數學示例：基本矩陣

我們在《數學示例：基本解集》中介紹了一種求解「常係數齊次常微分／差分方程」的方法，本文主旨是介紹求解「1 階常係數齊次常微分／差分方程組」(以下簡稱「常係數齊次方程組」) 的方法。惟請注意，以下介紹的方法只適用於能寫成以下正態形式(normal form) 的常係數齊次方程組：

$$\phi(F) - KF = 0 \qquad (1)$$

其中 ϕ 代表算子 D 或 E，F 代表由 n 個未知函數 $f_1(x)$、...、$f_n(x)$ 組成的 $n \times 1$ 列矩陣，即 $F = [f_1(x), \ldots, f_n(x)]^T$，$\phi(F)$ 代表把 ϕ 作用於 F 中的每一項的結果，K 代表一個 $n \times n$ 實數方陣，0 代表一個 $n \times 1$ 零矩陣。

舉例說，以下方程組 (大致等於《數學示例：方程與解》中的 (46))：

$$\begin{cases} Df(x) - 2f(x) - 3g(x) = 0 \\ Dg(x) - 2f(x) - g(x) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

便可以寫成以下正態形式：

$$D\left(\begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

正如在求解常係數齊次方程時，要借用方程式論中的多項式方程 (即《數學示例：基本解集》中的「輔助方程」)，在求解常係數齊次方程組時，也要借用線性代數中的特徵值(eigenvalue) 和特徵向量(eigenvector)。我們在《數學示例：特徵值與譜》中介紹了特徵值和特徵向量的概念。簡言之，給定一個 $n \times n$ 方陣 K，其特徵值就是以下以 λ 作為變項的 n 次多項式方程的根，這個方程稱為特徵方程(characteristic equation)：

$$\det(K - \lambda I_n) = 0 \qquad (4)$$

其中 det 代表「行列式」(determinant)，I_n 則代表 $n \times n$ 單位矩陣。設 λ 為 K 的一個特徵值，那麼對應於 λ 的特徵向量是滿足下式的 $n \times 1$ 非零列矩陣 V：

$$(K - \lambda I_n)V = 0 \qquad (5)$$

舉例說，設給定以下 2×2 方陣：

$$K=\left[\begin{array}{cc}2 & 3\\ 2 & 1\end{array}\right] \qquad (6)$$

根據 (4)，K 的特徵值是以下特徵方程的根：

$$\begin{array}{rcl}\det\left(\left[\begin{array}{cc}2-\lambda & 3\\ 2 & 1-\lambda\end{array}\right]\right) & = & 0\\ \lambda^2-3\lambda-4 & = & 0\end{array}$$

容易求得上述方程的兩個根為 $\lambda_1=-1$ 和 $\lambda_2=4$，此即 K 的兩個特徵值。

為求 K 對應於 λ_1 的特徵向量，我們把 K、λ_1 和 $V=[v_1,v_2]^T$ 代入 (5)：

$$\left[\begin{array}{cc}3 & 3\\ 2 & 2\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}v_1\\ v_2\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}0\\ 0\end{array}\right]$$

上式實際等於一個 1 次方程組，其解是 $v_2=-v_1$，這個解有一個「自由度」(degree of freedom)，即可以自由選擇 v_1 的值，但當選定這個值後，v_2 的值便隨之而確定。現在我們不妨選擇 $v_1=1$，由此必有 $v_2=-1$，因此 K 對應於 λ_1 的一個特徵向量是 $V_1=[1,-1]^T$ [1]。類似地，為求 K 對應於 λ_2 的特徵向量，我們把 K、λ_2 和 $V=[v_1,v_2]^T$ 代入 (5)：

$$\left[\begin{array}{cc}-2 & 3\\ 2 & -3\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}v_1\\ v_2\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}0\\ 0\end{array}\right]$$

上式也等於一個 1 次方程組，其解是 $v_2=\frac{2}{3}v_1$，因此 K 對應於 λ_2 的一個特徵向量是 $V_2=[3,2]^T$。

如前所述，特徵方程 (4) 是一個 n 次多項式方程。根據「代數基本定理」，(4) 有 n 個根 (包括重覆的根)。正如輔助方程的根那樣，特徵方程的根可提供 (1) 的解，以下讓我們看看在不同情況下這些解的形式。最簡單的情況是 (4) 有 n 個相異的一重實數根 (即特徵值) λ_1、...、λ_n，並設每個特徵值 λ_i 各對應著一個特徵向量 V_i $(1\le i\le n)$。在此情況下，若 $\phi=D$，則 $V_ie^{\lambda_ix}$ 是 (1) 的一組解；若 $\phi=E$，則 $V_i{\lambda_i}^x$ 是 (1) 的一組解 (請讀者自行驗證這一點)，由此我們共有 n 組解，而且這些解是線性獨立的。因此若 (1) 是微分方程，其通解具有以下形式：

$$F=c_1V_1e^{\lambda_1x}+\ldots+c_nV_ne^{\lambda_nx} \qquad (7)$$

[1]對應於 λ_1 的特徵向量並不唯一，例如 $[-2,2]^T$、$[\cos 1,-\cos 1]^T$ 等等也是對應於 λ_1 的特徵向量。以下讀者將會看到，微分／差分方程組的通解帶有任意常數，因此在寫出微分／差分方程組的通解時，可以任取這些特徵向量中的一個。

若 (1) 是差分方程，則其通解具有以下形式：

$$F = c_1 V_1 {\lambda_1}^x + \ldots + c_n V_n {\lambda_n}^x \qquad (8)$$

我們也可以把上述 n 個線性獨立的解組成以下矩陣：

$$[V_1 e^{\lambda_1 x} \ldots V_n e^{\lambda_n x}] \qquad (9)$$

或

$$[V_1 {\lambda_1}^x \ldots V_n {\lambda_n}^x] \qquad (10)$$

以上兩個矩陣各包含 n 列，而每列又各包含 n 行，所以是 $n \times n$ 方陣，稱為基本矩陣(fundamental matrix)。如用 M 代表基本矩陣，那麼 (1) 的通解可以非常簡潔地寫成以下形式：

$$F = MC \qquad (11)$$

其中 $C = [c_1, \ldots, c_n]^T$ 是由 n 個任意常數組成的 $n \times 1$ 列矩陣。此外，可以證明基本矩陣具有以下定理所述的性質。

定理 1：設 M 為常係數齊次方程組 (1) 的解，則

(i) M 是可逆矩陣，即存在 M^{-1}

(ii) M 滿足 $\phi(M) - KM = 0$，其中 $\phi(M)$ 代表把 ϕ 作用於 M 中每一項的結果

舉例說，考慮前面提過的微分方程組 (3)。該方程組具有 (1) 的形式，其中的 K 就是前面討論過的 2×2 方陣 (6)。由於我們在前面已計算這個方陣的特徵值和特徵向量，根據 (8)，可知 (3) 的通解為

$$\begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-x} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{4x} \qquad (12)$$

根據 (9) 和 (11)，也可以把以上結果寫成以下包含「基本矩陣」的形式：

$$\begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-x} & 3e^{4x} \\ -e^{-x} & 2e^{4x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \qquad (13)$$

為驗證「定理 1(ii)」，我們進行以下計算：

$$\begin{aligned} & D\left(\begin{bmatrix} e^{-x} & 3e^{4x} \\ -e^{-x} & 2e^{4x} \end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-x} & 3e^{4x} \\ -e^{-x} & 2e^{4x} \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} -e^{-x} & 12e^{4x} \\ e^{-x} & 8e^{4x} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -e^{-x} & 12e^{4x} \\ e^{-x} & 8e^{4x} \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

若 (4) 有一對互為共軛複數的根，那麼這對根可寫成 $a \pm bi$ 的形式，也可寫成 $r(\cos\theta \pm i\sin\theta)$ 的形式。可以證明，對應於這對互相共軛的特徵值是一對互相共軛的特徵向量。具體地說，設對應於 $a+bi$ 的特徵向量可寫成 $U+iV$ 的形式，那麼對應於 $a-bi$ 的特徵向量便是 $U-iV$ (其中 U 和 V 代表由實數組成的 $n \times 1$ 列矩陣)。根據前面的討論，在此情況下，若 (1) 是微分方程，利用關係 $e^{(a+bi)x} = e^{ax}(\cos(bx) + i\sin(bx))$，可得到其中一個解如下：

$$\begin{aligned} & (U+iV)e^{(a+bi)x} \\ = \;& (U+iV)(e^{ax}(\cos(bx)+i\sin(bx))) \\ = \;& e^{ax}(U\cos(bx) - V\sin(bx)) + ie^{ax}(U\sin(bx)+V\cos(bx)) \end{aligned} \tag{14}$$

同理，可得到另一個解如下：

$$(U-iV)e^{(a-bi)x} = e^{ax}(U\cos(bx)-V\sin(bx))-ie^{ax}(U\sin(bx)+V\cos(bx)) \tag{15}$$

若 (1) 是差分方程，利用關係 $(r(\cos\theta + i\sin\theta))^x = r^x(\cos(\theta x) + i\sin(\theta x))$，可得到其中一個解如下：

$$\begin{aligned} & (U+iV)(r(\cos\theta + i\sin\theta))^x \\ = \;& (U+iV)r^x(\cos(\theta x)+i\sin(\theta x)) \\ = \;& r^x(U\cos(\theta x) - V\sin(\theta x)) + ir^x(U\sin(\theta x)+V\cos(\theta x)) \end{aligned} \tag{16}$$

同理，可得到另一個解如下：

$$(U-iV)(r(\cos\theta-i\sin\theta))^x = r^x(U\cos(\theta x)-V\sin(\theta x))-ir^x(U\sin(\theta x)+V\cos(\theta x)) \tag{17}$$

可是，(14) – (17) 都包含虛數單位 i，為去掉它，可以仿照《數學示例：基本解集》的做法，對 (14) – (17) 進行適當的線性組合，以得到不含 i 的解，讀者請自行驗證以下結果：

$$\frac{1}{2}(U+iV)e^{(a+bi)x} + \frac{1}{2}(U-iV)e^{(a-bi)x} = e^{ax}(U\cos(bx) - V\sin(bx))$$

$$-\frac{i}{2}(U+iV)e^{(a+bi)x} + \frac{i}{2}(U-iV)e^{(a-bi)x} = e^{ax}(U\sin(bx) + V\cos(bx))$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(U+iV)(r(\cos\theta+i\sin\theta))^x + \frac{1}{2}(U-iV)(r(\cos\theta-i\sin\theta))^x \\ = \;& r^x(U\cos(\theta x) - V\sin(\theta x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{i}{2}(U+iV)(r(\cos\theta+i\sin\theta))^x + \frac{i}{2}(U-iV)(r(\cos\theta-i\sin\theta))^x \\ = \;& r^x(U\sin(\theta x) + V\cos(\theta x)) \end{aligned}$$

因此當 (1) 是微分方程時，$e^{ax}(U\cos(bx)-V\sin(bx))$ 和 $e^{ax}(U\sin(bx)+V\cos(bx))$ 是不含 i 的線性獨立的解；而當 (1) 是差分方程時,$r^x(U\cos(\theta x)-V\sin(\theta x))$ 和 $r^x(U\sin(\theta x)+V\cos(\theta x))$ 是不含 i 的線性獨立的解。

舉例說，考慮以下差分方程組：

$$E\left(\begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \\ h(x) \end{bmatrix}\right)-\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -9 & 2 & 1 \\ -5 & -5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \\ h(x) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

讀者請自行驗證，上式中的 3×3 方陣 (以下記作 K) 有一個實數特徵值 $\lambda_1=-1$ 和兩個互相共軛的複數特徵值 $\lambda_2=2+2i$ 和 $\lambda_3=2-2i$。不難計算出，K 對應於 λ_1 的一個特徵向量是 $V_1=[1,2,3]^T$，而 K 對應於 λ_2 的一個特徵向量是 $V_2=[1,5+2i,5+10i]^T$，由此馬上知道，K 對應於 λ_3 的一個特徵向量是 $V_3=[1,5-2i,5-10i]^T$。由於 λ_2 可寫成 $2\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4}))$ 的形式，而 V_2 可寫成 $[1,5,5]^T+i[0,2,10]^T$ 的形式，根據前面的討論，可知 (18) 的通解為

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \\ h(x) \end{bmatrix} &= c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}(-1)^x \\ &\quad +c_2(2\sqrt{2})^x\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)-\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right) \\ &\quad +c_3(2\sqrt{2})^x\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)+\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)\end{aligned} \tag{19}$$

我們也可把以上結果寫成包含基本矩陣的形式，其中的基本矩陣為：

$$\begin{bmatrix} (-1)^x & (2\sqrt{2})^x\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) & (2\sqrt{2})^x\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) \\ 2\times(-1)^x & (2\sqrt{2})^x\left(5\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)-2\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right) & (2\sqrt{2})^x\left(5\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)+2\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right) \\ 3\times(-1)^x & (2\sqrt{2})^x\left(5\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)-10\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right) & (2\sqrt{2})^x\left(5\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)+10\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right) \end{bmatrix} \tag{20}$$

若 (4) 有 k ($k>1$) 重根 λ (以下把這個 λ 稱為「k 重特徵值」)，其情況可以頗為複雜，以下只討論兩種最簡單的情況：(i) 通過求解 (5)，可以求得 k 個對應於 λ 的線性獨立的特徵向量 V_1、...、V_k；(ii) 通過求解 (5)，只能求得一個對應於 λ 的線性獨立的特徵向量。以下首先討論情況 (i)。由於我們有 k 重特徵值 λ 和 k 個線性獨立的特徵向量 V_1、...、V_k，因此可以運用前面介紹的方法從 λ 和 V_1、...、V_k 得到 k 組線性獨立的解。

舉例說，考慮以下微分方程組：

$$D\left(\begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \\ h(x) \end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \\ h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

讀者請自行驗證，上式中的 3×3 方陣 (以下記作 K) 有一個一重特徵值 $\lambda_1 = 5$ 和一個二重特徵值 $\lambda_2 = -1$。不難計算出，K 對應於 λ_1 的一個特徵向量是 $V_1 = [1, -1, 1]^T$。為求 K 對應於 λ_2 的特徵向量，我們把 K、λ_2 和 $V = [v_1, v_2, v_3]^T$ 代入 (5)，由此可解得 $v_1 = v_2 - v_3$，這個解有兩個自由度，即可以自由選擇 v_2 和 v_3 的值，但當選定這兩個值後，v_1 的值便隨之而確定。現在不妨先選擇 $v_2 = 1, v_3 = 0$，由此必有 $v_1 = 1$；接著再選擇 $v_2 = 0, v_3 = 1$，由此必有 $v_1 = -1$。因此 K 對應於 λ_2 的兩個特徵向量是 $V_2 = [1, 1, 0]^T$ 和 $V_3 = [-1, 0, 1]^T$，運用線性代數中的方法，可以證明這兩個特徵向量是線性獨立的。根據 (7)，可知 (21) 的通解為

$$\begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \\ h(x) \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5x} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-x} + c_3\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-x} \tag{22}$$

我們也可把以上結果寫成包含基本矩陣的形式，其中的基本矩陣為：

$$\begin{bmatrix} e^{5x} & e^{-x} & -e^{-x} \\ -e^{5x} & e^{-x} & 0 \\ e^{5x} & 0 & e^{-x} \end{bmatrix} \tag{23}$$

接著討論情況 (ii)，即我們只能求得一個對應於 k 重特徵值 λ 的特徵向量。在此情況下，可以證明，若 (1) 是微分方程組，它有以下 k 組對應於 λ 的線性獨立的解：

$$\begin{aligned} &F_1 = V_1 e^{\lambda x}, \\ &F_2 = (V_2 + V_1 x)e^{\lambda x}, \\ &F_3 = \left(V_3 + V_2 x + \tfrac{1}{2!}V_1 x^2\right) e^{\lambda x}, \\ &\ldots \\ &F_k = \left(V_k + V_{k-1}x + \tfrac{1}{2!}V_{k-2}x^2 + \ldots + \tfrac{1}{(k-1)!}V_1 x^{k-1}\right) e^{\lambda x} \end{aligned} \tag{24}$$

若 (1) 是差分方程組，則它有以下 k 組對應於 λ 的線性獨立的解：

$$\begin{aligned} &F_1 = V_1 \lambda^x, \\ &F_2 = (V_2 + V_1 x)\lambda^x, \\ &F_3 = \left(V_3 + V_2 x + \tfrac{1}{2!}V_1 x^2\right) \lambda^x, \\ &\ldots \\ &F_k = \left(V_k + V_{k-1}x + \tfrac{1}{2!}V_{k-2}x^2 + \ldots + \tfrac{1}{(k-1)!}V_1 x^{k-1}\right) \lambda^x \end{aligned} \tag{25}$$

其中的 V_1、...、V_k 是待定的 $n\times 1$ 列矩陣。接著把以上列出的 F_k 代入 (1)，並從而解出 V_1、...、V_k，便可得到所需的解。

如果把以上處理 k 重特徵值的方法與《數學示例：基本解集》中處理輔助方程的 k 重根的方法作一比較，可以看到前者比後者複雜得多；而且如果出現前述 (i) 或 (ii) 以外的情況，其處理方法便更為複雜，這裡不擬作出介紹。

舉例說，考慮以下差分方程組：

$$E\left(\begin{bmatrix} f(x)\\ g(x)\\ h(x)\end{bmatrix}\right)-\begin{bmatrix} 2 & 1 & 6\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} f(x)\\ g(x)\\ h(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \qquad (26)$$

讀者請自行驗證，上式中的 3×3 方陣 (以下記作 K) 有一個三重特徵值 $\lambda=2$。為求對應於 λ 的特徵向量，我們把 K、λ 和 $V=[v_1,v_2,v_3]^T$ 代入 (5), 由此可解得 $v_2=v_3=0$。這個解只有一個自由度, 即只可以自由選擇 v_1 的值,設我們選擇 $v_1=1$,因此利用 (5) 只能得到一個特徵向量 $V=[1,0,0]^T$。

在此情況下，我們要借用 (25) 解題，假設 (26) 的某組解具有 (25) 中 F_3 的形式。把 F_3 代入 $E(F_3)-KF_3=0$，可得

$$\begin{aligned}&\lambda V_3\lambda^x+\lambda V_2x\lambda^x+\lambda V_2\lambda^x+\frac{1}{2}\lambda V_1x^2\lambda^x+\lambda V_1x\lambda^x+\frac{1}{2}\lambda V_1\lambda^x\\ &-KV_3\lambda^x-KV_2x\lambda^x-\frac{1}{2}KV_1x^2\lambda^x=0\end{aligned}$$

把上式中包含 $x^2\lambda^x$、$x\lambda^x$ 和 λ^x 的項的係數分別抽出來並加以整理，可得到以下方程組：

$$\left\{\begin{array}{l}(K-\lambda I_3)V_1=0\\ (K-\lambda I_3)V_2=\lambda V_1\\ (K-\lambda I_3)V_3=\lambda V_2+\frac{1}{2}\lambda V_1\end{array}\right. \qquad (27)$$

接下來要用上述方程組解出 V_1、V_2 和 V_3。請注意上面第一個方程其實就是求特徵向量的方程 (請把該方程與 (5) 比較)，由於我們在前面已求得 K 對應於 λ $(=2)$ 的特徵向量是 $[1,0,0]^T$，因此我們有 $V_1=[1,0,0]^T$。為求 V_2，我們把 K、λ、$V_2=[v_1,v_2,v_3]^T$ 和 V_1 代入 (27) 中的第二個方程：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

由此可解得 $v_2=2, v_3=0$，這個解有一個自由度，即可以自由選擇 v_1 的值，設我們選擇 $v_1=0$，因此我們有 $V_2=[0,2,0]^T$。為求 V_3，我們把 K、

λ、$V_3=[v_1,v_2,v_3]^T$、V_1 和 V_2 代入 (27) 中的第三個方程：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由此可解得 $v_2=-\frac{19}{5}, v_3=\frac{4}{5}$，這個解有一個自由度，即可以自由選擇 v_1 的值，設我們選擇 $v_1=0$，因此我們有 $V_3=[0,-\frac{19}{5},\frac{4}{5}]^T$。

至此求得 K 對應於 λ 的三個向量 V_1、V_2 和 V_3[2]，把這三個向量代入 (25)，便可得到 (26) 的三個線性獨立的解，由此可得 (26) 的通解為

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \\ h(x) \end{bmatrix} &= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} 2^x + c_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x \right) 2^x \\ &\quad + c_3 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{19}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} x + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x^2 \right) 2^x \qquad (28) \end{aligned}$$

我們也可把以上結果寫成包含基本矩陣的形式，其中的基本矩陣為：

$$\begin{bmatrix} 2^x & x2^x & \frac{1}{2}x^2 2^x \\ 0 & 2\times 2^x & -\frac{19}{5}\times 2^x + 2x2^x \\ 0 & 0 & \frac{4}{5}\times 2^x \end{bmatrix} \qquad (29)$$

最後讓我們看一個涉及二重複數特徵值的例子，考慮以下微分方程組：

$$D\left(\begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \\ h(x) \\ k(x) \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \\ h(x) \\ k(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (30)$$

讀者請自行驗證，上式中的 4×4 方陣 (以下記作 K) 有一對互相共軛的二重複數特徵值 $\lambda_1=i$ 和 $\lambda_2=-i$。為求對應於 λ_1 的特徵向量，我們把 K、λ_1 和 $V=[v_1,v_2,v_3,v_4]^T$ 代入 (5)，由此可解得 $v_1=iv_4, v_2=v_4, v_3=iv_4$。這個解只有一個自由度，即只可以自由選擇 v_4 的值，設我們選擇 $v_4=1$，因此利用 (5) 只能得到一個特徵向量 $V_1=[i,1,i,1]^T$。

在此情況下，我們要借用 (24) 解題，假設 (30) 的某組解具有 (24) 中 F_2 的形式 (以 λ_1 取代該式中的 λ)。把 F_2 代入 $D(F_2)-KF_2=0$，可得

$$\lambda_1 V_2 e^{\lambda_1 x} + V_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 V_1 x e^{\lambda_1 x} - KV_2 e^{\lambda_1 x} - KV_1 x e^{\lambda_1 x} = 0$$

[2]在這三個向量中，V_1 是 K 對應於 λ 的特徵向量，V_2 和 V_3 則可稱為 K 對應於 λ 的「廣義特徵向量」(generalized eigenvector)。

把上式中包含 $xe^{\lambda_1 x}$ 和 $e^{\lambda_1 x}$ 的項的係數分別抽出來並加以整理，可得到以下方程組：

$$\begin{cases} (K-\lambda_1 I_4)V_1 = 0 \\ (K-\lambda_1 I_4)V_2 = V_1 \end{cases} \qquad (31)$$

接下來要用上述方程組解出 V_1 和 V_2。請注意上面第一個方程其實就是求特徵向量的方程，而我們在前面已求得 K 對應於 λ_1 $(=i)$ 的特徵向量，即 $V_1 = [i,1,i,1]^T$。為求 V_2，我們把 K、λ_1、$V_2 = [v_1,v_2,v_3,v_4]^T$ 和 V_1 代入 (31) 中的第二個方程：

$$\begin{bmatrix} -i & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}$$

由此可解得 $v_1 = -1 + iv_4, v_2 = v_4 + 2i, v_3 = 1 + iv_4$，這個解有一個自由度，即可以自由選擇 v_4 的值，設我們選擇 $v_4 = 0$，因此我們有 $V_2 = [-1,2i,1,0]^T$。

至此求得 K 對應於 λ_1 $(=i)$ 的兩個向量 V_1 和 V_2，讀者請自行驗證，沿用上述方法，可求得 K 對應於 λ_2 $(=-i)$ 的兩個向量 $W_1 = [-i,1,-i,1]^T$ 和 $W_2 = [-1,-2i,1,0]^T$。請注意如果我們把 V_1 和 V_2 寫成 $V_1 = [0,1,0,1]^T + i[1,0,1,0]^T$ 和 $V_2 = [-1,0,1,0]^T + i[0,2,0,0]^T$，那麼我們有 $W_1 = [0,1,0,1]^T - i[1,0,1,0]^T$ 和 $W_2 = [-1,0,1,0]^T - i[0,2,0,0]^T$。上述結果證實了前面提過的一個事實：對應於互相共軛的特徵值是互相共軛的特徵向量。

根據 (24)，可知 (30) 有以下四組線性獨立的解：$V_1 e^{ix}$、$(V_2 + V_1 x)e^{ix}$、$W_1 e^{-ix}$ 和 $(W_2 + W_1 x)e^{-ix}$。以上四組解都包含虛數單位 i，但我們可以沿用前面介紹的方法，即對這四組解進行適當的線性組合，以去掉 i，例如

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(V_2 + V_1 x)e^{ix} + \frac{1}{2}(W_2 + W_1 x)e^{-ix} \\
= \ & \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)x\right)(\cos x + i\sin x) \\
& + \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - i\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - i\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)x\right)(\cos x - i\sin x) \\
= \ & \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}x\right)\cos x - \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}x\right)\sin x
\end{aligned}$$

讀者請自行驗證，經上述計算後，便可求得 (30) 的通解為

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \\ h(x) \\ k(x) \end{bmatrix} &= c_1 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos x - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin x \right) + c_2 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos x \right) \\
&\quad + c_3 \left(\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x \right) \cos x - \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x \right) \sin x \right) \\
&\quad + c_4 \left(\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x \right) \sin x + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x \right) \cos x \right) \qquad (32)
\end{aligned}$$

我們也可把以上結果寫成包含基本矩陣的形式，其中的基本矩陣為：

$$\begin{bmatrix} -\sin x & \cos x & -\cos x - x\sin x & -\sin x + x\cos x \\ \cos x & \sin x & -2\sin x + x\cos x & 2\cos x + x\sin x \\ -\sin x & \cos x & \cos x - x\sin x & \sin x + x\cos x \\ \cos x & \sin x & x\cos x & x\sin x \end{bmatrix} \qquad (33)$$

連結至數學專題
連結至周家發網頁