感受伽羅瓦：二次方程與複數

本網頁假設讀者已學習了求實係數線性 (即一次) 和二次多項式方程根式解(solution by radicals，即以加、減、乘、除、乘方和開方運算表示的解) 的一般方法，這裡略作溫習。首先，設 a、b 為實數，其中 $a \neq 0$，則線性方程的一般形式為

$$ax + b = 0$$

而上式的解則是

$$x = -\frac{b}{a}$$

其次，設 a、b、c 為實數，其中 $a \neq 0$，則二次方程的一般形式為

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

而上式的解則是

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (2)$$

相信大多數讀者都記得，上式可以通過「配方法」(completing square) 推導而來。但除了配方法外，還有另一種稱為契爾恩豪斯變換(Tschirnhaus Transformation) 的方法，這種方法的特點是設法使原有二次方程 (1) 的二次項係數 a 和一次項係數 b 分別變為 1 和 0，從而使全式變成較易求解的方程，具體方法是先把全式除以 a，然後用 $x = y + k$ 代入 (其中 k 是常數，其具體值待定)：

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\ (y+k)^2 + \frac{b}{a}(y+k) + \frac{c}{a} &= 0 \\ y^2 + \left(2k + \frac{b}{a}\right)y + \left(k^2 + \frac{b}{a}k + \frac{c}{a}\right) &= 0 \end{aligned}$$

如要令上式的一次項係數變為 0，必須有 $2k + \frac{b}{a} = 0$，由此可得 $k = -\frac{b}{2a}$，把此等式代入上式，便可得

$$y^2 + (0)(y) + \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b}{a}\left(-\frac{b}{2a}\right) + \frac{c}{a} = 0$$

$$y^2 + \frac{-b^2+4ac}{4a^2} = 0 \qquad (3)$$

上式就是經化簡的二次方程，其二次項係數和一次項係數分別是 1 和 0。上述方程很容易求解，只需把常數項移至等號右端，然後取 (正負值) 平方根即可：

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a^2} \\ y &= \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \\ &= \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{aligned}$$

上述結果是以 y 作為變項的二次方程 (3) 的解，但由於前面曾設定 $x = y - \frac{b}{2a}$，故可馬上求得原來以 x 作為變項的二次方程 (1) 的解如下：

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{aligned}$$

上述結果跟 (2) 完全相同。

在 (2) 中，$b^2 - 4ac$ 稱為二次方程的判別式(discriminant)，因為它可用來判斷一般二次方程 (1) 的解的性質，以下把此判別式記作 Δ_2。當 $\Delta_2 > 0$ 時，$\sqrt{b^2-4ac}$ 有兩個相異的值，所以 (1) 有兩個相異的實數解。當 $\Delta_2 = 0$ 時，$\sqrt{b^2-4ac} = 0$，所以 (1) 有一個二重實數解 $-\frac{b}{2a}$。當 $\Delta_2 < 0$ 時，$\sqrt{b^2-4ac}$ 沒有實數值，所以 (1) 沒有實數解。可是，如果我們把解的取值範圍推廣到複數(complex number)，則當 $\Delta_2 < 0$ 時，(1) 仍有兩個相異的複數解。由於複數在抽象代數學以至伽羅瓦理論中有非常重要的作用，以下簡介複數的基本知識。

複數是指具有以下形式的數：

$$x + yi \qquad (4)$$

其中 x 和 y 是實數，i 則代表 $\sqrt{-1}$，又稱為虛數單位(imaginary unit)，例如 $1-i$、$2+\sqrt{2}i$ 都是複數。請注意當 (4) 中的 $y = 0$ 時，所得結果是實數，因此實數可被看成複數的特例。類似地，當 (4) 中的 $x = 0$ 時，所得結果稱為純虛數(pure imaginary number)，也可被看成複數的特例。有了複數的概念，便可以處理負數平方根的問題。設 $n < 0$，由於 $n = (-n) \times (-1)$ 並且

$-n > 0$，故有 $\sqrt{n} = \sqrt{-n} \times \sqrt{-1} = \sqrt{-n}i$，例如 $\sqrt{-4} = \sqrt{4} \times \sqrt{-1} = 2i$。因此當 $\Delta_2 < 0$ 時，可知 (1) 有兩個相異的複數解，而且可以根據 (2) 把這兩個複數解具體寫成以下形式：

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}i}{2a} \qquad (5)$$

舉例說，設有二次方程 $x^2 - 2x + 4 = 0$，那麼 $a = 1$、$b = -2$、$c = 4$，故有 $\Delta_2 = (-2)^2 - (4)(1)(4) = -12 < 0$，因此根據 (5)，這個方程的解是：

$$\begin{aligned} x &= \frac{2 \pm \sqrt{12}i}{2} \\ &= 1 \pm \sqrt{3}i \end{aligned}$$

現考慮複數 $x+yi$,我們把 $x-yi$ 稱為該複數的共軛複數(complex conjugate)。在數學上，常使用 $\bar{z}$ 代表複數 z 的共軛複數。由此我們有

$$\overline{x + yi} = x - yi$$

從上式容易看到 $\overline{x - yi} = x + yi$，由此可見，一對具有 $x + yi$ 和 $x - yi$ 形式的複數互為對方的共軛複數。從以上討論亦可見，當 $\Delta_2 < 0$ 時，(1) 有一對互為共軛複數的解。

複數像實數那樣，也可進行加、減、乘、除、乘方、開方等運算，其中加、減、乘和乘方運算跟普通代數的同類運算很相似，這裡可以把 i 當作一個變項 (例如 x) 處理，惟需加上 $i^2 = -1$ 此一條件。舉例說，如欲驗證 $1 - \sqrt{3}i$ 是 $x^2–2x + 4 = 0$ 的解，可以把 $1 - \sqrt{3}i$ 代入該二次方程的變項 x，看看所得結果是否等於 0，計算如下：

$$\begin{aligned} & (1 - \sqrt{3}i)^2–2(1 - \sqrt{3}i) + 4 \\ = & 1^2 + 2(1)(-\sqrt{3}i) + (-\sqrt{3}i)^2 - 2 + 2\sqrt{3}i + 4 \\ = & 1 - 2\sqrt{3}i - 3 - 2 + 2\sqrt{3}i + 4 \\ = & 0 \end{aligned}$$

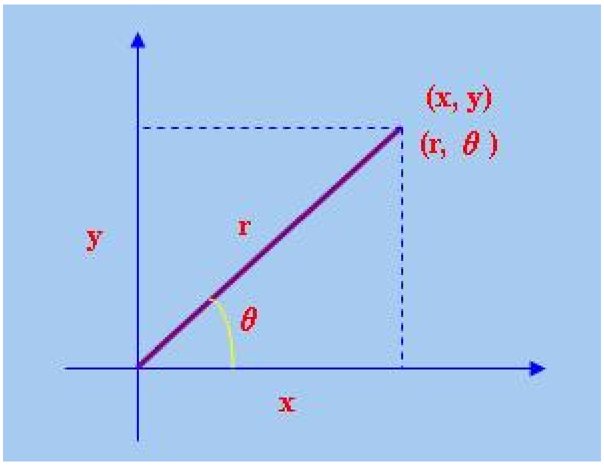
為進行除法，可以把相除的兩個複數寫成分數的形式 $\frac{x+yi}{z+ui}$，然後把此分數乘以 $\frac{z-ui}{z-ui}$，目的是令乘積的分母不再含有 i，以下展示一個計算實例：

$$\begin{aligned} & \frac{1 + 2i}{3 + 4i} \\ = & \left(\frac{1 + 2i}{3 + 4i}\right)\left(\frac{3 - 4i}{3 - 4i}\right) \\ = & \frac{(1 + 2i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} \end{aligned}$$

$$= \frac{11+2i}{25}$$
$$= \frac{11}{25}+\frac{2}{25}i$$

為進行複數的開方運算，須使用一些新概念。正如實數可被看成對應著一維數線上的點，複數也可被看成對應著二維平面上的點，其中 $x+yi$ 對應著點 (x,y)。在此觀點下，實數對應著 x 軸上的點 (因這類數具有 $(x,0)$ 的形式)，純虛數則對應著 y 軸上的點 (因這類數具有 $(0,y)$ 的形式)。平面上的點除了用「笛卡爾坐標」(Cartesian coordinate)(即以通常的 x 軸和 y 軸確定的坐標) 表示外，還可用「極坐標」(polar coordinate) 表示。「極坐標」由兩個實數組成，第一個數是該點與「原點」之間的距離，可稱為 r 坐標；第二個數則是該點與「原點」的連線與正 x 軸所成的夾角，可稱為 θ 坐標，這個角度須表達為區間 $[0,2\pi)$ 上的實數[1]。把上述概念應用於複數，上述 r 坐標也稱為某複數 z 的模(modulus)，記作 $|z|$；θ 坐標則稱為 z 的主幅角(principal argument)，記作 $\mathrm{Arg}(z)$。

由於有兩種坐標表達法：「笛卡爾坐標」(x,y) 和「極坐標」(r,θ)，我們須找出這兩種坐標之間的轉換公式。試看下圖：



運用普通幾何學知識，容易得到以下轉換公式：

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \tag{6}$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{x}{r}\right) \tag{7}$$

[1]本網頁採用「弧度制」(radian measure) 表示角度，在「弧度制」下，角度可無需標示單位 (不像「角度制」(degree measure) 那樣要標出 °)，但如要強調「弧度制」，也可用 rad 標示，因此在表示角度時，π 與 $\pi\, rad$ 有相同意思。「角度制」與「弧度制」的換算關係是 $180^\circ = \pi$，其他角度照此按比例計算，例如 $360^\circ = 2\pi$、$90^\circ = \frac{\pi}{2}$ 等。

上式中的 $\cos^{-1}$ 代表三角函數 cos 的逆運算，但由於 cos 不是「一一對應函數」，同一個實數 x 可有無限多個 $\cos^{-1}(x)$，因此這裡規定 $\cos^{-1}(\frac{x}{r})$ 是因應複數所對應的點所在的象限而確定的位於區間 $[0, 2\pi)$ 內的角度。有了以上的轉換公式，便可以把任一複數寫成以下兩種形式：

$$x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (8)$$

此外，我們還需要以下的定理：

定理 1 (棣美弗定理 de Moivre's Theorem)：

$$(r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

在上述定理中，n 可以是任意有理數，所以可應用於複數開方運算。以下顯示如何求 $1-\sqrt{3}i$ 的平方根，首先根據 (7)，可求得 $r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ 和 $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5\pi}{3}$(由於 $1-\sqrt{3}i$ 所對應的點 $(1, -\sqrt{3})$ 位於第四象限，所以這裡把 $1-\sqrt{3}i$ 的主幅角定為 $\frac{5\pi}{3}$)。由此根據「定理 1」，有

$$\begin{aligned}
&\left(2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\
= \;& 2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\times\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\times\frac{5\pi}{3}\right)\right) \\
= \;& \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) \\
= \;& -\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i
\end{aligned}$$

我們知道在平面上，θ 與 $\theta+2\pi$ 實際表示同一個角度，因此可以把上述運算中的角度改為 $\frac{5\pi}{3}+2\pi = \frac{11\pi}{3}$。換句話說，$1-\sqrt{3}i$ 也可表示為 $2(\cos\frac{11\pi}{3}+i\sin\frac{11\pi}{3})$。現在讓我們看看，如用這個表達式進行上述開平方運算，會得到甚麼結果：

$$\begin{aligned}
&\left(2\left(\cos\frac{11\pi}{3} + i\sin\frac{11\pi}{3}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\
= \;& \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) \\
= \;& \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i
\end{aligned}$$

上述結果 $\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ 正好是前一運算結果 $-\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ 的負值，而我們知道若某數 n 是另一個數 x 的平方根，則 $-n$ 也是 x 的平方根。請注意如果把上述運算中的角度改為 $\frac{5\pi}{3}+4\pi$、$\frac{5\pi}{3}+6\pi$、$\frac{5\pi}{3}+8\pi \ldots$，只會重覆得到上述兩

個平方根。由此可見，利用上述方法，只須分別用角度 θ 和 $\theta+2\pi$ 進行兩次運算，便可得到任意複數的所有平方根。

一般地，設複數 z 可表示成 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的形式，那麼 z 有以下 n 個 n 次方根：

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\ k=0,1,2,\cdots n-1 \qquad (9)$$

舉例說，為求 1 的 n 次方根，先把 1 寫成 $1(\cos 0+i\sin 0)$ 的形式，然後運用上式進行計算：

$$\begin{aligned}
& \sqrt[n]{1}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{n}+i\sin\frac{0+2k\pi}{n}\right),\ k=0,1,2,\cdots n-1 \\
= \ & 1,\ \cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},\ \cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n},\ \cdots \\
& \cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}
\end{aligned}$$

請注意上列 n 個 n 次方根都可被看成 $\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ 的某個冪次，這是因為根據「定理 1」，有

$$\begin{aligned}
\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^0 &= 1 \\
\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^1 &= \cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n} \\
\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^2 &= \cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n} \\
&\vdots \\
\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{n-1} &= \cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}
\end{aligned}$$

因此如用 ω_n 代表 1 的主幅角為 $\frac{2\pi}{n}$ 的 n 次方根 (即 $\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$)，那麼 1 的 n 個 n 次方根可以寫成

$$1,\omega_n,{\omega_n}^2,\cdots{\omega_n}^{n-1} \qquad (10)$$

1 的 n 次方根可以幫助求得其他複數的 n 次方根, 這是因為根據三角恆等式 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ 和 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$, 可以把 (9) 改寫為 (在以下各式中，$k=0,1,2,\cdots n-1$)：

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}\cos\frac{2k\pi}{n}-\sin\frac{\theta}{n}\sin\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\cos\frac{2k\pi}{n}+i\cos\frac{\theta}{n}\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right)+i\sin\frac{2k\pi}{n}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right)\right)\\
&= r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\\
&= r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right){\omega_n}^k
\end{aligned}
$$

上式告訴我們，為求複數 z 的 n 個 n 次方根，可以先求 z 的主幅角為 $\frac{\theta}{n}$ 的 n 次方根 (其實任何一個 n 次方根都可以)，然後把此一結果逐一乘以 ω_n 的各個冪次。現在如用 $\sqrt[n]{z}$ 代表 z 的主 n 次方根(principal nth root)(z 的主 n 次方根是指 z 的 n 次方根中的唯一一個實數，如無唯一一個實數，則為具有最小主幅角的那個[2])，那麼 z 的 n 個 n 次方根可以寫成

$$\sqrt[n]{z},\ \omega_n(\sqrt[n]{z}),\ {\omega_n}^2(\sqrt[n]{z}),\ \cdots\ {\omega_n}^{n-1}(\sqrt[n]{z}) \qquad (11)$$

舉例說，如欲求 $8i$ 的三個立方根，可以先把 $8i$ 寫成 $8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ 的形式，由此容易求得 $8i$ 的主幅角為 $\frac{\pi}{6}$ 的立方根 (即 $\sqrt[3]{8i}$) 為

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{8i} &= 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\\
&= \sqrt{3}+i
\end{aligned}
$$

另一方面，容易計算 1 的主幅角為 $\frac{2\pi}{3}$ 的立方根 (即 ω_3) 為

$$
\begin{aligned}
\omega_3 &= \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\\
&= -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}
$$

根據 (11)，$8i$ 的三個立方根是

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{8i} &= \sqrt{3}+i\\
\omega_3(\sqrt[3]{8i}) &= \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(\sqrt{3}+i)\\
&= -\sqrt{3}+i\\
{\omega_3}^2(\sqrt[3]{8i}) &= \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(\sqrt{3}+i)\\
&= -2i
\end{aligned}
$$

[2]主 n 次方根的定義之所以如此繁複，是因為要遷就以下事實：我們習慣了 $\sqrt[3]{-1}=-1$，請注意在 -1 的三個立方根 (即 $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$、$-1$ 和 $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$) 中，$-1$ 不是具有最小幅角的那個，但卻是唯一一個實數。另請注意，在上述定義下，如果 x 是實數，則必有 $\sqrt[3]{-x}=-\sqrt[3]{x}$。

(10) 中所列 1 的 n 個 n 次方根具有以下重要性質：

定理 2：

$$1+\omega_n+{\omega_n}^2+\cdots{\omega_n}^{n-1}=0$$

上式不難證明，因為我們有

$$\begin{aligned}(1+\omega_n+{\omega_n}^2+\cdots{\omega_n}^{n-1})(\omega_n-1) &= {\omega_n}^n-1\\ 1+\omega_n+{\omega_n}^2+\cdots{\omega_n}^{n-1} &= \frac{{\omega_n}^n-1}{\omega_n-1}\\ &= \frac{1-1}{\omega_n-1}\\ &= 0\end{aligned}$$

上面倒數第二行成立，是因為 ω_n 是 1 的主幅角為 $\frac{2\pi}{n}$ 的 n 次方根，故有 ${\omega_n}^n=1$ 並且 $\omega_n\neq 1$。

有趣的是，不僅 1 的 n 個 n 次方根的和等於 0，事實上任何複數 z 的 n 個 n 次方根的和都等於 0，這是因為根據 (11)，z 的 n 個 n 次方根的和等於

$$\begin{aligned}&\sqrt[n]{z}+\omega_n(\sqrt[n]{z})+{\omega_n}^2(\sqrt[n]{z})+\cdots{\omega_n}^{n-1}(\sqrt[n]{z})\\ =\;&\sqrt[n]{z}\,(1+\omega_n+{\omega_n}^2+\cdots{\omega_n}^{n-1})\\ =\;&0\end{aligned}$$

舉例說，前面已求得 $8i$ 的三個立方根，這三個立方根的和是

$$(\sqrt{3}+i)+(-\sqrt{3}+i)+(-2i)=0$$

連結至數學專題
連結至周家發網頁