感受伽羅瓦：可解群與單純群

在前面各章，我們看到群論在伽羅瓦理論中起著重要的作用，在本章我們將介紹兩種特殊群－可解群和單純群，讀者在以後的章節中將看到，有關這兩類群的知識有助我們了解多項式方程解的特性。

設 G 為群，如果 G 有一個子群序列

$$\{e\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \cdots \subseteq G_n = G$$

使得對每個 $0 \leq i \leq n-1$ 而言，都有 G_i 是 G_{i+1} 的正規子群，並且 G_{i+1}/G_i 是交換群，我們便說 G 是可解群(solvable group，或作 soluble group)。

為讓讀者了解上述定義，以下讓我們證明任何交換群 G 都是可解群，首先寫出 G 的一個子群序列如下：

$$\{e\} \subseteq G$$

其次要證明 $\{e\}$ 是 G 的正規子群，以及 $G/\{e\}$ 是交換群。前者很容易證明，這是因為根據我們在《感受伽羅瓦：子群與商群》中的討論，平凡子群 $\{e\}$ 必然是 G 的正規子群。為證明後者，要先弄清楚商群 $G/\{e\}$ 由甚麼元素組成。根據商群的定義，$G/\{e\}$ 由 $\{e\}$ 的陪集組成，而 $\{e\}$ 的陪集則是指具有 $g \circ \{e\}$ 形式的集合 (其中 $g \in G$)，由此我們有：

$$\begin{aligned} G/\{e\} &= \{g \circ \{e\} : g \in G\} \\ &= \{\{g \circ e\} : g \in G\} \\ &= \{\{g\} : g \in G\} \end{aligned}$$

上述集合是由形如 $\{g\}$ 的單元集組成的集合，其中 g 是 G 的元素 (例如若 $G = \{e, a, b\}$，則 $G/\{e\} = \{\{e\}, \{a\}, \{b\}\}$)，由此容易看到 $G/\{e\} \cong G$，由於 G 是交換群，故知 $G/\{e\}$ 必然也是交換群。

另外，抽象代數學上有以下定理。

定理 1：任何循環群都是交換群。

由於在上面我們證明了任何交換群都是可解群，由上述定理可知任何循環群都是可解群，現把上述結果總結成以下定理。

定理 2：任何循環群和 (非循環) 交換群都是可解群。

我們在《感受伽羅瓦：群的基本概念》中曾介紹 n 次對稱群 S_n，這種群由 n 個元素 (x_1、...、x_n) 的 $n!$ 種排列組成，現在讓我們看看這些群是否可解群。首先考慮最簡單的 S_1，這個群僅包含 $1! = 1$ 個元素 I (即恆等排列)[1]：

$$S_1 = \{I\}$$

其中 I 就是這個群的單位元，容易看到任何包含一個元素的群都是循環群 (其生成元是該群中的單位元)，由此根據「定理 2」，可知 S_1 是可解群。

其次考慮 S_2，這個群包含 $2! = 2$ 個元素，分別為 I 和 (12) (即把 x_1 和 x_2 對調位置的排列，有關排列的循環式表示法，請參閱《感受伽羅瓦：排列與對稱多項式》)[2]：

$$S_2 = \{I, (12)\}$$

請注意抽象代數學上有以下定理。

定理 3：設 G 為群並且 $|G|$ 是質數，則 G 是循環群。

由於 $|S_2| = 2$ 並且 2 是質數，根據上述定理，可知 S_2 是循環群，由此根據「定理 2」，可知 S_2 也是可解群。

接著考慮 S_3，這個群包含 $3! = 6$ 個元素：

$$S_3 = \{I, (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

由於這個群不是循環群，也不是 (非循環) 交換群，所以不能引用「定理 2」。不過，這個群包含一個特殊的子群，在列出這個子群的成員前，須先引入對換(transposition) 和排列奇偶性(permutation parity) 的概念。對換是指把兩個元素對調位置的排列，用循環式表示，對換可以寫成一個僅包含兩個元素的括弧，例如在 S_3 下，(12)、(13) 和 (23) 都是對換。容易證明，任何排列的循環式都可改寫成一系列對換的複合。舉例說，(123) 便有以下改寫

[1]我們在《感受伽羅瓦：群的基本概念》中曾把恆等排列寫成循環式 (x_1) 的形式，這裡為了讓讀者清晰看到恆等排列是對稱群中的單位元，故把恆等排列寫成恆等函數 I 的形式。

[2]嚴格地說，根據上述網頁，上述排列的循環式應寫成 (x_1x_2) 的形式，但為使表達式較簡潔，這裡把這個循環式寫成 (12) 的形式。

方案 (以下略去複合運算符號 $\circ$)：

$$(123) = (13)(12)$$

一般地，設有循環式 $(x_1x_2x_3\ldots x_{n-1}x_n)$，其中 $n > 1$，那麼我們有

$$(x_1x_2x_3\ldots x_{n-1}x_n) = (x_1x_n)(x_1x_{n-1})\ldots(x_1x_3)(x_1x_2) \qquad (1)$$

上式是把任何循環式改寫成對換複合的標準方案，但不是唯一的方案。事實上，一個循環式有多種改寫方案，例如上述的 (123) 除了上述改寫方案外，還有以下改寫方案：

$$(123) = (13)(23)(32)(12)$$

雖然給定某一循環式，其改寫方案並不唯一，但可以證明，所有改寫方案所含對換的數目必然全是奇數，或者全是偶數，例如上述 (123) 的兩種改寫方案便分別包含 2 個和 4 個對換，而 2 和 4 都是偶數。由此便可定義排列奇偶性如下：對於任何排列，如果可以把其循環式改寫成奇數個對換的複合，那麼該排列稱為奇排列(odd permutation)，否則就是偶排列(even permutation)。根據這個定義，前述的 (123) 是偶排列。

可以證明，對任何對稱群 S_n 而言，S_n 所包含的偶排列構成 S_n 的一個子群，這種群稱為n 次交錯群(alternating group of degree n)，記作 A_n，而且 A_n 所含元素的總數剛好等於 S_n 所含元素總數的一半，即 $\frac{n!}{2}$。以 S_3 為例，容易看到在這個群的六個元素中，I、(123) 和 (132) 是偶排列，其餘的都是奇排列，由此有

$$A_3 = \{I, (123), (132)\}$$

請注意 A_3 剛好包含 $\frac{3!}{2} = 3$ 個元素。

現在寫出 S_3 的以下子群序列：

$$\{I\} \subseteq A_3 \subseteq S_3 \qquad (2)$$

以下讓我們證明上述子群序列滿足可解群的子群序列所須滿足的條件。首先考慮 $\{I\} \subseteq A_3$，由於 $\{I\}$ 是 A_3 的平凡子群，根據前面對平凡子群的討論，可知 $\{I\}$ 必然是 A_3 的正規子群，而且 $A_3/\{I\} \cong A_3$。另一方面，如果仔細研究 A_3 中各元素的關係，不難看到 $(123)^2 = (132)$ 並且 $(123)^3 = I$。換句話說，A_3 可被看成由 (123) 生成的循環群。根據「定理 1」，可知 A_3 本身是一個交換群，由此可知商群 $A_3/\{I\}$ 也是交換群。

其次考慮 $A_3 \subseteq S_3$，如前所述，A_3 所含元素的總數剛好等於 S_3 所含元素總數的一半。由於此一情況在實際應用中經常出現，以下讓我們考慮一般

的情況。設 G 為群，N 為其子群，並且 N 所含元素的總數剛好等於 G 所含元素總數的一半，即 $|G:N|=2$ (請參閱我們在《感受伽羅瓦：子群與商群》中引入的符號)，那麼 N 必然是 G 的正規子群，這是因為在此情況下，N 只有兩個左陪集 (即 N 和 $G-N$) 和兩個右陪集 (也是 N 和 $G-N$)[3]。對於 G 的任意元素 a 而言，若 $a \in N$，則根據陪集的定義，必有 $a \circ N = N$ 和 $N \circ a = N$；若 $a \notin N$，則必有 $a \circ N \neq N$ 和 $N \circ a \neq N$。但由於 N 的陪集不是 N 就是 $G-N$，故必有 $a \circ N = G-N$ 和 $N \circ a = G-N$。至此證得，對於 G 的任何元素 a，都有 $a \circ N = N \circ a$，由此根據正規子群的定義，可知 N 是 G 的正規子群。

此外，商群 G/N 也必然是交換群，這是因為在此情況下，G/N 只有兩個元素：N 和 $G-N$，而如前所述，任何包含兩個元素的群都是循環群，因此根據「定理 1」，G/N 是交換群。現將上述結果總結成以下定理。

定理 4：設 G 為群，N 為其子群，並且 $|G:N|=2$，則 N 是 G 的正規子群，並且 G/N 是交換群。

現在我們可以把上述一般情況應用於 $A_3 \subseteq S_3$。由於 $|S_3 : A_3| = 2$，根據上述定理，可知 A_3 是 S_3 的正規子群，並且 S_3/A_3 是交換群。至此證得 (2) 滿足可解群的子群序列所須滿足的條件，由此可見 S_3 是可解群。

接著考慮 S_4，這個群包含 $4! = 24$ 個元素：

$$\begin{aligned} S_4 \ = \ & \{I, (12), (13), (14), (23), (24), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), \\ & (123), (124), (132), (134), (142), (143), (234), (243), \\ & (1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)\} \end{aligned}$$

這個群的元素有五種「循環結構」(cycle structure)(即這些元素的循環式所含括弧的類型)：第一種是恆等排列 $I\,(=(1)(2)(3)(4))$ 獨有的「四重單循環」結構；第二種是「單重對換」結構，例如 (12) 的結構；第三種是「雙重對換」結構，例如 (12)(34) 的結構；第四種是「單重三循環」結構，例如 (123) 的結構；第五種是「單重四循環」結構，例如 (1234) 的結構。

為寫出這個群的子群序列，我們首先介紹兩個特殊的群，第一個是 S_4 的子群 A_4，這個子群包含 S_4 中的所有偶排列：

$$\begin{aligned} A_4 \ = \ & \{I, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (124), (132), (134), (142), (143), \\ & (234), (243)\} \end{aligned}$$

[3]根據我們在《感受伽羅瓦：子群與商群》中對陪集的討論，一個子群的所有相異陪集兩兩互不相交，而且合起來窮盡整個群，因此如果 N 只有兩個陪集，其中一個陪集必然是 N 自身，另一個則必然是 $G-N$。

請注意 A_4 剛好包含 $\frac{4!}{2} = 12$ 個元素。第二個是 A_4 中由恆等排列和三個二重對換組成的子群，這個群稱為「克萊因四元群」(Klein 4-Group)，一般記作 V：

$$V = \{I, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

現在寫出 S_4 的以下子群序列：

$$\{I\} \subseteq V \subseteq A_4 \subseteq S_4 \qquad (3)$$

以下讓我們證明上述子群序列滿足可解群的子群序列所須滿足的條件。首先考慮 $\{I\} \subseteq V$，由於 $\{I\}$ 是 V 的平凡子群，根據前面對平凡子群的討論，可知 $\{I\}$ 必然是 V 的正規子群，而且 $V/\{I\} \cong V$。

另一方面，任何非交換群都必須包含至少五個元素，這是因為如果群 G 不是交換群，那麼它必然包含至少兩個元素 a 和 b 使得 $a \circ b \neq b \circ a$。由此可以推斷 a 和 b 都不可能等於 G 中的單位元 e，並且 $a \neq b$。由此還可進一步推斷 $a \circ b$ 和 $b \circ a$ 都不可能等於 e、a 和 b 中的任何一個，因此 G 必須至少包含 e、a、b、$a \circ b$ 和 $b \circ a$ 這五個元素。由於 V 只包含四個元素，根據上述討論，V 必然是交換群，由此可知 $V/\{I\}$ 也必然是交換群。

其次考慮 $V \subseteq A_4$。為處理此一子群關係，我們須引入「共軛」的概念。設 G 為群，$a, b \in G$，如果存在 $g \in G$ 使得 $g \circ a \circ g^{-1} = b$，我們便說 a 與 b共軛(conjugate)。請注意我們在《感受伽羅瓦：子群與商群》中會把 $g \circ a \circ g^{-1}$ 稱為 g 對 a 的共軛運算，因此我們也可以說，如果可以透過對 a 進行共軛運算而得到 b，那麼 a 與 b 共軛。對稱群上的共軛關係滿足以下重要定理。

定理 5：設 a 和 b 為對稱群 S_n 的元素，則 a 與 b 有相同的循環結構當且僅當 a 與 b 共軛。

從上述定理，我們也可得到推論：共軛運算不會改變對稱群元素的循環結構。

現在讓我們看看共軛運算對 V 中元素的作用，如前所述，V 包含恆等排列 I 和三個二重對換。由於對 A_4 中任何元素 g 而言，均有 $g \circ I \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = I$，可見任何共軛運算都把 I 映射為 I。此外，根據上述定理，任何共軛運算都把二重對換映射為另一二重對換。總上所述，對任何 $n \in V$ 和 $g \in A_4$，均有 $g \circ n \circ g^{-1} \in V$。由此根據《感受伽羅瓦：子群與商群》中的「定理 2」，可知 V 是 A_4 的正規子群。

另一方面，由於 $|A_3| = 12$ 和 $|V| = 4$，可知 $|A_3/V| = 3$。由於 3 是質數，根據前面的「定理 3」，A_3/V 是循環群，由此再根據前面的「定理 1」，

可知 A_3/V 是交換群。

最後考慮 $A_4 \subseteq S_4$。由於 $|S_4 : A_4| = 2$，根據「定理 4」，可知 A_4 是 S_4 的正規子群，並且 S_4/A_4 是交換群。至此證得 (3) 滿足可解群的子群序列所須滿足的條件，由此可見 S_4 是可解群。

至此證明了 S_1、S_2、S_3 和 S_4 都是可解群，為討論 $S_n\,(n \geq 5)$ 的情況，我們要引入單純群的概念。設 G 為群，如果 G 不是僅由單位元 e 組成的平凡群，並且除了 $\{e\}$ 和 G 這兩個平凡子群作為其正規子群外，沒有其他正規子群，我們便說 G 是單純群(simple group)。

根據上述定義，$\mathbb{Z}_p$ (其中 p 是正質數) 是單純群，這是因為根據「拉格朗日定理」(即《感受伽羅瓦：子群與商群》中的公式 (6))，若 H 是有限群 G 的子群，則 $|H|$ 必須是 $|G|$ 的因數。由於 $|\mathbb{Z}_p| = p$ 是質數，而 p 除了 1 和 p 外沒有其他因數，可知 $\mathbb{Z}_p$ 除了 $\{0\}$ 和 $\mathbb{Z}_p$ 外沒有其他子群，因而也沒有其他正規子群，因此符合單純群的定義。此外，由於 $\mathbb{Z}_p$ 是循環群 (這些群以 1 作為生成元)，根據「定理 2」，可知 $\mathbb{Z}_p$ 也是可解群。事實上，只有與 $\mathbb{Z}_p$ 同構的群才可同時是可解群和單純群，這是以下定理的內容。

定理 6：一個群同時是可解群和單純群當且僅當它是具有質數階的循環群，即與 $\mathbb{Z}_p$ (其中 p 是正質數) 同構的群。

此外，我們還要引入「共軛類」和「中心化子」的概念。在上面我們介紹了共軛的概念，不難證明，共軛關係構成一個群 G 中元素之間的一種等價關係，因此根據《感受伽羅瓦：等價關係與分數域》中的「定理 1」，我們可以把 G 中的元素劃分為一個個等價類，這種建基於共軛關係的等價類便稱為共軛類(conjugacy class)。以下把群 G 中元素 a 的共軛類記作 $\mathrm{Cl}_G(a)$，即

$$\mathrm{Cl}_G(a) = \{g \circ a \circ g^{-1} : g \in G\}$$

把共軛類的概念套用到前面的「定理 5」，可以把該定理理解為，S_n 中元素的每種循環結構各自對應著 S_n 的一個共軛類，因此如要確定 S_n 的共軛類，只須看它的元素的循環結構。以前述的 S_4 為例，如前所述，這個對稱群的元素有五種循環結構，因此這個群共有五個共軛類，分別是 $\mathrm{Cl}_{S_4}(I)$、$\mathrm{Cl}_{S_4}((12))$、$\mathrm{Cl}_{S_4}((12)(34))$、$\mathrm{Cl}_{S_4}((123))$ 和 $\mathrm{Cl}_{S_4}((1234))$，其中 $\mathrm{Cl}_{S_4}(I)$ 僅包含恆等排列 I，$\mathrm{Cl}_{S_4}((12))$ 包含所有具有單重對換結構的排列，如此類推。

惟請注意以上結論只適用於 S_n，卻不適用於其真子群。就 S_n 的真子群 H 而言，儘管 H 的每個共軛類的成員必然是具有相同循環結構的排列，但卻並非所有具有相同循環結構的排列都屬於 H 的同一個共軛類。以 S_4 的子群 A_4 為例，儘管 (123) 和 (132) 具有相同的循環結構，但兩者在

A_4 中分屬不同的共軛類，讀者可自行驗證，A_4 中不存在任何元素 g 使得 $g \circ (123) \circ g^{-1} = (132)$，因此 (123) 與 (132) 在 A_4 下不共軛 (儘管它們在 S_4 下共軛)。

利用共軛關係，還可定義群 G 中元素 a 的中心化子(centralizer)(記作 $\mathrm{C}_G(a)$) 如下[4]：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C}_G(a) &= \{g \in G : g \circ a \circ g^{-1} = a\} \\
&= \{g \in G : g \circ a = a \circ g\}
\end{aligned}
$$

從上述第二行的定義可見，$\mathrm{C}_G(a)$ 包含 G 中所有與 a 在 $\circ$ 運算上具有交換性的元素。此外，可以證明 $\mathrm{C}_G(a)$ 是 G 的子群。仍以 S_4 為例，容易看到 $\mathrm{C}_{S_4}(I) = S_4$ 和 $\mathrm{C}_{S_4}((123)) = \{I, (123), (132)\}$，而這兩個中心化子都是 S_4 的子群。

上述兩個概念滿足以下定理。

定理 7：設 G 為有限群，並且 $a \in G$，則

$$
|\mathrm{Cl}_G(a)| = \frac{|G|}{|\mathrm{C}_G(a)|}
$$

舉例說，在上述例子中，我們有 $|S_4| = 24$ 和 $|\mathrm{C}_{S_4}((123))| = 3$，因此根據以上定理，應有 $|\mathrm{Cl}_G((123))| = \frac{24}{3} = 8$。根據前面的討論，$\mathrm{Cl}_G((123))$ 包含 S_4 中所有具有單重三循環結構的排列，而 S_4 正好有 8 個這樣的排列，跟我們的計算結果吻合。

此外，還有以下重要定理。

定理 8：設 G 為群，H 為其子群，則 H 是 G 的正規子群當且僅當 H 等於 G 中部分或全部共軛類的并集。

舉例說，前面證明了 A_4 是 S_4 的正規子群，而 A_4 正好是由 S_4 中的恆等排列、所有具有雙重對換結構的排列和具有單重三循環結構的排列組成的集合，即

$$
A_4 = \mathrm{Cl}_{S_4}(I) \cup \mathrm{Cl}_{S_4}((12)(34)) \cup \mathrm{Cl}_{S_4}((123))
$$

從而驗證了上述定理。

[4]如讀者學過「群作用」(group action) 的概念，那麼可以把共軛運算看作一種群作用，共軛類相當於這個群作用的某個「軌道」(orbit)，而中心化子則相當於這個群作用的某個「穩定化子」(stabilizer)。

接下來讓我們運用上述概念和定理證明 A_5 是單純群。由於 S_5 共有 $5! = 120$ 個元素，這裡不擬列出它的元素，但我們知道它的元素共有七種循環結構，因而也有七個共軛類，現將這七個共軛類的資料列於下表 (下表資料可在網上找到)：

共軛類	元素的循環結構	元素的奇偶性	元素數目
$\text{Cl}_{S_5}(I)$	五重單循環	偶排列	1
$\text{Cl}_{S_5}((12))$	單重對換	奇排列	10
$\text{Cl}_{S_5}((12)(34))$	雙重對換	偶排列	15
$\text{Cl}_{S_5}((123))$	單重三循環	偶排列	20
$\text{Cl}_{S_5}((123)(45))$	三循環 + 對換	奇排列	20
$\text{Cl}_{S_5}((1234))$	單重四循環	奇排列	30
$\text{Cl}_{S_5}((12345))$	單重五循環	偶排列	24

我們需要的是 A_5 的每個共軛類所含元素的數目 (請注意 A_5 共有 $\frac{5!}{2} = 60$ 個元素)，此一數目可透過上表的資料和反複應用「定理 7」求得。由於 A_5 是由 S_5 中的偶排列組成，所以以下只須考慮上表中被列作「偶排列」的共軛類。首先考慮 $\text{Cl}_{S_5}(I)$，這個共軛類只包含恆等排列 I。由於對 A_5 中任何元素 g，都有 $g \circ I \circ g^{-1} = I$，可見 $\text{Cl}_{A_5}(I) = \{I\}$。

其次考慮 $\text{Cl}_{S_5}((12)(34))$，根據上表，$|\text{Cl}_{S_5}((12)(34))| = 15$，由此根據「定理 7」，可知

$$|\text{C}_{S_5}((12)(34))| = \frac{|S_5|}{|\text{Cl}_{S_5}((12)(34))|} = \frac{120}{15} = 8$$

接著要找出 $\text{C}_{S_5}((12)(34))$ 的 8 個成員 (其中必有一個是 I)，由於如前所述，中心化子是所屬群的子群，只要找到中心化子的一些非平凡成員 g 和 h，便即時知道 g^2、g^{-1}、gh、hg 等也是中心化子的成員，這樣可大大簡化找中心化子的過程。讀者可自行驗證，

$$\text{C}_{S_5}((12)(34)) = \{I, (12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1324), (1423)\}$$

把上述這個群中的奇排列剔除，便可得到 $\text{C}_{A_5}((12)(34))$，即

$$\text{C}_{A_5}((12)(34)) = \{I, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

因此 $|\text{C}_{A_5}((12)(34))| = 4$，由此根據「定理 7」，可得

$$|\text{Cl}_{A_5}((12)(34))| = \frac{|A_5|}{|\text{C}_{A_5}((12)(34))|} = \frac{60}{4} = 15$$

上述結果跟 $|\mathrm{Cl}_{S_5}((12)(34))|$ 相同，這顯示 $\mathrm{Cl}_{S_5}((12)(34))$ 的全部 15 個成員都是 $\mathrm{Cl}_{A_5}((12)(34))$ 的成員。

接著考慮 $\mathrm{Cl}_{S_5}((123))$，根據上表，$|\mathrm{Cl}_{S_5}((123))| = 20$，由此根據「定理 7」，可知

$$|\mathrm{C}_{S_5}((123))| = \frac{|S_5|}{|\mathrm{Cl}_{S_5}((123))|} = \frac{120}{20} = 6$$

接著要找出 $\mathrm{C}_{S_5}((123))$ 的 6 個成員，讀者可自行驗證，

$$\mathrm{C}_{S_5}((123)) = \{I, (45), (123), (132), (123)(45), (132)(45)\}$$

把上述這個群中的奇排列剔除，便可得到 $\mathrm{C}_{A_5}((123))$，即

$$\mathrm{C}_{A_5}((123)) = \{I, (123), (132)\}$$

因此 $|\mathrm{C}_{A_5}((123))| = 3$，由此根據「定理 7」，可得

$$|\mathrm{Cl}_{A_5}((123))| = \frac{|A_5|}{|\mathrm{C}_{A_5}((123))|} = \frac{60}{3} = 20$$

上述結果跟 $|\mathrm{Cl}_{S_5}((123))|$ 相同，這顯示 $\mathrm{Cl}_{S_5}((123))$ 的全部 20 個成員都是 $\mathrm{Cl}_{A_5}((123))$ 的成員。

最後考慮 $\mathrm{Cl}_{S_5}((12345))$，根據上表，$|\mathrm{Cl}_{S_5}((12345))| = 24$，由此根據「定理 7」，可知

$$|\mathrm{C}_{S_5}((12345))| = \frac{|S_5|}{|\mathrm{Cl}_{S_5}((12345))|} = \frac{120}{24} = 5$$

接著要找出 $\mathrm{C}_{S_5}((12345))$ 的 5 個成員，讀者可自行驗證，

$$\mathrm{C}_{S_5}((12345)) = \{I, (12345), (13524), (14253), (15432)\}$$

由於上列成員全是偶排列，上述這個群也就是 $\mathrm{C}_{A_5}((12345))$，因此我們有 $|\mathrm{C}_{A_5}((12345))| = 5$，由此根據「定理 7」，可得

$$|\mathrm{Cl}_{A_5}((12345))| = \frac{|A_5|}{|\mathrm{C}_{A_5}((12345))|} = \frac{60}{5} = 12$$

上述結果 (即 12) 只是 $|\mathrm{Cl}_{S_5}((12345))|$ $(= 24)$ 的一半,這顯示在 $\mathrm{Cl}_{S_5}((12345))$ 的 24 個成員中, 只有一半是 $\mathrm{Cl}_{A_5}((12345))$ 的成員。由於上述推理適用於 S_5 中任何具有五循環結構的排列,所有具有五循環結構但不屬於 $\mathrm{Cl}_{A_5}((12345))$ 的排列必然構成 A_5 的另一個共軛類 (也是含有 12 個成員)[5]。

[5]如要為這個共軛類命名，我們須先找出一個具有五循環結構但不屬於 $\mathrm{Cl}_{A_5}((12345))$ 的排列以作為這個共軛類的代表，但由於我們的目的只是要找出 A_5 的每個共軛類包含「多少」元素 (而非包含「哪些」元素)，所以無需費力找出上述代表，因此以下不擬為這個共軛類命名。

至此我們找到 A_5 共有五個共軛類，它們所含元素的數目分別為：1、15、20、12、12 (這五個數的總和剛好等於 $|A_5| = 60$)。現設 H 是 A_5 的正規子群，那麼根據前面的「定理 8」，$|H|$ 必須是上述五個數的某個組合之和[6]。但根據「拉格朗日定理」(即《感受伽羅瓦：子群與商群》中的公式 (6))，$|H|$ 又必須是 $|A_5|\,(= 60)$ 的因數。從上述五個數，除了 1 和 $1 + 15 + 20 + 12 + 12 = 60$ 這兩個組合之和是 60 的因數外，沒有其他組合之和是 60 的因數。由此可見，$|H|$ 要麼是僅包含 1 個元素的子群 $\{I\}$，要麼是包含 60 個元素的子群 A_5，兩者都是 A_5 的平凡子群，因此 A_5 沒有非平凡正規子群，至此證得 A_5 是單純群。運用數學歸納法，還可證明對任何 $n > 5$, A_n 都是單純群。

最後，我們還要引入以下定理。

定理 9：一個可解群的任何子群都是可解群。

現在我們可以用反證法證明對任何 $n \geq 5$，S_n 都不是可解群，為此，假設 $S_n\,(n \geq 5)$ 是可解群，那麼根據「定理 9」，A_n 也是可解群。另一方面，我們在前面已證得 A_n 也是單純群，由此根據「定理 6」，A_n 應是具有質數階的循環群。但我們有

$$|A_n| = \frac{n!}{2} = n \times (n-1) \times \ldots \times 4 \times 3$$

因此 $|A_n|$ 不可能是質數，上述矛盾顯示 S_n 不可能是可解群。

連結至數學專題
連結至周家發網頁

[6]由於共軛類本質上是等價類，任何兩個相異共軛類之間必然沒有共同元素，因此相異共軛類的并集的元素數目必然是各個共軛類元素數目之和。