘兩個解，但為方便以下作比較，且讓我們繼續求解 (18)。為此，我們可以運用《感受伽羅瓦：三次方程的根式解》中提供的公式求 z_2 和 z_3，但較便捷的方法是先 (用長除法或其他方法) 進行以下除法運算：

$$\frac{z^3-14z^2+77z-64}{z-1}=z^2-13z+64$$

然後用二次方程的求解公式求上式右端二次方程的兩個解如下：

$$z_{2,3} = \frac{-(-13)\pm\sqrt{(-13)^2-4\times 1\times 64}}{2\times 1}$$

[2]為免把三次預解式的變項與四次方程的變項混淆，以下用大寫字母表示三次預解式的變項，小寫字母表示四次方程的變項。

$$= \quad \frac{13}{2} \pm \frac{\sqrt{87}}{2}i$$

現在我們暫時撇下 z_2 和 z_3，集中處理 z_1。根據前面的討論，我們接下來求 $\sqrt{z_1} = \sqrt{1} = 1$。把前面求得的 p、q、z_1 和 $\sqrt{z_1}$ 代入 (15)，便可求得 (17) 的因式分解結果如下：

$$\begin{aligned} & y^4 - 7y^2 + 8y - 7 \\ = \quad & \left(y^2 + 1 \times y + \frac{1}{2}\left((-7) + 1 - \frac{8}{1}\right)\right)\left(y^2 - 1 \times y + \frac{1}{2}\left((-7) + 1 + \frac{8}{1}\right)\right) \\ = \quad & (y^2 + y - 7)(y^2 - y + 1) \qquad (19) \end{aligned}$$

對上式包含的兩個二次方程求解，便可求得 (17) 的四個解如下：

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-7)}}{2 \times 1} \\ &= -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{29}}{2} \\ y_{3,4} &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} \\ &= \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

最後運用 $x = y - \frac{b}{4a}$，便可求得 (16) 的四個解如下：

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2} - \frac{32}{4 \times 16} \\ &= -1 + \frac{\sqrt{29}}{2} \\ x_2 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2} - \frac{32}{4 \times 16} \\ &= -1 - \frac{\sqrt{29}}{2} \\ x_3 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{32}{4 \times 16} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_4 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{32}{4 \times 16} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

以上是根據 z_1 而得的計算結果，接下來讓我們看看使用 z_2 和 z_3 是否也能得到相同結果。首先考慮 z_2，如同 z_1 的情況，我們要先求 $\sqrt{z_2} = \sqrt{\frac{13}{2} + \frac{\sqrt{87}}{2}i}$。為求複數 z_2 的平方根，固然可以運用我們在《感受伽羅瓦：二次方程與複數》中介紹的方法，但也可先假設 $\sqrt{z_2}$ 具有 $f + gi$ 的形式，其中 f 和 g 是實數，然後求解 f 和 g，過程如下：

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{13}{2} + \frac{\sqrt{87}}{2}i} &= f + gi \\ \frac{13}{2} + \frac{\sqrt{87}}{2}i &= (f + gi)^2 \\ &= (f^2 - g^2) + 2fgi \end{aligned}$$

由此得以下聯立方程：

$$\begin{cases} f^2 - g^2 = \frac{13}{2} & (20) \\ 2fg = \frac{\sqrt{87}}{2} & (21) \end{cases}$$

接著求解上述聯立方程，從 (21) 可得 $g = \frac{\sqrt{87}}{4f}$，將此代入 (20)，並經整理，可得 $16f^4 - 104f^2 - 87 = 0$。這表面上是四次方程，但如用 $h = f^2$ 代入，可得二次方程 $16h^2 - 104h - 87 = 0$，解此二次方程可得 $h_1 = \frac{29}{4}$ 和 $h_2 = -\frac{3}{4}$。我們選擇 h_1 這個結果 (h_2 這個結果是負數，對其開平方所得結果不是實數，不符合我們的要求，所以應予捨棄)，由於前面設定了 $h = f^2$，由此可得 f 的兩個可能值：$f_1 = \frac{\sqrt{29}}{2}$ 和 $f_2 = -\frac{\sqrt{29}}{2}$。接著利用 $g = \frac{\sqrt{87}}{4f}$，可得 g 的兩個可能值：$g_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 和 $g_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$。至此求得 $\sqrt{z_2}$ 的兩個可能值：$\frac{\sqrt{29}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 和 $-\frac{\sqrt{29}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$，請注意這兩個值所對應的點分別位於第一和第三象限，所以我們確定 $\sqrt{z_2} = \frac{\sqrt{29}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$，因為 $\sqrt{z_2}$ 代表 z_2 的主平方根，即平方根中具有最小主幅角的那個。

把前面求得的 p、q、z_2 和 $\sqrt{z_2}$ 代入 (15)(須把 (15) 中的 z_1 改為 z_2)，便可求得 (17) 的另外一個因式分解結果如下：

$$\begin{aligned} & y^4 - 7y^2 + 8y - 7 \\ = & \left(y^2 + \left(\frac{\sqrt{29}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)y + \frac{1}{2}\left((-7) + \frac{13}{2} + \frac{\sqrt{87}}{2}i - \frac{8}{\frac{\sqrt{29}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)\right) \\ & \times \left(y^2 - \left(\frac{\sqrt{29}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)y + \frac{1}{2}\left((-7) + \frac{13}{2} + \frac{\sqrt{87}}{2}i + \frac{8}{\frac{\sqrt{29}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)\right) \\ = & \left(y^2 + \left(\frac{\sqrt{29}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)y - \frac{1}{4}(\sqrt{29} + 1) + \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{29} + 1)i\right) \\ & \times \left(y^2 - \left(\frac{\sqrt{29}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)y + \frac{1}{4}(\sqrt{29} - 1) + \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{29} - 1)i\right) \qquad (22) \end{aligned}$$

讀者可自行驗證上述結果是正確的。接著如求解上列兩個二次方程, 便可得到 (17) 的四個解, 但由於這將涉及複數的開平方運算, 計算會很複雜, 而且前面既然已求得 (17) 的四個解, 現時我們只需驗證這四個解確是上列兩個二次方程的解。讀者可自行驗證 $y_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2}$ 和 $y_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 是上列第一個二次方程的解, 而 $y_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2}$ 和 $y_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 則是上列第二個二次方程的解。利用這四個解, 便容易求得 (16) 的四個解, 而且其結果與前述結果一致。

最後考慮 z_3，如同 z_1 的情況，我們要先求 $\sqrt{z_3} = \sqrt{\frac{13}{2} - \frac{\sqrt{87}}{2}i}$。讀者可自行驗證，利用前面介紹的方法，不難求得 $\sqrt{z_3}$ 的兩個值：$-\frac{\sqrt{29}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 和 $\frac{\sqrt{29}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$，請注意這兩個值所對應的點分別位於第二和第四象限，所以我們確定 $\sqrt{z_3} = -\frac{\sqrt{29}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$。利用前面介紹的方法，便可求得 (17) 的第三個因式分解結果如下：

$$\begin{aligned}
& y^4 - 7y^2 + 8y - 7 \\
= & \left(y^2 + \left(\frac{-\sqrt{29}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)y + \frac{1}{4}(\sqrt{29}-1) - \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{29}-1)i\right) \\
& \times \left(y^2 - \left(\frac{-\sqrt{29}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)y - \frac{1}{4}(\sqrt{29}+1) - \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{29}+1)i\right) \qquad (23)
\end{aligned}$$

讀者可自行驗證上述結果是正確的, 並且驗證 $y_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2}$ 和 $y_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 是上列第一個二次方程的解，而 $y_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2}$ 和 $y_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 則是上列第二個二次方程的解。利用這四個解，同樣可求得 (16) 的四個解，而且其結果與前述結果一致。

上述計算結果顯示，利用三次預解式的任何一個解，都能求得相關四次方程的四個解。讀者也應能看到，利用三次預解式的不同解雖然會得到原有四次方程的不同因式分解結果，但這些結果其實只是把四次方程的四個解兩兩組合而得的不同結果。以四次方程 (17) 為例，利用 z_1 計算出來的因式分解結果 (19) 相當於以下組合：

$$[(y - y_1)(y - y_2)] \times [(y - y_3)(y - y_4)]$$

利用 z_2 計算出來的因式分解結果 (22) 相當於以下組合：

$$[(y - y_2)(y - y_4)] \times [(y - y_1)(y - y_3)]$$

利用 z_3 計算出來的因式分解結果 (23) 則相當於以下組合：

$$[(y - y_1)(y - y_4)] \times [(y - y_2)(y - y_3)]$$

連結至數學專題
連結至周家發網頁