

數學示例：外導數

在初等數學中，我們著重學習「四則運算」以及由此引申出來的運算，如冪次和開方運算等，這些都是主要以數作為輸入和輸出的運算¹。在步入數學分析（又稱微積分）的殿堂後，我們開始接觸到新類型的運算——以函數（而非數）作為輸入和輸出的運算，主要例子是微分（即導數）和不定積分運算。我們在《數學示例：楔積與內部積》中介紹了 k 向量、 k 餘向量、 k 向量場和微分 k 形式的「四則運算」（沒有除運算，但有兩種乘法運算）。本文將從「四則運算」步入「數學分析」的殿堂，介紹一種特殊導數運算——**外導數**（exterior derivative）運算。

如前所述，導數運算是以函數作為輸入和輸出的運算，而根據我們在《數學示例： k 向量與 k 餘向量》中的討論， k 向量和 k 餘向量是流形上某定點處的數學對象，不涉及函數作用，因此外導數運算不能以 k 向量或 k 餘向量作為輸入。此外，雖然在向量分析中有一些以向量場為論元的微分算子（例如「旋度」curl 和「散度」divergence），但可以證明這些微分算子實質上是微分 k 形式的外導數的變體（我們會另文討論這一點），因此本文將只介紹微分 k 形式的外導數運算。以下用 d 代表外導數運算， d 是具有以下形式的函數：

$$d: \Gamma\left(\bigwedge^k T^*M\right) \rightarrow \Gamma\left(\bigwedge^{k+1} T^*M\right); \alpha \mapsto d\alpha \quad (1)$$

在上式中， $\Gamma(\bigwedge^k T^*M)$ 和 $\Gamma(\bigwedge^{k+1} T^*M)$ 分別代表 m 維流形 M 的微分 k 形式組成的集合和 M 的微分 $k+1$ 形式組成的集合。上式是說， d 以微分 k 形式 α 為輸入，並輸出微分 $k+1$ 形式 $d\alpha$ 。

我們先從最簡單的分 0 形式的外導數說起。根據《數學示例： k 向量與 k 餘向量》，微分 0 形式其實就是把 M 上的點映射為實數的函數（以下稱為「 M 上實值函數」）。設 f 為 M 上實值函數（其論元為 (x_1, \dots, x_m) ），那麼根據 (1)， f 的外導數 df 應是微分 1 形式，即應具有 $g_1 dx_1 + \dots + g_m dx_m$

¹其實部分「四則運算」也可借助函數的論元間接地以函數作為輸入和輸出，例如設 f 和 g 為函數，那麼可以把 $f+g$ 定義為這樣的函數： $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ 。

的形式，其中 g_1, \dots, g_m 是「 M 上實值函數」，以下是 df 的定義²：

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m \quad (2)$$

舉例說，考慮 M 上實值函數

$$f_I = e^{x_1 x_2} + x_3^3 \quad (3)$$

根據上式，我們有

$$\begin{aligned} df_I &= d(e^{x_1 x_2} + x_3^3) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} (e^{x_1 x_2} + x_3^3) dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} (e^{x_1 x_2} + x_3^3) dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} (e^{x_1 x_2} + x_3^3) dx_3 \\ &= x_2 e^{x_1 x_2} dx_1 + x_1 e^{x_1 x_2} dx_2 + 3x_3^2 dx_3 \end{aligned}$$

上式顯然是一個微分 1 形式。

我們在《數學示例：餘向量與 1 形式》中也曾介紹「 M 上實值函數的外導數」的概念，並提供了 $df(v)$ 的數式 (即該網頁的 (12)³)。為證明本文的數式 (2) 跟該網頁的數式 (12) 吻合，現把 (2) 所提供的 df (設定 $m = 2$) 作用於向量 $v = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ ，並計算如下⁴：

$$\begin{aligned} df(v) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 \right) \left(v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \\ &= v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right) + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right) \\ &\quad + v_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right) + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right) \\ &= v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \times 1 + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} \times 0 + v_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} \times 0 + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \times 1 \\ &= v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{aligned}$$

²某些讀者可能會發現 (2) 跟多元函數微積分中「全微分」(total differential) 的公式有相同的形式，但兩者有極不相同的含義。在全微分的公式中， dx_i 和 df 分別代表變項 x_i 和函數值 f 的變化量；在 (2) 中， dx_i 和 df 則分別是基底 1 餘向量和 f 的外導數。我們也可以說，流形分析雖然沿用多元函數微積分中很多舊有符號以至舊有公式，但賦予這些符號和公式全新的意義。

³為簡化數式，這裡略去數式 (12) 中的各個下標 p 。

⁴在以下計算中，要把括號當作乘號處理，並運用乘法對加法的分配律。此外，還要應用 $dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij}$ 此一事實，請參閱《數學示例：餘向量與 1 形式》中的 (18)。

上述結果跟上述網頁的 (12) 吻合。

看到這裡，有些讀者可能會疑惑，我們一直把基底餘向量寫成 dx_i ($1 \leq i \leq m$) 的形式，其中包含外導數符號 d ，那麼是否可以把 dx_i 看成 x_i 的外導數？根據《數學示例：餘向量與 1 形式》，我們可以把這裡的 x_i 看成「坐標函數」，這個函數把 M 上的點映射為其第 i 坐標，因此是 M 上實值函數，可以應用前面的 (2)。另一方面，根據上述網頁的 (14)，我們有

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 1, \quad \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{若 } i \neq j)$$

把上述結果套用於 (2)，可得

$$\begin{aligned} dx_i &= \frac{\partial x_i}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial x_i} dx_i + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial x_m} dx_m \\ &= 0 \times dx_1 + \dots + 1 \times dx_i + \dots + 0 \times dx_m \\ &= dx_i \end{aligned}$$

在上述計算中，等號左端的 dx_i 代表坐標函數 x_i 的外導數，等號右端的 dx_i 則是其中一個基底餘向量。上述結果告訴我們，基底餘向量 dx_i 可被看成坐標函數 x_i 的外導數，這就是基底餘向量的符號帶有 d 這個符號的原因。

接著介紹微分 k 形式 (其中 $k > 0$) 的外導數。根據《數學示例： k 向量與 k 餘向量》，微分 k 形式可以寫成以下形式 (下式大致等於上述網頁的 (40)，為簡化數式，下式略去各個函數的論元和各個基底餘向量的下標 x)：

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \alpha_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \quad (4)$$

在上式中， $\alpha_{i_1 \dots i_k}$ 是 M 上實值函數 (其論元為 (x_1, \dots, x_m))，因此可以用 (2) 求它的外導數 $d\alpha_{i_1 \dots i_k}$ ，而上式的外導數則是

$$d\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} d\alpha_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \quad (5)$$

上式是說，如要求 $d\alpha$ ，須就 α 的每一項先求 $\alpha_{i_1 \dots i_k}$ 的外導數 $d\alpha_{i_1 \dots i_k}$ ，然後把 $d\alpha_{i_1 \dots i_k}$ 與 $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ 進行楔積運算。如前所述， M 上實值函數 $\alpha_{i_1 \dots i_k}$ 的外導數 $d\alpha_{i_1 \dots i_k}$ 是一個微分 1 形式，因此上述楔積是一個微分 $k+1$ 形式。把各項加起來，所得結果就是 $d\alpha$ 。

舉例說，考慮以下微分 2 形式：

$$\alpha_{II} = e^{x^3} dx_1 \wedge dx_2 - x_2 x_3 dx_1 \wedge dx_3 \quad (6)$$

以下讓我們綜合運用 (2)、(5) 以及《數學示例：楔積與內部積》中介紹的楔積運算法則，計算上式的外導數如下：

$$\begin{aligned}
 d\alpha_{II} &= d(e^{x_3}dx_1 \wedge dx_2 - x_2x_3dx_1 \wedge dx_3) \\
 &= d(e^{x_3}) \wedge dx_1 \wedge dx_2 + d(-x_2x_3) \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\
 &= e^{x_3}dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + (-x_3dx_2 - x_2dx_3) \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\
 &= e^{x_3}dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 - x_3dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 - x_2dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\
 &= (x_3 + e^{x_3})dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3
 \end{aligned}$$

上述結果顯示，微分 2 形式 α_{II} 的外導數 $d\alpha_{II}$ 是一個微分 3 形式，正符合我們的期望。

接下來介紹外導數與其他運算的一些關係。根據 (2)，由於外導數的定義乃建基於偏導數，因此外導數繼承了導數的某些性質，其中一個重要性質是線性性質，此一性質可概括為以下定理。

定理 1：設 $\alpha, \beta \in \Gamma(\wedge^k T^*M)$ ， $c \in \mathbb{R}$ ，則

$$(i) \quad d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$$

$$(ii) \quad d(c\alpha) = cd\alpha$$

舉例說，設

$$\alpha_{III} = x_2^2 dx_1 \wedge dx_3 + \sin x_1 dx_2 \wedge dx_3 \quad (7)$$

一方面，根據 (2) 和 (5)，可求得

$$\begin{aligned}
 d\alpha_{III} &= d(x_2^2 dx_1 \wedge dx_3 + \sin x_1 dx_2 \wedge dx_3) \\
 &= d(x_2^2) \wedge dx_1 \wedge dx_3 + d(\sin x_1) \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
 &= 2x_2 dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + \cos x_1 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
 &= (\cos x_1 - 2x_2) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3
 \end{aligned}$$

由此可得

$$d\alpha_{II} + d\alpha_{III} = (\cos x_1 - 2x_2 + x_3 + e^{x_3}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \quad (8)$$

另一方面，我們有

$$\alpha_{II} + \alpha_{III} = e^{x_3} dx_1 \wedge dx_2 + (x_2^2 - x_2x_3) dx_1 \wedge dx_3 + \sin x_1 dx_2 \wedge dx_3$$

接著根據 (2) 和 (5) 求上式的外導數，可得

$$\begin{aligned}
& d(\alpha_{II} + \alpha_{III}) \\
&= d(e^{x_3} dx_1 \wedge dx_2 + (x_2^2 - x_2 x_3) dx_1 \wedge dx_3 + \sin x_1 dx_2 \wedge dx_3) \\
&= d(e^{x_3}) \wedge dx_1 \wedge dx_2 + d(x_2^2 - x_2 x_3) \wedge dx_1 \wedge dx_3 + d(\sin x_1) \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&= e^{x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + (2x_2 dx_2 - x_3 dx_2 - x_2 dx_3) \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\
&\quad + \cos x_1 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&= e^{x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + (2x_2 - x_3) dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 - x_2 dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\
&\quad + \cos x_1 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&= (\cos x_1 - 2x_2 + x_3 + e^{x_3}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \quad (9)
\end{aligned}$$

比較 (8) 和 (9)，可見 $d(\alpha_{II} + \alpha_{III}) = d\alpha_{II} + d\alpha_{III}$ ，由此驗證了「定理 1(i)」，「定理 1(ii)」也不難驗證。

學過微積分的讀者都會知道導數與函數的乘積存在以下關係：設 f 和 g 為普通實值函數，那麼 (在下式中， \times 代表函數之間的乘法， $'$ 代表導數)

$$(f \times g)' = f' \times g + f \times g' \quad (10)$$

我們在《數學示例：楔積與內部積》中介紹了微分多重形式之間的一種稱為「楔積」的乘法。現在的問題是，外導數與楔積是否也存在類似 (10) 那樣的關係？為回答這個問題，須先注意到 (10) 具備一種對稱性，而這種對稱性是源自函數乘法的「交換性」，即對任何函數 f 和 g ，都有 $f \times g = g \times f$ 。

可是，根據上述網頁，微分多重形式的楔積卻不具備交換性。事實上，根據上述網頁的「定理 2」，若 α 為微分 k 形式， β 為微分 l 形式，則 $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha$ ，即 $\alpha \wedge \beta$ 與 $\beta \wedge \alpha$ 的值可能相差一個正負號。有趣的是， $\alpha \wedge \beta$ 的外導數雖然並不滿足 (10) 所示的對稱關係，但它與 (10) 的差異也僅在於一個正負號，這是以下定理的內容。

定理 2：設 $\alpha \in \Gamma(\wedge^k T^*M)$ ， $\beta \in \Gamma(\wedge^l T^*M)$ ，則

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (d\beta) \quad (11)$$

請注意上式等號兩端都是微分 $k+l+1$ 形式。把上式與 (10) 作一比較，其中 α 與 f 對應， β 與 g 對應， \times 與 \wedge 對應， d 與 $'$ 對應，那麼可以看到，兩式的等號右端都由兩個項相加而成，其差別僅在於兩式的第二項可能相差一個正負號。當 k 是偶數時， $(-1)^k = 1$ ，在此情況下，上式更與 (10) 有相似的對稱形式。

為驗證上述定理，考慮微分 1 形式

$$\alpha_{IV} = x_2^2 dx_1 + x_2^2 dx_3 \quad (12)$$

和

$$\alpha_V = x_1 x_3 dx_2 \quad (13)$$

我們先計算

$$\begin{aligned}\alpha_{IV} \wedge \alpha_V &= (x_2^2 dx_1 + x_2^2 dx_3) \wedge (x_1 x_3 dx_2) \\ &= x_1 x_2^2 x_3 dx_1 \wedge dx_2 + x_1 x_2^2 x_3 dx_3 \wedge dx_2 \\ &= x_1 x_2^2 x_3 dx_1 \wedge dx_2 - x_1 x_2^2 x_3 dx_2 \wedge dx_3\end{aligned}$$

由此根據 (2) 和 (5), 可求得

$$\begin{aligned}&d(\alpha_{IV} \wedge \alpha_V) \\ &= d(x_1 x_2^2 x_3 dx_1 \wedge dx_2 - x_1 x_2^2 x_3 dx_2 \wedge dx_3) \\ &= d(x_1 x_2^2 x_3) \wedge dx_1 \wedge dx_2 - d(x_1 x_2^2 x_3) \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &= (x_2^2 x_3 dx_1 + 2x_1 x_2 x_3 dx_2 + x_1 x_2^2 dx_3) \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &\quad - (x_2^2 x_3 dx_1 + 2x_1 x_2 x_3 dx_2 + x_1 x_2^2 dx_3) \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &= x_2^2 x_3 dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + 2x_1 x_2 x_3 dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + x_1 x_2^2 dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &\quad - x_2^2 x_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - 2x_1 x_2 x_3 dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - x_1 x_2^2 dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &= (x_1 x_2^2 - x_2^2 x_3) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3\end{aligned}$$

另一方面, 我們又根據 (2) 和 (5) 分別計算 α_{IV} 和 α_V 的外導數如下:

$$\begin{aligned}d\alpha_{IV} &= d(x_2^2 dx_1 + x_2^2 dx_3) \\ &= d(x_2^2) \wedge dx_1 + d(x_2^2) \wedge dx_3 \\ &= 2x_2 dx_2 \wedge dx_1 + 2x_2 dx_2 \wedge dx_3 \\ &= -2x_2 dx_1 \wedge dx_2 + 2x_2 dx_2 \wedge dx_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d\alpha_V &= d(x_1 x_3 dx_2) \\ &= d(x_1 x_3) \wedge dx_2 \\ &= x_3 dx_1 \wedge dx_2 + x_1 dx_3 \wedge dx_2 \\ &= x_3 dx_1 \wedge dx_2 - x_1 dx_2 \wedge dx_3\end{aligned}$$

接著計算以下兩個楔積:

$$\begin{aligned}&(d\alpha_{IV}) \wedge \alpha_V \\ &= (-2x_2 dx_1 \wedge dx_2 + 2x_2 dx_2 \wedge dx_3) \wedge x_1 x_3 dx_2 \\ &= -2x_1 x_2 x_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_2 + 2x_1 x_2 x_3 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_2 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha_{IV} \wedge (d\alpha_V) \\
&= (-x_2^2 dx_1 - x_2^2 dx_3) \wedge (x_3 dx_1 \wedge dx_2 - x_1 dx_2 \wedge dx_3) \\
&= -x_2^2 x_3 dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + x_1 x_2^2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad -x_2^2 x_3 dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + x_1 x_2^2 dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&= (x_1 x_2^2 - x_2^2 x_3) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3
\end{aligned}$$

把上述兩個楔積相加，可得

$$(d\alpha_{IV}) \wedge \alpha_V - \alpha_{IV} \wedge (d\alpha_V) = (x_1 x_2^2 - x_2^2 x_3) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

此一結果正好等於前面算得的 $d(\alpha_{IV} \wedge \alpha_V)$ ，由此驗證了「定理 2」。

學過微積分的讀者都知道求導運算可以重複進行，即在求某函數的導數（稱為「一階導數」）後，還可以求這個導數的導數（稱為「二階導數」），以至更高階的導數。不過，對於某些函數而言，當求導運算進行至某一階時，所得結果便會是零。舉例說，對一次多項式函數 $f = 2x$ 求二階導數，所得結果是零，即 $f'' = 0$ 。

微分 k 形式的情況又如何？出乎一般人意料的是，對任何微分 k 形式進行兩次外導數運算，其結果都等於零，這是以下定理的內容。

定理 3：設 α 為微分 k 形式，則

$$d(d\alpha) = 0 \quad (14)$$

接下來用前面討論過的微分 0 形式 f_I 來驗證上述定理，由於前面已求得 df_I ，我們可以利用此中間結果求 $d(df_I)$ 如下：

$$\begin{aligned}
& d(df_I) \\
&= d(x_2 e^{x_1 x_2} dx_1 + x_1 e^{x_1 x_2} dx_2 + 3x_3^2 dx_3) \\
&= d(x_2 e^{x_1 x_2}) \wedge dx_1 + d(x_1 e^{x_1 x_2}) \wedge dx_2 + d(3x_3^2) \wedge dx_3 \\
&= (x_2^2 e^{x_1 x_2} dx_1 + (e^{x_1 x_2} + x_1 x_2 e^{x_1 x_2}) dx_2) \wedge dx_1 \\
&\quad + ((e^{x_1 x_2} + x_1 x_2 e^{x_1 x_2}) dx_1 + x_1^2 e^{x_1 x_2} dx_2) \wedge dx_2 + 6x_3 dx_3 \wedge dx_3 \\
&= x_2^2 e^{x_1 x_2} dx_1 \wedge dx_1 + (e^{x_1 x_2} + x_1 x_2 e^{x_1 x_2}) dx_2 \wedge dx_1 \\
&\quad + (e^{x_1 x_2} + x_1 x_2 e^{x_1 x_2}) dx_1 \wedge dx_2 + x_1^2 e^{x_1 x_2} dx_2 \wedge dx_2 + 6x_3 dx_3 \wedge dx_3 \\
&= (-e^{x_1 x_2} - x_1 x_2 e^{x_1 x_2} + e^{x_1 x_2} + x_1 x_2 e^{x_1 x_2}) dx_1 \wedge dx_2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

讀者可自行驗證，本文討論過的其他微分 k 形式全都滿足「定理 3」。

[連結至數學專題](#)
[連結至周家發網頁](#)