數學示例：傅立葉級數

我們在《數學示例：斯圖姆-劉維爾理論》中介紹了某些「自伴算子齊次微分／差分方程」與「特徵函數」概念的關係。本文主旨是從這些特徵函數的某些重要性質引入「傅立葉級數」的概念，並進而介紹求解「自伴算子非齊次微分／差分方程」的方法。

我們在上述網頁介紹了「關於權重函數 $w(x)$ 正交」的概念，並在該網頁指出，從某個「自伴算子齊次方程」的一組互相線性獨立的特徵函數，總能推導出一組關於權重函數 $w(x)$ 正交的特徵函數。除了「正交」概念外，還需要「範數」的概念。設 $f(x)$ 為某個「自伴算子齊次方程」的特徵函數，並且以 (a, b) 或 $\{(a), a+1, \ldots, b-1, (b)\}$ 為定義域，則 $f(x)$關於權重函數 $w(x)$ 的範數(norm with respect to the weight function $w(x)$)，以下記作 $\|f\|_w$，定義如下[1]：

$$\|f\|_w = \sqrt{\langle f, f\rangle_w} \qquad (1)$$

以上定義乃建基於上述網頁介紹的「關於權重函數 $w(x)$ 的內積」$\langle\ \rangle_w$ 的概念，根據該網頁，若 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 是上述「自伴算子齊次方程」的特徵函數，那麼它們關於 $w(x)$ 的內積定義如下 (以下兩式等於上述網頁的 (33) 和 (34))：

$$\langle f_1, f_2\rangle_w = \int_a^b w(x)f_1(x)f_2(x) \text{ 或 } \sum_{a+1}^{b-1} w(x)f_1(x)f_2(x) \qquad (2)$$

視乎這兩個函數的定義域是 (a, b) 還是 $\{a, a+1, \ldots, b-1, b\}$。容易看到，對任何特徵函數 $f(x)$，都有

$$\left\| \frac{f}{\|f\|_w} \right\|_w = 1 \qquad (3)$$

因此可以把任何特徵函數 $f(x)$ 除以其範數，從而得到一個關於 $w(x)$ 範數為 1 的特徵函數。總結以上討論，給定某個自伴算子齊次方程的特徵

[1]讀者可參閱《數學示例：賦範空間》以進一步了解「範數」的概念。

值組成的序列 $(\lambda_n)_{n\in I}$ (其中 I 代表某個指標集) 以及互相線性獨立的特徵函數，總能推導出一個由特徵函數組成的序列 $(f_n)_{n\in I}$，使得這個序列的成員各自對應著 $(\lambda_n)_{n\in I}$ 中有相同下標的成員，並且具有以下正交歸一性(orthonormality)：(i) 對任何 $m, n \in I, m \neq n$，都有 $\langle f_m, f_n\rangle_w = 0$，並且 (ii) 對任何 $n \in I$，都有 $\|f_n\|_w = 1$。

舉例說，我們在上述網頁曾討論以下自伴算子微分方程 (以下兩式等於上述網頁的 (3) 和 (6))：

$$D(xDf(x)) + \left(\frac{\lambda}{x}\right) f(x) = 0, \;\; x \in (1, e), \;\; f(1) = 0, \;\; f(e) = 0 \qquad (4)$$

並指出上述方程的特徵值和特徵函數為

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \;\; f_n(x) = \sin(n\pi \ln x), \;\; n \in \mathbb{N} \qquad (5)$$

我們在上述網頁也指出，(5) 中所列的特徵函數關於權重函數 $w(x) = \frac{1}{x}$ 正交。此外，根據 (1) 和 (2)，可求得對任何 $n \in \mathbb{N}$，都有

$$\begin{aligned} \|\sin(n\pi \ln x)\|_w &= \sqrt{\langle \sin(n\pi \ln x), \sin(n\pi \ln x)\rangle_w} \\ &= \sqrt{\int_1^e \frac{\sin^2(n\pi \ln x)}{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (6) \end{aligned}$$

從以上結果可得到 (4) 的特徵值序列和特徵函數正交歸一序列如下：

$$(n^2\pi^2)_{n\in\mathbb{N}}, \;\; \left(\sqrt{2}\sin(n\pi \ln x)\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (7)$$

上述正交歸一序列 $(f_n)_{n\in I}$ 的重要性在於，任何以 (a, b) 或 $\{a+1, \ldots, b-1\}$ 為定義域的函數 $g(x)$ 都可在形式上表示成這個序列中成員的線性組合 (下式中的 c_i 是實係數)：

$$g(x) = \sum_{n\in I} c_n f_n(x) \qquad (8)$$

上式右端稱為 $g(x)$ 的傅立葉級數(Fourier series)[2]。類似「泰勒級數」(Taylor series) 的情況，可以用傅立葉級數的「部分和」(partial sum) 來逼近函數

[2]以下不討論傅立葉級數的斂散性問題，只想指出以下討論的函數 $g(x)$ 都是「合理」的函數，這些 $g(x)$ 的傅立葉級數都在 (a, b) 或 $\{a+1, \ldots, b-1\}$ 上收斂於 $g(x)$ 的值。另請注意，本文對「傅立葉級數」一詞採取較寬鬆的定義，這個詞在本文的所指包含某些書所稱的「廣義傅立葉級數」(generalized Fourier series)。

$g(x)$。為求 (8) 中的各個 c_n，只需把 $g(x)$ 與 $f_n(x)$ 進行內積運算，然後利用內積運算的線性性質[3]以及上述正交歸一性，進行以下計算：

$$\begin{aligned}
\langle g, f_n \rangle_w &= \left\langle \sum_{m\in I} c_m f_m, f_n \right\rangle_w \\
&= \sum_{m\in I} c_m \langle f_m, f_n \rangle_w \\
&= c_n \langle f_n, f_n \rangle_w \\
&= c_n \left(\|f_n\|_w\right)^2 \\
&= c_n
\end{aligned}$$

由此我們有

$$c_n = \langle g, f_n \rangle_w \qquad (9)$$

舉例說，考慮以下函數：

$$g(x) = -1,\ \ x \in (1, e) \qquad (10)$$

由於上述函數以 $(1, e)$ 為定義域，可以把它表示成 (7) 中正交歸一序列成員的線性組合。接下來讓我們用 (9) 求這個線性組合中的各個實係數：

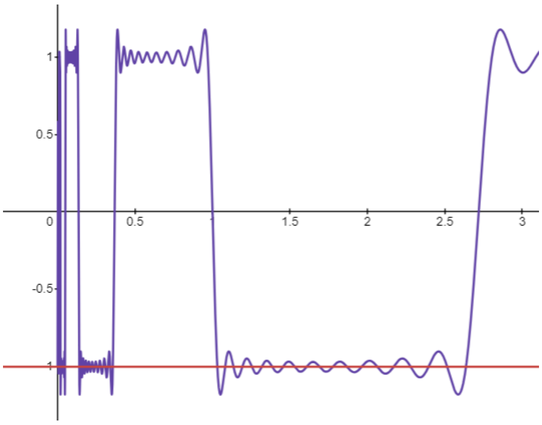
$$\begin{aligned}
c_n &= \left\langle -1, \sqrt{2}\sin(n\pi \ln x) \right\rangle_w \\
&= -\sqrt{2}\int_1^e \frac{\sin(n\pi \ln x)}{x} \\
&= \frac{\sqrt{2}((-1)^n - 1)}{n\pi} \qquad (11)
\end{aligned}$$

從以上結果可得 (10) 的傅立葉級數展開式如下：

$$\begin{aligned}
-1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}((-1)^n - 1)}{n\pi} \times \sqrt{2}\sin(n\pi \ln x) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{2\sqrt{2}}{(2k-1)\pi} \times \sqrt{2}\sin((2k-1)\pi \ln x) \right) \\
&= -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \times \sqrt{2}\sin(\pi \ln x) - \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} \times \sqrt{2}\sin(3\pi \ln x) - \frac{2\sqrt{2}}{5\pi} \times \sqrt{2}\sin(5\pi \ln x) - \dots \qquad (12)
\end{aligned}$$

下圖展示用傅立葉級數逼近函數 $g(x)$ 的結果：

[3]內積運算的線性性質是指，對任何 f_1、f_2、f_3 和任何實數 c，都有 $\langle f_1 + f_2, f_3 \rangle_w = \langle f_1, f_3 \rangle_w + \langle f_2, f_3 \rangle_w$，$\langle f_1, f_2 + f_3 \rangle_w = \langle f_1, f_2 \rangle_w + \langle f_1, f_3 \rangle_w$，$\langle cf_1, f_2 \rangle_w = c\langle f_1, f_2 \rangle_w$ 以及 $\langle f_1, cf_2 \rangle_w = c\langle f_1, f_2 \rangle_w$



上圖中的紅色直線是 $g(x)$ 的圖象，藍色曲線則是 (12) 中首 10 項的部分和圖象。可以看到，藍色曲線在 $(1, e)$ 內逼近紅色直線，但在其他範圍則不一定逼近紅色直線。因此嚴格地說，應註明 (12) 這個等式只在 $x \in (1, e)$ 這個範圍內成立，但由於 (10) 已註明 $g(x)$ 的定義域為 $(1, e)$，為簡化數式，以下約定傅立葉級數展開式成立的範圍就是有關函數的定義域而不另作註明。

我們在上述網頁也曾討論以下自伴算子差分方程 (以下兩式等於上述網頁的 (16) 和 (19))：

$$\Delta^2 E^{-1} f(x) + \lambda f(x) = 0,\quad x \in \{(0), 1, 2, 3, (4)\},\quad f(0) = 0,\quad f(4) = 0 \qquad (13)$$

並指出上述方程的特徵值和特徵函數為

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 2 - \sqrt{2}, & f_1(x) = \sin(\frac{\pi x}{4}) \\ \lambda_2 = 2, & f_2(x) = \sin(\frac{\pi x}{2}) \\ \lambda_3 = 2 + \sqrt{2}, & f_3(x) = \sin(\frac{3\pi x}{4}) \end{array} \qquad (14)$$

(14) 中所列的特徵函數都關於權重函數 $w(x) = 1$ 正交。此外，根據 (1) 和 (2)，可求得

$$\left\|\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right\| = \sqrt{\sum_1^3 \sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)} = \sqrt{2} \qquad (15)$$

$$\left\|\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right\| = \sqrt{\sum_1^3 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \sqrt{2} \qquad (16)$$

$$\left\|\sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right)\right\| = \sqrt{\sum_1^3 \sin^2\left(\frac{3\pi x}{4}\right)} = \sqrt{2} \qquad (17)$$

從以上結果可得到 (13) 的特徵值序列和特徵函數正交歸一序列如下：

$$(2-\sqrt{2}, 2, 2+\sqrt{2}),\quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right)\right) \qquad (18)$$

接下來考慮以下函數 (以下函數大致等於上述網頁 (32) 中的 $f_2(x)$，但其定義域略去了 0 和 4 這兩點)：

$$g(x) = x^3 - 4x^2,\ \ x \in \{1, 2, 3\} \qquad (19)$$

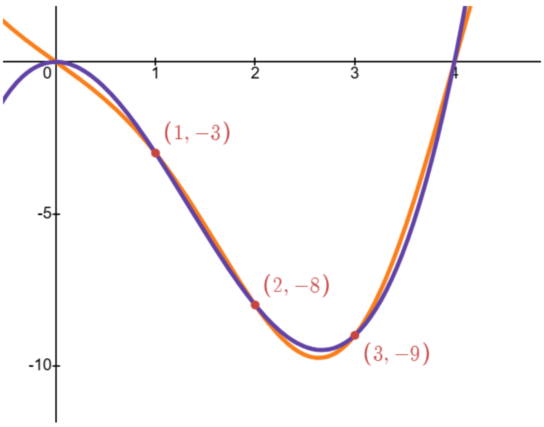
由於上述函數以 $\{1, 2, 3\}$ 為定義域，可以把它表示成 (19) 中正交歸一序列成員的線性組合。接下來讓我們用 (9) 求這個線性組合中的各個實係數：

$$\begin{aligned} c_1 &= \textstyle\sum_1^3 \left((x^3-4x^2)\times \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right) = -6-4\sqrt{2} \\ c_2 &= \textstyle\sum_1^3 \left((x^3-4x^2)\times \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) = 3\sqrt{2} \\ c_3 &= \textstyle\sum_1^3 \left((x^3-4x^2)\times \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right)\right) = -6+4\sqrt{2} \end{aligned} \qquad (20)$$

從以上結果可得 (19) 的傅立葉級數展開式如下：

$$\begin{aligned} x^3-4x^2 &= (-6-4\sqrt{2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right) + 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) \\ &\quad +(-6+4\sqrt{2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right)\right) \end{aligned} \qquad (21)$$

下圖展示用傅立葉級數逼近函數 $g(x)$ 的結果：



上圖中的藍色曲線是 (21) 中左端數式的圖象，橙色曲線則是右端數式的圖象。從上圖可以清楚看到，(21) 中左右兩端的數式其實並不相等，而是只在 $(1,-3)$、$(2,-8)$ 和 $(3,-9)$ 這三點上一致。換句話說，(21) 這個

等式只在 $x \in \{1, 2, 3\}$ 這個離散集合的範圍內成立，因此應把 (21) 這種傅立葉級數稱為離散傅立葉級數(discrete Fourier series)，以區別於 (12) 這種在連續集合的範圍內成立的連續傅立葉級數(continuous Fourier series)。

以上介紹的都是一元函數的傅立葉級數，但傅立葉級數也可推廣至多元函數，有關這方面的內容，請參閱附錄。此外，傅立葉級數尚有其他豐富內容，本文無法一一介紹，以下只擬介紹傅立葉級數的一個重要應用－求解「自伴算子非齊次微分／差分方程齊次邊值問題」，其中的微分方程邊值問題具有以下一般形式：

$$\begin{aligned}&T_D f(x) + \mu w(x) f(x) + g(x) = 0, \ \ x \in (a, b),\\&a_{11} f(a) + a_{12} D f(a) + b_{11} f(b) + b_{12} D f(b) = 0,\\&a_{21} f(a) + a_{22} D f(a) + b_{21} f(b) + b_{22} D f(b) = 0 \qquad (22)\end{aligned}$$

差分方程邊值問題則具有以下一般形式：

$$\begin{aligned}&T_\Delta f(x) + \mu w(x) f(x) + g(x) = 0, \ \ x \in \{(a), a + 1, \ldots, b - 1, (b)\},\\&a_{11} f(a) + a_{12} f(a + 1) + b_{11} f(b - 1) + b_{12} f(b) = 0,\\&a_{21} f(a) + a_{22} f(a + 1) + b_{21} f(b - 1) + b_{22} f(b) = 0 \qquad (23)\end{aligned}$$

其中的 $g(x)$ 是與 $f(x)$ 有相同定義域的給定函數，μ 是給定的實數，$w(x)$ 則是權重函數，在其定義域中取正值。在上式中，如果設定 $g(x) = 0$ 並且以參數 λ 代替 μ，可得到與上述方程相關的「自伴算子齊次微分／差分方程」。現設根據《數學示例：斯圖姆-劉維爾理論》介紹的方法求得這個齊次方程的特徵值序列 $(\lambda_n)_{n \in I}$ 和相對應的正交歸一特徵函數序列 $(f_n)_{n \in I}$。根據特徵值和特徵函數的定義，對於每個 $n \in I$，我們有 (以下用 T 概括 T_D 和 T_Δ)：

$$T f_n(x) = -\lambda_n w(x) f_n(x) \qquad (24)$$

根據前面的討論，可以把已知函數 $\frac{g(x)}{w(x)}$ 寫成 $(f_n)_{n \in I}$ 成員的傅立葉級數，即

$$\frac{g(x)}{w(x)} = \sum_{n \in I} c_n f_n(x) \qquad (25)$$

另一方面，假設未知函數 $f(x)$ 也可寫成 $(f_n)_{n \in I}$ 成員的傅立葉級數，即

$$f(x) = \sum_{n \in I} d_n f_n(x) \qquad (26)$$

接下來要解出各個 d_n。為此，把 (26)、(25) 和 (24) 代入 (22) 或 (23) 的第一行 (但把下標 n 改為 m)，並加以整理：

$$T\left(\sum_{m \in I} d_m f_m(x)\right) + \mu w(x) \sum_{m \in I} d_m f_m(x) + w(x) \sum_{m \in I} c_m f_m(x) \quad = \quad 0$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{m\in I} d_m(-\lambda_m w(x) f_m(x)) + \mu w(x)\sum_{m\in I} d_m f_m(x) + w(x)\sum_{m\in I} c_m f_m(x) &= 0 \\
w(x)\sum_{m\in I}(d_m(\mu-\lambda_m)+c_m) f_m(x) &= 0
\end{aligned}
$$

由於 $w(x)$ 不等於 0，可以把上式等號兩端同時除以 $w(x)$，接著把上式兩端同時與 $f_n(x)$ 進行內積運算，並利用內積運算的線性性質以及 $(f_n)_{n\in I}$ 的正交歸一性質，可推導出

$$
\begin{aligned}
\left\langle \sum_{m\in I}(d_m(\mu-\lambda_m)+c_m) f_m(x), f_n(x)\right\rangle &= 0 \\
d_n(\mu-\lambda_n)+c_n &= 0 \qquad (27)
\end{aligned}
$$

由此可解出 d_n 如下：

$$
d_n = \frac{c_n}{\lambda_n - \mu} \qquad (28)
$$

接下來要考慮三種情況。情況 (i)：對任何 $n\in I$，都有 $\mu\neq\lambda_n$。在此情況下，(22) 或 (23) 有唯一解 (26)，其中的 d_n 由 (28) 給出。情況 (ii)：有至少一個 $i\in I$ 使得 $\mu=\lambda_i$，並且 $c_i=0$。這即是說，當 $n=i$，不論 d_i 取何值，(27) 都必然得到滿足 (因為等號兩端都是 0)，因而 d_i 不受任何限制，實際是一個任意常數，而其他 d_n (其中 $n\neq i$) 則仍由 (28) 給出，因此 (22) 或 (23) 有包含任意常數的解。請注意使用上述方法，有時只能把方程的解表示成傅立葉級數的形式，而且這個解的成立範圍一般限於有關傅立葉級數展開式成立的範圍內。情況 (iii)：有至少一個 $n\in I$ 使得 $\mu=\lambda_n$，並且 $c_n\neq 0$。這即是說，當 $n=i$，不論 d_i 取何值，(27) 都得不到滿足 (因為等號左端不是 0)，因此 (22) 或 (23) 沒有解。

舉例說，考慮以下非齊次微分方程齊次邊值問題：

$$
D(xDf(x)) + \left(\frac{2\pi^2}{x}\right) f(x) - \frac{1}{x} = 0,\ \ x\in(1,e),\ \ f(1)=0,\ \ f(e)=0 \qquad (29)
$$

把上式與 (22) 比較，如設定 $T_D f(x) = D(xDf(x))$，$\mu=2\pi^2$，$w(x)=\frac{1}{x}$，$g(x) = -\frac{1}{x}$，那麼 (4) 就是與上述方程相關的齊次方程，而 (4) 的特徵值和特徵函數正交歸一序列則載於 (7)。根據上面的討論，為求解 (29)，可以先求 $\frac{g(x)}{w(x)} = -1$ 的傅立葉級數展開式的係數 c_n，但我們在前面已完成了這一步，其結果載於 (11)。由於對任何 $n\in\mathbb{N}$，$2\pi^2\neq n^2\pi^2$，這屬於上述情況 (i)，可知 (29) 有唯一解。根據 (28) 和 (11)，我們計算

$$
\begin{aligned}
d_n &= \frac{\sqrt{2}((-1)^n-1)}{n\pi}\times\frac{1}{n^2\pi^2-2\pi^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}((-1)^n-1)}{\pi^3(n^3-2n)} \qquad (30)
\end{aligned}
$$

把以上結果代入 (26)，便可求得 (29) 的解為

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}((-1)^n-1)}{\pi^3(n^3-2n)} \times \sqrt{2}\sin(n\pi \ln x) \\
&= \frac{4}{\pi^3}\left(\sin(\pi \ln x) - \frac{\sin(3\pi \ln x)}{21} - \frac{\sin(5\pi \ln x)}{115} - \dots\right) \qquad (31)
\end{aligned}
$$

如把 (29) 改為以下方程：

$$
D(xDf(x)) + \left(\frac{4\pi^2}{x}\right) f(x) + \frac{\sqrt{2}\sin(\pi \ln x)}{x} = 0,\ \ x \in (1,e),\ \ f(1)=0,\ \ f(e)=0 \qquad (32)
$$

這裡有 $\mu = 4\pi^2$，$w(x) = \frac{1}{x}$，$g(x) = \frac{\sqrt{2}\sin(\pi \ln x)}{x}$。容易看到，$\frac{g(x)}{w(x)}$ 的傅立葉級數展開式就是 $\sqrt{2}\sin(\pi \ln x)$，即這個展開式的係數除了 $c_1 = 1$ 外，有 $c_2 = 0, c_3 = 0, c_4 = 0, \dots$。由於根據 (5)，$4\pi^2 = \lambda_2$ 並且根據上面的討論，$c_2 = 0$，這屬於上述情況 (ii)，可知 d_2 是任意常數，而對所有 $n \neq 2$，根據 (28)，我們有

$$
d_n = \frac{c_n}{n^2\pi^2 - 4\pi^2}
$$

由此有 $d_1 = -\frac{1}{3\pi^2}$，並且 $d_3 = 0, d_4 = 0, \dots$。綜合以上結果，可得到 (32) 的解如下：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{1}{3\pi^2}(\sqrt{2}\sin(\pi \ln x)) + d_2(\sqrt{2}\sin(2\pi \ln x)) \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{3\pi^2}\sin(\pi \ln x) + c\sin(2\pi \ln x) \qquad (33)
\end{aligned}
$$

其中 $c = d_2\sqrt{2}$ 是任意常數。

如把 (29) 改為以下方程：

$$
D(xDf(x)) + \left(\frac{\pi^2}{x}\right) f(x) - \frac{1}{x} = 0,\ \ x \in (1,e),\ \ f(1)=0,\ \ f(e)=0 \qquad (34)
$$

這裡有 $\mu = \pi^2$，$w(x) = \frac{1}{x}$，$g(x) = -\frac{1}{x}$。由於根據 (5)，$\pi^2 = \lambda_1$ 並且根據 (11)，$c_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \neq 0$，這屬於上述情況 (iii)，可知 (34) 沒有解。

接著考慮以下非齊次差分方程齊次邊值問題：

$$
\Delta^2 E^{-1} f(x) + f(x) + x = 0,\ \ x \in \{(0),1,2,3,(4)\},\ \ f(0)=0,\ \ f(4)=0 \qquad (35)
$$

把上式與 (23) 比較，如設定 $T_\Delta f(x) = \Delta^2 E^{-1} f(x)$，$\mu = 1$，$w(x) = 1$，$g(x) = x$，那麼 (13) 就是與上述方程相關的齊次方程，而 (13) 的特徵值和

特徵函數正交歸一序列則載於 (18)。為求解 (35)，可以先用 (9) 求 $\frac{g(x)}{w(x)} = x$ 的傅立葉級數展開式的係數：

$$\begin{array}{l} c_1 = \sum_1^3 \left(x \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right) = 2 + \sqrt{2} \\ c_2 = \sum_1^3 \left(x \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) = -\sqrt{2} \\ c_3 = \sum_1^3 \left(x \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right)\right) = 2 - \sqrt{2} \end{array} \tag{36}$$

由於對任何 $n = 1, 2, 3$，$1 \neq \lambda_n$，這屬於上述情況 (i)，可知 (35) 有唯一解。根據 (28) 和 (36)，我們計算

$$\begin{array}{l} d_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}-1} = -4 - 3\sqrt{2} \\ d_2 = \frac{-\sqrt{2}}{2-1} = -\sqrt{2} \\ d_3 = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}-1} = -4 + 3\sqrt{2} \end{array} \tag{37}$$

把以上結果代入 (26)，便可求得 (35) 的解為

$$\begin{aligned} f(x) &= (-4-3\sqrt{2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right) + (-\sqrt{2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) \\ &\quad + (-4+3\sqrt{2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right)\right) \\ &= (-3-2\sqrt{2})\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + (3-2\sqrt{2})\sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right) \end{aligned} \tag{38}$$

如把 (35) 改為以下方程：

$$\Delta^2 E^{-1} f(x) + 2f(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) = 0, \;\; x \in \{(0), 1, 2, 3, (4)\}, \;\; f(0) = 0, \;\; f(4) = 0 \tag{39}$$

這裡有 $\mu = 2$，$w(x) = 1$，$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\frac{\pi x}{4})$。容易看到，$\frac{g(x)}{w(x)}$ 的傅立葉級數展開式就是 $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\frac{\pi x}{4})$，即這個展開式的係數是 $c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = 0$。由於根據 (14)，$2 = \lambda_2$ 並且根據上面的討論，$c_2 = 0$，這屬於上述情況 (ii)，可知 d_2 是任意常數，並且根據 (28)，我們有

$$\begin{array}{l} d_1 = \frac{1}{2-\sqrt{2}-2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ d_3 = \frac{0}{2+\sqrt{2}-2} = 0 \end{array} \tag{40}$$

綜合以上結果，可得到 (39) 的解如下：

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right) + d_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) + c\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \end{aligned} \tag{41}$$

其中 $c=\frac{d_2}{\sqrt{2}}$ 是任意常數。

如把 (35) 改為以下方程：

$$\Delta^2E^{-1}f(x)+(2+\sqrt{2})f(x)+x=0,\ \ x\in\{(0),1,2,3,(4)\},\ \ f(0)=0,\ \ f(4)=0 \qquad (42)$$

這裡有 $\mu=2+\sqrt{2}$，$w(x)=1$，$g(x)=x$。由於根據 (14)，$2+\sqrt{2}=\lambda_3$ 並且根據 (36)，$c_3=2-\sqrt{2}\neq 0$，這屬於上述情況 (iii)，可知 (42) 沒有解。

以上討論了帶有齊次邊界條件的邊值問題 (即「齊次邊值問題」)，對於帶有非齊次邊界條件的邊值問題 (即「非齊次邊值問題」)，可以把未知函數 $f(x)$ 寫成兩部分之和：

$$f(x)=g(x)+h(x) \qquad (43)$$

其中 $h(x)$ 是某個滿足給定非齊次邊界條件的簡單函數 (通常是多項式)。把 $g(x)+h(x)$ 代入原有問題的 $f(x)$，便可把原來的非齊次邊值問題轉化為齊次邊值問題。

舉例說，考慮以下非齊次微分方程非齊次邊值問題：

$$x^2D^2f(x)+xDf(x)+2\pi^2f(x)+1=0,\ \ x\in(1,e),\ \ f(1)=-\frac{1}{\pi^2},\ \ f(e)=-\frac{1}{\pi^2} \qquad (44)$$

如前所述，把未知函數 $f(x)$ 寫成 (43) 的形式，其中的 $h(x)$ 是滿足 $h(1)=-\frac{1}{\pi^2},h(e)=-\frac{1}{\pi^2}$ 的簡單函數。容易看到只需設定

$$h(x)=-\frac{1}{\pi^2} \qquad (45)$$

便可滿足此條件。把 (43) 和 (45) 代入 (44)，可得

$$x^2D^2g(x)+x^2\times 0+xDg(x)+x\times 0+2\pi^2g(x)+2\pi^2\left(-\frac{1}{\pi^2}\right)+1=0,$$
$$x\in(1,e),\ \ g(1)+\left(-\frac{1}{\pi^2}\right)=-\frac{1}{\pi^2},\ \ g(e)+\left(-\frac{1}{\pi^2}\right)=-\frac{1}{\pi^2} \qquad (46)$$

把上式加以整理，可得以下非齊次微分方程齊次邊值問題：

$$x^2D^2g(x)+xDg(x)+2\pi^2g(x)-1=0,\ \ x\in(1,e),\ \ g(1)=0,\ \ g(e)=0 \qquad (47)$$

讀者請自行驗證，上式實質上等於 (29) (惟須把 f 改為 g)，因此其解應與 (31) 非常相似：

$$g(x)=\frac{4}{\pi^3}\left(\sin(\pi\ln x)-\frac{\sin(3\pi\ln x)}{21}-\frac{\sin(5\pi\ln x)}{115}-\dots\right) \qquad (48)$$

把 (48) 和 (45) 代入 (43)，便最終得到 (44) 的解：

$$f(x)=\frac{4}{\pi^3}\left(\sin(\pi\ln x)-\frac{\sin(3\pi\ln x)}{21}-\frac{\sin(5\pi\ln x)}{115}-\dots\right)-\frac{1}{\pi^2}\qquad(49)$$

接著考慮以下齊次差分方程非齊次邊值問題：

$$Ef(x)-f(x)+E^{-1}f(x)=0,\ \ x\in\{(0),1,2,3,(4)\},\ \ f(0)=0,\ \ f(4)=4\qquad(50)$$

同樣把未知函數 $f(x)$ 寫成 (43) 的形式，並假設 $h(x)$ 具有以下 1 次多項式的形式：$h(x)=s_1x+s_2$。把邊界條件 $h(0)=0, h(4)=4$ 代入這個 $h(x)$，可求得 $s_1=1, s_2=0$，由此有

$$h(x)=x\qquad(51)$$

把 (43) 和 (51) 代入 (50)，並加以整理，可得以下非齊次差分方程齊次邊值問題：

$$Eg(x)-g(x)+E^{-1}g(x)+x=0,\ \ x\in\{(0),1,2,3,(4)\},\ \ g(0)=0,\ \ g(4)=0\qquad(52)$$

讀者請自行驗證，上式實質上等於 (35) (惟須把 f 改為 g)，因此其解應與 (38) 非常相似：

$$g(x)=(-3-2\sqrt{2})\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)+(3-2\sqrt{2})\sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right)\qquad(53)$$

把 (53) 和 (51) 代入 (43)，便最終得到 (50) 的解：

$$f(x)=(-3-2\sqrt{2})\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)+(3-2\sqrt{2})\sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right)+x\qquad(54)$$

附錄

本附錄介紹二重傅立葉級數(double Fourier series) 的基本概念，不難把以下介紹的概念推廣到更多重的傅立葉級數。設有某個以 x 為變項關於權重函數 $w(x)$ 的正交歸一序列 $(f_n(x))_{n\in I}$ 使得任何以 A 為定義域的一元函數都可表示成這個序列成員的傅立葉級數，以及另一個以 y 為變項關於權重函數 $v(y)$ 的正交歸一序列 $(g_m(y))_{m\in J}$ 使得任何以 B 為定義域的一元函數都可表示成這個序列成員的傅立葉級數，那麼任何以 $A\times B$ 為定義域的二元函數 $h(x,y)$ 都可在形式上表示成上述兩個序列成員的二重傅立葉級數：

$$h(x,y)=\sum_{n\in I}\sum_{m\in J}c_{n,m}f_n(x)g_m(y)\qquad(55)$$

可以證明，上式中的係數 $c_{n,m}$ 可用以下任何一條公式求得：

$$c_{n,m} = \langle\langle h, f_n\rangle_w, g_m\rangle_v = \langle\langle h, g_m\rangle_v, f_n\rangle_w \qquad (56)$$

舉例說，設以 (18) 中的正交歸一序列作為變項 x 的正交歸一序列 (該序列以 $\{1,2,3\}$ 作為指標集，與權重函數 $w(x) = 1$ 相關，而且任何以 $\{1,2,3\}$ 作為定義域的一元函數都可表示成這個序列成員的傅立葉級數)，並以 (7) 中的正交歸一序列 (須把該序列中的變項從 x 改為 y) 作為變項 y 的正交歸一序列 (該序列以 $\mathbb{N}$ 作為指標集，與權重函數 $v(y) = \frac{1}{y}$ 相關，而且任何以 $(1,e)$ 作為定義域的一元函數都可表示成這個序列成員的傅立葉級數)。現設要把以 $\{1,2,3\} \times (1,e)$ 為定義域的二元函數 $h(x,y) = -x$ 寫成以下二重傅立葉級數展開式：

$$-x = \sum_{m\in\mathbb{N}} \left(\frac{c_{1,m}}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) + \frac{c_{2,m}}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{c_{3,m}}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right)\right)(\sqrt{2}\sin(m\pi\ln y)) \qquad (57)$$

可以使用 (56) 求上式中的係數 $c_{n,m}$ ($n \in \{1,2,3\}$)，例如 $c_{1,m}$ 可計算如下：

$$\begin{aligned}
c_{1,m} &= \left\langle\left\langle -x, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right\rangle_w, \sqrt{2}\sin(m\pi\ln y)\right\rangle_v \\
&= \int_{y=1}^{y=e}\left(\sum_{x=1}^{x=3}\left(-x \times \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right) \times \frac{\sqrt{2}\sin(m\pi\ln y)}{y}\right) \\
&= \sum_{x=1}^{x=3}\left(x \times \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right) \times (-\sqrt{2})\int_{y=1}^{y=e}\frac{\sin(m\pi\ln y)}{y} \\
&= (2+\sqrt{2}) \times \frac{\sqrt{2}((-1)^m - 1)}{m\pi}
\end{aligned}$$

在上面最後一行，我們應用了前面列於 (36) 和 (11) 的計算結果。類似地，也可計算出 $c_{2,m} = -\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}((-1)^m-1)}{m\pi}$ 和 $c_{3,m} = (2-\sqrt{2}) \times \frac{\sqrt{2}((-1)^m-1)}{m\pi}$。把以上結果代入 (57) 並加以簡化，便可得到

$$\begin{aligned}
-x &= \left((2+\sqrt{2}) \times \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) - \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + (2-\sqrt{2}) \times \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{3\pi x}{4}\right)\right) \\
&\quad \times \sum_{m\in\mathbb{N}}\frac{\sqrt{2}((-1)^m - 1)}{m\pi} \times \sqrt{2}\sin(m\pi\ln y) \qquad (58)
\end{aligned}$$

連結至數學專題
連結至周家發網頁