

數學示例：基本形式係數

我們在《數學示例：切空間與可定向性》中介紹了曲面坐標卡的一階偏導數的兩個用途—用來確定曲面於某點處的切空間的基底和曲面單位法向量。但坐標卡一階導數的用途遠不只此。此外，坐標卡的二階導數也有其用途。這些導數還可以構成微分幾何中的重要概念—「第一基本形式係數」和「第二基本形式係數」¹。

設 S 為曲面， q 為其上一點，下式為涵蓋 q 的 S 的坐標卡，並且 $q = X(u_1, u_2)$ ²：

$$X : E \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; X(u_1, u_2) = (x(u_1, u_2), y(u_1, u_2), z(u_1, u_2)) \quad (1)$$

根據《數學示例：切空間與可定向性》中的「定理 1」，一階偏導數 $\frac{\partial X}{\partial u_1}(u_1, u_2)$ 和 $\frac{\partial X}{\partial u_2}(u_1, u_2)$ 構成 S 於 q 點處的切空間的基底。現在從這兩個向量中選兩個出來（可以選取同一個向量）以進行「點積」（dot product）運算，並把運算結果記作 g_{ij} ，其定義如下：

$$g_{ij}(u_1, u_2) = \frac{\partial X}{\partial u_i}(u_1, u_2) \cdot \frac{\partial X}{\partial u_j}(u_1, u_2) \quad (2)$$

我們把上式中的 g_{ij} 稱為**第一基本形式係數** (coefficient of first fundamental form)³。由於在上式中， $i, j \in \{1, 2\}$ ，理論上共有四個第一基本形式係數： g_{11} 、 g_{12} 、 g_{21} 和 g_{22} 。可是，根據點積的一般定義：若 v 和 w 為向量，則

$$v \cdot w = \|v\| \|w\| \cos \theta \quad (3)$$

¹微分幾何中其實還有更基本的概念—「第一基本形式」(first fundamental form) 和「第二基本形式」(second fundamental form)，但由於這兩個概念較抽象，本文只介紹與之相關的「第一基本形式係數」和「第二基本形式係數」。

²本文採用 (u_1, u_2) (而非 (u, v)) 作為 X 的論元，是為了方便下文對第一基本形式係數和第二基本形式係數的定義。

³在黎曼幾何中， $g_{ij}(u_1, u_2)$ 等是「度量張量」(metric tensor) g 的分量。由於本文不擬引入「張量」的概念，所以沿用「第一基本形式係數」此一舊稱。惟請注意，傳統微分幾何並不使用 g_{ij} 等符號，而是使用字母 E 、 F 和 G (分別對應這裡的 g_{11} 、 g_{12} 和 g_{22})。本文使用 g_{ij} 等較直觀的符號，而不使用這些傳統符號。

其中 θ 是 v 與 w 之間的夾角。從上式容易看出點積運算具有交換性 (即對任何向量 v, w , 均有 $v \cdot w = w \cdot v$), 由此根據 (2), 可知 $g_{12}(u_1, u_2) = g_{21}(u_1, u_2)$, 因此以下將把 $g_{21}(u_1, u_2)$ 處理成等於 $g_{12}(u_1, u_2)$ 。

請注意如果 v 和 w 被表示成笛卡爾坐標系下單位向量的線性組合 $v = v_1i + v_2j + v_3k$ 和 $w = w_1i + w_2j + w_3k$, 其中 i, j, k 是笛卡爾坐標系下的單位向量, 那麼根據 (3), 容易求得 $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$ 和 $i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$, 因此在此情況下, 可以簡單寫出 v 與 w 的點積如下:

$$v \cdot w = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 \quad (4)$$

現在以 r 半徑球面為例示範如何計算第一基本形式係數, 以下是其坐標卡 (下式大致等於《數學示例: 曲面的參數化》(6) 中的 X_1):

$$\begin{aligned} X_1: \quad & (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^3; \\ X_1(u_1, u_2) = & (r \cos u_1 \cos u_2, r \sin u_1 \cos u_2, r \sin u_2) \end{aligned} \quad (5)$$

首先求上式的偏導數如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial u_1}(u_1, u_2) &= (-r \sin u_1 \cos u_2, r \cos u_1 \cos u_2, 0) \\ \frac{\partial X_1}{\partial u_2}(u_1, u_2) &= (-r \cos u_1 \sin u_2, -r \sin u_1 \sin u_2, r \cos u_2) \end{aligned}$$

接著便可利用 (2) 計算各個第一基本形式係數。由於 $\frac{\partial X_1}{\partial u_1}(u_1, u_2)$ 等實際上被表示成笛卡爾坐標系下單位向量的線性組合, 例如 $\frac{\partial X_1}{\partial u_1}(u_1, u_2) = (-r \sin u_1 \cos u_2)i + (r \cos u_1 \cos u_2)j + 0k$, 在以下計算中我們可以利用 (4):

$$\begin{aligned} (g_{11})_1(u_1, u_2) &= (-r \sin u_1 \cos u_2)^2 + (r \cos u_1 \cos u_2)^2 + 0^2 \\ &= r^2 \cos^2 u_2 \\ (g_{12})_1(u_1, u_2) &= (-r \sin u_1 \cos u_2)(-r \cos u_1 \sin u_2) \\ &\quad + (r \cos u_1 \cos u_2)(-r \sin u_1 \sin u_2) + (0)(r \cos u_2) \\ &= 0 \\ (g_{22})_1(u_1, u_2) &= (-r \cos u_1 \sin u_2)^2 + (-r \sin u_1 \sin u_2)^2 + (r \cos u_2)^2 \\ &= r^2 \end{aligned}$$

請注意上述 $(g_{11})_1(u_1, u_2)$ 等本身也是函數, 其值會隨著 (u_1, u_2) 而變化, 例如 $(g_{11})_1(0, 0) = r^2 \cos^2 0 = r^2$, $(g_{11})_1(0, \frac{\pi}{2}) = r^2 \cos^2 \frac{\pi}{2} = 0$ 等等。

為方便進行某些運算, 可以把第一基本形式係數表示成 2×2 矩陣, 記作 $[g_{ij}(u_1, u_2)]$, 這個矩陣第 i 行第 j 列上的項就是 $g_{ij}(u_1, u_2)$, 即

$$[g_{ij}(u_1, u_2)] = \begin{bmatrix} g_{11}(u_1, u_2) & g_{12}(u_1, u_2) \\ g_{12}(u_1, u_2) & g_{22}(u_1, u_2) \end{bmatrix} \quad (6)$$

據此可以把上述計算結果表示成以下形式：

$$[(g_{ij})_1(u_1, u_2)] = \begin{bmatrix} r^2 \cos^2 u_2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}$$

第一基本形式係數可用來表示與曲面相關的多種幾何量，以下介紹兩種。第一種幾何量是曲面上曲線的弧長。沿用我們在《數學示例：切空間與可定向性》中對「曲面上曲線」的表示方法，設某曲面具有 (1) 所示的坐標卡，並設某平面曲線具有以下參數化形式：

$$Y : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2; Y(t) = (u_1(t), u_2(t)) \quad (7)$$

如有 $Y(D) \subseteq E$ ，那麼可把 (1) 與 (7) 複合，從而得到一條曲面上曲線的參數化形式：

$$Z : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3; Z(t) = (x(u_1(t), u_2(t)), y(u_1(t), u_2(t)), z(u_1(t), u_2(t))) \quad (8)$$

設 $Z(t_0)$ 為上述曲線上的固定點， $Z(t)$ 為可變點，那麼 $Z(t)$ 相距 $Z(t_0)$ 的弧長可以表示成以下弧長函數⁴：

$$s : D \rightarrow \mathbb{R}; s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{[Y'(w)]^T \times [g_{ij} \circ Y(w)] \times [Y'(w)]} dw \quad (9)$$

上式平方根號下的數式是三個矩陣的乘積，其中 $[Y'(w)]$ 代表把 $Y'(w)$ 寫成 2×1 矩陣的形式⁵； $[Y'(w)]^T$ 則是 $[Y'(w)]$ 的「轉置」，即把 $[Y'(w)]$ 的行與列對調所得的 1×2 矩陣；而 $[g_{ij} \circ Y(w)]$ 則代表一個 2×2 矩陣，這個矩陣第 i 行第 j 列上的項是把 $g_{ij}(u_1, u_2)$ 與 $Y(w)$ 進行複合所得的結果。總上所述，我們有

$$[Y'(w)] = \begin{bmatrix} u_1'(w) \\ u_2'(w) \end{bmatrix} \quad [Y'(w)]^T = [u_1'(w) \quad u_2'(w)] \quad (10)$$

$$[g_{ij} \circ Y(w)] = \begin{bmatrix} g_{11}(u_1(w), u_2(w)) & g_{12}(u_1(w), u_2(w)) \\ g_{12}(u_1(w), u_2(w)) & g_{22}(u_1(w), u_2(w)) \end{bmatrix} \quad (11)$$

把上述三個矩陣相乘所得的結果是一個 1×1 矩陣，相當於一個實數。可以證明這個實數必定是非負實數，所以可以被開平方。

舉例說，考慮 r 半徑球面以及平面上由 $(-\pi, 0)$ 到 $(\pi, 0)$ 的直線，以下是其參數化形式 (下式等於《數學示例：切空間與可定向性》中的 (5))：

$$Y_1 : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2; Y_1(t) = (t, 0) \quad (12)$$

⁴我們在《數學示例：曲線的參數化》中也提供了求曲線弧長的公式 (即該網頁的 (7))，可以證明下式可由該公式推導而得。

⁵這裡把 Y 的論元從 t 改為 w ，是為了避免出現被積函數的論元與積分上限使用同一個符號 t 的情況。

我們在上述網頁中指出，把 r 半徑球面的坐標卡 (5) 與上述直線的參數化形式進行複合，可得 r 半徑球面上「赤道」(缺少了一點) 的參數化形式如下 (下式等於上述網頁的 (6))：

$$Z_1 : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad Z_1(t) = (r \cos t, r \sin t, 0) \quad (13)$$

現設 $Z_1(0) = (r, 0, 0)$ 為「赤道」上的固定點，讓我們求可變點 $Z_1(t)$ 相距 $Z_1(0)$ 的弧長。為此，首先計算 (9) 中平方根號下的數式。根據 (12)， $Y_1'(w) = (1, 0)$ 。此外，根據前面已計算的 $[(g_{ij})_1(u_1, u_2)]$ ，容易求得

$$\begin{aligned} [(g_{ij})_1 \circ Y_1(w)] &= \begin{bmatrix} r^2 \cos^2 0 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

接著進行 (9) 中的矩陣乘法：

$$\begin{aligned} & [Y_1'(w)]^T \times [(g_{ij})_1 \circ Y_1(w)] \times [Y_1'(w)] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

把上述 1×1 矩陣處理成純量 r^2 ，並代入 (9)，可得

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \int_0^t \sqrt{r^2} dw \\ &= rt \end{aligned}$$

由於 $Z_1(\frac{\pi}{2}) = (0, r, 0)$ ，因此 $s_1(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi r}{2}$ 是「赤道」上 $(0, r, 0)$ 點相距 $(r, 0, 0)$ 點的弧長，即 r 半徑球「赤道」長度的四分之一，此一計算結果正符合我們的預期。

第二種幾何量是曲面的面積。設某曲面 S 具有 (1) 所示的坐標卡，並設 $F \subseteq E$ ，那麼 $X(F)$ 是 S 上的某個區域，而 $X(F)$ 的面積 $A(F)$ 可用以下公式計算：

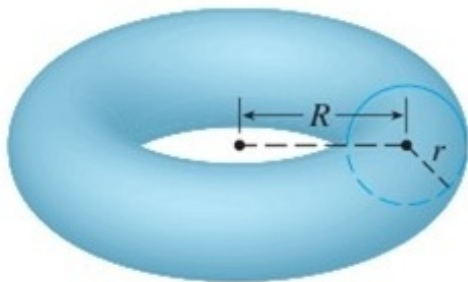
$$A(F) = \iint_F \sqrt{\det([g_{ij}(u_1, u_2)])} du_1 du_2 \quad (14)$$

在上式中， $\det([M_{ij}])$ 代表 2×2 矩陣 $[M_{ij}]$ 的行列式，其中 M_{ij} 是該矩陣第 i 行第 j 列上的項。根據行列式的定義，有

$$\det([M_{ij}]) = M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} \quad (15)$$

可以證明 (14) 中的行列式必然是非負整數，所以可以被開平方。

接下來讓我們計算「環面」(torus) 的面積，下圖展示一個環面：



從上圖可見，環面可被看成把一個位於 $x-z$ 平面上的圓繞 z 軸旋轉一周後所得的旋轉曲面。上述圖形的「經線」(即上圖中的藍色圓形) 是圓心位於 $(R, 0, 0)$ 點處，半徑為 r 的圓，其中 $r < R$ ，以下是這條經線的參數化形式：

$$Y_2 : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3; Y_2(u_2) = (R + r \cos u_2, 0, r \sin u_2) \quad (16)$$

運用我們在《數學示例：曲面的參數化》介紹的處理旋轉曲面的方法，可得環面的坐標卡如下：

$$\begin{aligned} X_2 : & (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3; \\ X_2(u_1, u_2) = & (\cos u_1(R + r \cos u_2), \sin u_1(R + r \cos u_2), r \sin u_2) \end{aligned} \quad (17)$$

類似前面的做法，首先求上式的偏導數如下：

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_2}{\partial u_1}(u_1, u_2) &= (-\sin u_1(R + r \cos u_2), \cos u_1(R + r \cos u_2), 0) \\ \frac{\partial X_2}{\partial u_2}(u_1, u_2) &= (-r \cos u_1 \sin u_2, -r \sin u_1 \sin u_2, r \cos u_2) \end{aligned}$$

接著根據 (2) 求各個第一基本形式係數如下：

$$\begin{aligned} (g_{11})_2(u_1, u_2) &= (R + r \cos u_2)^2 \\ (g_{12})_2(u_1, u_2) &= 0 \\ (g_{22})_2(u_1, u_2) &= r^2 \end{aligned}$$

由此有

$$[(g_{ij})_2(u_1, u_2)] = \begin{bmatrix} (R + r \cos u_2)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}$$

根據 (15), 可得

$$\det([(g_{ij})_2(u_1, u_2)]) = r^2(R + r \cos u_2)^2$$

雖然 $X_2((0, 2\pi) \times (0, 2\pi))$ 並不覆蓋整個環面, 但讀者可自行驗證, 它所不能覆蓋的範圍只是環面上的兩條曲線。由於曲線的面積等於 0, 缺少了這兩條曲線並不影響環面面積的值, 因此可以用 (14) 計算 $A((0, 2\pi) \times (0, 2\pi))$, 從而求得 X_2 所代表環面的面積。由於 $(0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ 是一個矩形, 可以把 (14) 中的「二重積分」轉化成「迭代積分」如下:

$$\begin{aligned} A_2((0, 2\pi) \times (0, 2\pi)) &= \iint_{(0, 2\pi) \times (0, 2\pi)} \sqrt{\det([(g_{ij})_2(u_1, u_2)])} du_1 du_2 \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + r \cos u_2) du_1 du_2 \\ &= \int_0^{2\pi} (2\pi r R + 2\pi r^2 \cos u_2) du_2 \\ &= 4\pi^2 r R \end{aligned}$$

從以上討論可見, 為求各個第一基本形式係數, 只需計算曲面某點處的切空間基底向量的點積。可是, 我們在《數學示例: 切空間與可定向性》中還介紹了曲面某點處的曲面單位法向量, 由此類推, 從曲面單位法向量應也能得到像第一基本形式係數那樣有用的信息, 這是接下來要介紹的內容。為方便讀者, 以下重新提供曲面單位法向量的計算公式 (下式大致等於上述網頁的公式 (16)):

$$N(u_1, u_2) = \frac{\frac{\partial X}{\partial u_1}(u_1, u_2) \times \frac{\partial X}{\partial u_2}(u_1, u_2)}{\left\| \frac{\partial X}{\partial u_1}(u_1, u_2) \times \frac{\partial X}{\partial u_2}(u_1, u_2) \right\|} \quad (18)$$

現在把 $N(u_1, u_2)$ 與曲面坐標卡 (1) 的各個二階偏導數 $\frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j}(u_1, u_2)$ 進行點積運算, 並把運算結果記作 L_{ij} , 其定義如下:

$$L_{ij}(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j}(u_1, u_2) \cdot N(u_1, u_2) \quad (19)$$

請注意 L_{ij} 有另一個等價定義:

$$L_{ij}(u_1, u_2) = -\frac{\partial X}{\partial u_i}(u_1, u_2) \cdot \frac{\partial N}{\partial u_j}(u_1, u_2) \quad (20)$$

以下將主要使用 (19) 中的定義, 我們把上式中的 $L_{ij}(u_1, u_2)$ 稱為**第二基本形式係數**(coefficient of second fundamental form)⁶。跟第一基本形式係數相

⁶傳統微分幾何並不使用 L_{ij} 等符號, 而是使用字母 L 、 M 和 N (分別對應這裡的 L_{11} 、 L_{12} 和 L_{22})。本文使用 L_{ij} 等較直觀的符號, 而不使用這些傳統符號。

似,理論上也共有四個第二基本形式係數： L_{11} 、 L_{12} 、 L_{21} 和 L_{22} 。可是,根據數學分析的知識,若 $X(u_1, u_2)$ 是連續函數,則 $\frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j}(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 X}{\partial u_j \partial u_i}(u_1, u_2)$ 。由於 X 具有光滑性,從上述定義可知 $L_{12}(u_1, u_2) = L_{21}(u_1, u_2)$, 因此以下將把 $L_{21}(u_1, u_2)$ 處理成等於 $L_{12}(u_1, u_2)$ 。

現在以環面為例示範如何計算第二基本形式係數,以下沿用 (17) 中的坐標卡 X_2 。由於前面已計算 X_2 的一階偏導數,我們可以利用此中間結果繼續進行計算,首先求兩個一階偏導數的叉積及其模如下：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial X_2}{\partial u_1}(u_1, u_2) \times \frac{\partial X_2}{\partial u_2}(u_1, u_2) \\ &= (r \cos u_1 \cos u_2(R + r \cos u_2), r \sin u_1 \cos u_2(R + r \cos u_2), r \sin u_2(R + r \cos u_2)) \\ & \quad \left\| \frac{\partial X_2}{\partial u_1}(u_1, u_2) \times \frac{\partial X_2}{\partial u_2}(u_1, u_2) \right\| = r(R + r \cos u_2) \end{aligned}$$

由此便可用 (18) 求 X_2 的曲面單位法向量：

$$N_2(u_1, u_2) = (\cos u_1 \cos u_2, \sin u_1 \cos u_2, \sin u_2)$$

接著求 X_2 的二階偏導數：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X_2}{\partial u_1 \partial u_1}(u_1, u_2) &= (-\cos u_1(R + r \cos u_2), -\sin u_1(R + r \cos u_2), 0) \\ \frac{\partial^2 X_2}{\partial u_1 \partial u_2}(u_1, u_2) &= (r \sin u_1 \sin u_2, -r \cos u_1 \sin u_2, 0) \\ \frac{\partial^2 X_2}{\partial u_2 \partial u_2}(u_1, u_2) &= (-r \cos u_1 \cos u_2, -r \sin u_1 \cos u_2, -r \sin u_2) \end{aligned}$$

最後便可用 (19) 求 X_2 的各個第二基本形式係數：

$$\begin{aligned} (L_{11})_2(u_1, u_2) &= -\cos u_2(R + r \cos u_2) \\ (L_{12})_2(u_1, u_2) &= 0 \\ (L_{22})_2(u_1, u_2) &= -r \end{aligned}$$

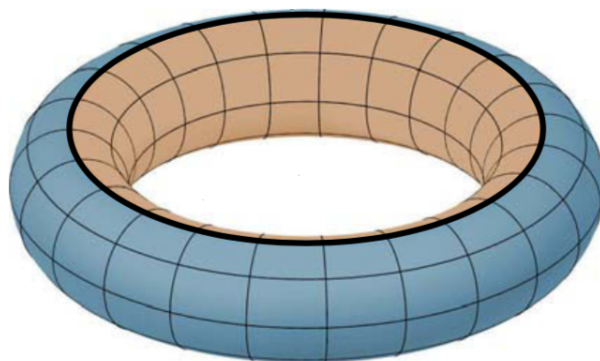
跟第一基本形式係數相似,可以把第二基本形式係數表示成 2×2 矩陣,記作 $[L_{ij}(u_1, u_2)]$ ：

$$[L_{ij}(u_1, u_2)] = \begin{bmatrix} L_{11}(u_1, u_2) & L_{12}(u_1, u_2) \\ L_{12}(u_1, u_2) & L_{22}(u_1, u_2) \end{bmatrix} \quad (21)$$

據此可以把上述計算結果表示成以下形式：

$$[(L_{ij})_2(u_1, u_2)] = \begin{bmatrix} -\cos u_2(R + r \cos u_2) & 0 \\ 0 & -r \end{bmatrix}$$

第二基本形式係數可用來區分曲面 S 上具有不同彎曲方式的點。微分幾何把曲面上的點分為四類，下圖展示環面上的三類點：



第一類點是上圖中藍色範圍內的點，稱為**橢圓型點**(elliptic point)。對於上圖中每個橢圓型點 q ，除了 q 外， S 於 q 點處的切空間 $T_q S$ 並不包含 S 上其他點⁷。第二類點是上圖中棕色範圍內的點，稱為**雙曲型點**(hyperbolic point)。對於上圖中每個雙曲型點 q ， $T_q S$ 都穿透 S 。第三類點是上圖中圓形粗黑線上的點 (上圖只顯示一條圓形粗黑線，但其實環面的底部還有另一條圓形粗黑線)，稱為**拋物型點**(parabolic point)。對於每個拋物型點 q ，都有 S 上的一條線段使得 $T_q S$ 包含著該線段上的所有點。此外，還有第四類上圖沒有顯示的點，稱為**平面型點**(planar point)，平面上的點就是典型的平面型點。

我們可以用 $[L_{ij}(u_1, u_2)]$ 和 $\det([L_{ij}(u_1, u_2)])$ 來定義上述四類點。設 X 為某曲面的坐標卡， q 是該曲面的點，並且 $q = X(u_1, u_2)$ ，我們有以下定義 (在下式中， O 代表「零矩陣」，即所有項均為 0 的矩陣)：

- (i) 若 $\det([L_{ij}(u_1, u_2)]) > 0$ ，則 q 是橢圓型點
- (ii) 若 $\det([L_{ij}(u_1, u_2)]) < 0$ ，則 q 是雙曲型點
- (iii) 若 $\det([L_{ij}(u_1, u_2)]) = 0$ 但 $[L_{ij}(u_1, u_2)] \neq O$ ，則 q 是拋物型點
- (iv) 若 $[L_{ij}(u_1, u_2)] = O$ ，則 q 是平面型點

以前面討論過的環面為例，根據前面的計算結果，我們有

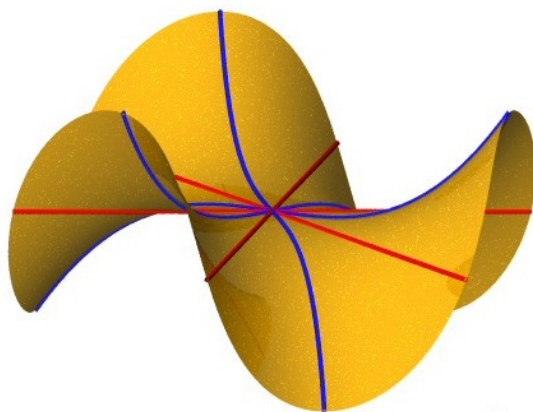
$$\det([(L_{ij})_2(u_1, u_2)]) = r \cos u_2 (R + r \cos u_2)$$

⁷根據「切空間」的定義， $T_q S$ 是由向量組成的集合，但也可看成點集合，即由有關向量的終點組成的集合。

接著讓我們用上述結果驗證前面對環面上點的分類。首先, $[(L_{ij})_2(u_1, u_2)] \neq O$, 因此根據 (iv), 環面上沒有平面型點。其次, 由於 $[(L_{ij})_2(u_1, u_2)]$ 的值不依賴於 u_1 的值, 因此在判斷環面上某點的類型時, 只需考慮該點所對應的 u_2 值, 而具有同一 u_2 值的點 (即環面每一條緯線上的點) 必然屬於同一類型。

若 $u_2 \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, 我們有 $1 > \cos u_2 > 0$, 因而必有 $\det([(L_{ij})_2(u_1, u_2)]) > 0$ 。由此根據 (i), 可知這些點是橢圓型點, 而這些點正是上圖中藍色範圍內的點⁸。若 $u_2 \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, 我們有 $-1 \leq \cos u_2 < 0$ 。由於 $R > r$, 故有 $R + r \cos u_2 > 0$, 因而必有 $\det([(L_{ij})_2(u_1, u_2)]) < 0$ 。由此根據 (ii), 可知這些點是雙曲型點, 而這些點正是上圖中棕色範圍內的點。若 $u_2 = \frac{\pi}{2}$ 或 $u_2 = \frac{3\pi}{2}$, 我們有 $\cos u_2 = 0$, 因而必有 $\det([(L_{ij})_2(u_1, u_2)]) = 0$ 。由此根據 (iii), 可知這些點是拋物型點, 而這些點正是上圖中圓形粗黑線上的點。

前面說過, 平面上的點是典型的平面型點。但除了平面外, 某些曲面也可以包含一些平面型點, 我們在《數學示例：曲面的參數化》中討論過的「猴鞍面」便是這樣的曲面, 以下是猴鞍面的圖象：



根據上圖, 猴鞍面上的點似乎全都是雙曲型點, 但其實它包含一個平面型點。為證實這一點, 我們先引入猴鞍面的坐標卡 (下式大致等於上述網頁 (10) 中的 X_8) :

$$X_3 : (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad X_3(u_1, u_2) = (u_1, u_2, u_1^3 - 3u_1u_2^2) \quad (22)$$

接著根據 (19) 進行計算 (請讀者自行驗證以下計算結果) :

$$[(L_{ij})_3(u_1, u_2)] = \frac{1}{\sqrt{9(u_1^2 + u_2^2)^2 + 1}} \begin{bmatrix} 6u_1 & -6u_2 \\ -6u_2 & -6u_1 \end{bmatrix}$$

⁸由於 u_2 的取值範圍並不包括 0, 所以上述分析結果不包含環面「赤道」上的點, 但這類點顯然屬於橢圓型點, 讀者可以使用另一個涵蓋環面「赤道」的坐標卡來證明這一點。

由此可求得

$$\det([(L_{ij})_3(u_1, u_2)]) = -\frac{36(u_1^2 + u_2^2)}{9(u_1^2 + u_2^2)^2 + 1}$$

根據以上結果，可知若 $(u_1, u_2) \neq (0, 0)$ ，則 $\det([(L_{ij})_3(u_1, u_2)]) < 0$ ，並且 $[(L_{ij})_3(0, 0)] = O$ 。由此根據上述定義，我們可以作出結論： $(0, 0, 0)$ ($= X_3(0, 0)$)，即上圖的中心點，是猴鞍面上的平面型點，而所有其他點都是雙曲型點。

[連結至數學專題](#)
[連結至周家發網頁](#)