數學示例：外導數

在初等數學中，我們著重學習「四則運算」以及由此引申出來的運算，如冪次和開方運算等，這些都是主要以數作為輸入和輸出的運算[1]。在步入數學分析 (又稱微積分) 的殿堂後，我們開始接觸到新類型的運算－以函數 (而非數) 作為輸入和輸出的運算，主要例子是微分 (即導數) 和不定積分運算。我們在《數學示例：楔積與內部積》中介紹了 k 向量、k 餘向量、k 向量場和微分 k 形式的「四則運算」(沒有除運算，但有兩種乘法運算)。本文將從「四則運算」步入「數學分析」的殿堂，介紹一種特殊導數運算－外導數(exterior derivative) 運算。

如前所述，導數運算是以函數作為輸入和輸出的運算，而根據我們在《數學示例：k 向量與 k 餘向量》中的討論，k 向量和 k 餘向量是流形上某定點處的數學對象，不涉及函數作用，因此外導數運算不能以 k 向量或 k 餘向量作為輸入。此外，雖然在向量分析中有一些以向量場為論元的微分算子 (例如「旋度」curl 和「散度」divergence)，但可以證明這些微分算子實質上是微分 k 形式的外導數的變體 (我們會另文討論這一點)，因此本文將只介紹微分 k 形式的外導數運算。以下用 d 代表外導數運算，d 是具有以下形式的函數：

$$d : \Gamma\left(\bigwedge^k T^*M\right) \to \Gamma\left(\bigwedge^{k+1} T^*M\right);\ \ \alpha \mapsto d\alpha \qquad (1)$$

在上式中，$\Gamma(\bigwedge^k T^*M)$ 和 $\Gamma(\bigwedge^{k+1} T^*M)$ 分別代表 m 維流形 M 的微分 k 形式組成的集合和 M 的微分 $k+1$ 形式組成的集合。上式是說，d 以微分 k 形式 α 為輸入，並輸出微分 $k+1$ 形式 $d\alpha$。

我們先從最簡單的微分 0 形式的外導數說起。根據《數學示例：k 向量與 k 餘向量》，微分 0 形式其實就是把 M 上的點映射為實數的函數 (以下稱為「M 上實值函數」)。設 f 為 M 上實值函數 (其論元為 $(x_1, \ldots, x_m)$)，那麼根據 (1)，f 的外導數 df 應是微分 1 形式，即應具有 $g_1 dx_1 + \ldots + g_m dx_m$

[1] 其實部分「四則運算」也可借助函數的論元間接地以函數作為輸入和輸出，例如設 f 和 g 為函數，那麼可以把 $f+g$ 定義為這樣的函數：$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$。

的形式，其中 $g_1, \ldots, g_m$ 是「M 上實值函數」，以下是 df 的定義[2]：

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m \qquad (2)$$

舉例說，考慮 M 上實值函數

$$f_I = e^{x_1 x_2} + {x_3}^3 \qquad (3)$$

根據上式，我們有

$$\begin{aligned} df_I &= d(e^{x_1 x_2} + {x_3}^3) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}(e^{x_1 x_2} + {x_3}^3) dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}(e^{x_1 x_2} + {x_3}^3) dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}(e^{x_1 x_2} + {x_3}^3) dx_3 \\ &= x_2 e^{x_1 x_2} dx_1 + x_1 e^{x_1 x_2} dx_2 + 3{x_3}^2 dx_3 \end{aligned}$$

上式顯然是一個微分 1 形式。

我們在《數學示例：餘向量與 1 形式》中也曾介紹「M 上實值函數的外導數」的概念，並提供了 $df(v)$ 的數式 (即該網頁的 (12)[3])。為證明本文的數式 (2) 跟該網頁的數式 (12) 吻合，現把 (2) 所提供的 df (設定 $m = 2$) 作用於向量 $v = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$，並計算如下[4]：

$$\begin{aligned} df(v) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 \right) \left(v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \\ &= v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right) + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right) \\ &\quad + v_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right) + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right) \\ &= v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \times 1 + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} \times 0 + v_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} \times 0 + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \times 1 \\ &= v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{aligned}$$

[2]某些讀者可能會發現 (2) 跟多元函數微積分中「全微分」(total differential) 的公式有相同的形式，但兩者有極不相同的含義。在全微分的公式中，dx_i 和 df 分別代表變項 x_i 和函數值 f 的變化量；在 (2) 中，dx_i 和 df 則分別是基底 1 餘向量和 f 的外導數。我們也可以說，流形分析雖然沿用多元函數微積分中很多舊有符號以至舊有公式，但賦予這些符號和公式全新的意義。

[3]為簡化數式，這裡略去數式 (12) 中的各個下標 p。

[4]在以下計算中，要把括號當作乘號處理，並運用乘法對加法的分配律。此外，還要應用 $dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij}$ 此一事實，請參閱《數學示例：餘向量與 1 形式》中的 (18)。

上述結果跟上述網頁的 (12) 吻合。

看到這裡，有些讀者可能會疑惑，我們一直把基底餘向量寫成 dx_i $(1 \le i \le m)$ 的形式，其中包含外導數符號 d，那麼是否可以把 dx_i 看成 x_i 的外導數？根據《數學示例：餘向量與 1 形式》，我們可以把這裡的 x_i 看成「坐標函數」，這個函數把 M 上的點映射為其第 i 坐標，因此是 M 上實值函數，可以應用前面的 (2)。另一方面，根據上述網頁的 (14)，我們有

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 1, \quad \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = 0 \ \ (\text{若} i \neq j)$$

把上述結果套用於 (2)，可得

$$\begin{aligned} dx_i &= \frac{\partial x_i}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial x_i} dx_i + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial x_m} dx_m \\ &= 0 \times dx_1 + \ldots + 1 \times dx_i + \ldots + 0 \times dx_m \\ &= dx_i \end{aligned}$$

在上述計算中，等號左端的 dx_i 代表坐標函數 x_i 的外導數，等號右端的 dx_i 則是其中一個基底餘向量。上述結果告訴我們，基底餘向量 dx_i 可被看成坐標函數 x_i 的外導數，這就是基底餘向量的符號帶有 d 這個符號的原因。

接著介紹微分 k 形式 (其中 $k > 0$) 的外導數。根據《數學示例：k 向量與 k 餘向量》，微分 k 形式可以寫成以下形式 (下式大致等於上述網頁的 (40)，為簡化數式，下式略去各個函數的論元和各個基底餘向量的下標 x)：

$$\alpha = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m} a_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \qquad (4)$$

在上式中，$a_{i_1 \ldots i_k}$ 是 M 上實值函數 (其論元為 $(x_1, \ldots, x_m)$)，因此可以用 (2) 求它的外導數 $da_{i_1 \ldots i_k}$，而上式的外導數則是

$$d\alpha = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m} da_{i_1 \ldots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \qquad (5)$$

上式是說，如要求 $d\alpha$，須就 α 的每一項先求 $a_{i_1 \ldots i_k}$ 的外導數 $da_{i_1 \ldots i_k}$，然後把 $da_{i_1 \ldots i_k}$ 與 $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$ 進行楔積運算。如前所述，M 上實值函數 $a_{i_1 \ldots i_k}$ 的外導數 $da_{i_1 \ldots i_k}$ 是一個微分 1 形式，因此上述楔積是一個微分 $k+1$ 形式。把各項加起來，所得結果就是 $d\alpha$。

舉例說，考慮以下微分 2 形式：

$$\alpha_{II} = e^{x_3} dx_1 \wedge dx_2 - x_2 x_3 dx_1 \wedge dx_3 \qquad (6)$$

以下讓我們綜合運用 (2)、(5) 以及《數學示例：楔積與內部積》中介紹的楔積運算法則，計算上式的外導數如下：

$$
\begin{aligned}
& d\alpha_{II} \\
= \; & d(e^{x_3}dx_1 \wedge dx_2 - x_2x_3dx_1 \wedge dx_3) \\
= \; & d(e^{x_3}) \wedge dx_1 \wedge dx_2 + d(-x_2x_3) \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\
= \; & e^{x_3}dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + (-x_3dx_2 - x_2dx_3) \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\
= \; & e^{x_3}dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 - x_3dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 - x_2dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\
= \; & (x_3 + e^{x_3})dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3
\end{aligned}
$$

上述結果顯示，微分 2 形式 α_{II} 的外導數 $d\alpha_{II}$ 是一個微分 3 形式，正符合我們的期望。

接下來介紹外導數與其他運算的一些關係。根據 (2)，由於外導數的定義乃建基於偏導數，因此外導數繼承了導數的某些性質，其中一個重要性質是線性性質，此一性質可概括為以下定理。

定理 1：設 $\alpha, \beta \in \Gamma(\bigwedge^k T^*M)$，$c \in \mathbb{R}$，則

(i) $d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$

(ii) $d(c\alpha) = cd\alpha$

舉例說，設

$$\alpha_{III} = {x_2}^2dx_1 \wedge dx_3 + \sin x_1dx_2 \wedge dx_3 \qquad (7)$$

一方面，根據 (2) 和 (5)，可求得

$$
\begin{aligned}
d\alpha_{III} &= d({x_2}^2dx_1 \wedge dx_3 + \sin x_1dx_2 \wedge dx_3) \\
&= d({x_2}^2) \wedge dx_1 \wedge dx_3 + d(\sin x_1) \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&= 2x_2dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + \cos x_1dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
&= (\cos x_1 - 2x_2)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3
\end{aligned}
$$

由此可得

$$d\alpha_{II} + d\alpha_{III} = (\cos x_1 - 2x_2 + x_3 + e^{x_3})dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \qquad (8)$$

另一方面，我們有

$$\alpha_{II} + \alpha_{III} = e^{x_3}dx_1 \wedge dx_2 + ({x_2}^2 - x_2x_3)dx_1 \wedge dx_3 + \sin x_1dx_2 \wedge dx_3$$

接著根據 (2) 和 (5) 求上式的外導數，可得

$$\begin{aligned}
& d(\alpha_{II}+\alpha_{III}) \\
= \;& d(e^{x_3}dx_1\wedge dx_2+({x_2}^2-x_2x_3)dx_1\wedge dx_3+\sin x_1 dx_2\wedge dx_3) \\
= \;& d(e^{x_3})\wedge dx_1\wedge dx_2+d({x_2}^2-x_2x_3)\wedge dx_1\wedge dx_3+d(\sin x_1)\wedge dx_2\wedge dx_3 \\
= \;& e^{x_3}dx_3\wedge dx_1\wedge dx_2+(2x_2dx_2-x_3dx_2-x_2dx_3)\wedge dx_1\wedge dx_3 \\
& +\cos x_1 dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3 \\
= \;& e^{x_3}dx_3\wedge dx_1\wedge dx_2+(2x_2-x_3)dx_2\wedge dx_1\wedge dx_3-x_2dx_3\wedge dx_1\wedge dx_3 \\
& +\cos x_1 dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3 \\
= \;& (\cos x_1-2x_2+x_3+e^{x_3})dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3 \qquad (9)
\end{aligned}$$

比較 (8) 和 (9)，可見 $d(\alpha_{II}+\alpha_{III})=d\alpha_{II}+d\alpha_{III}$，由此驗證了「定理 1(i)」，「定理 1(ii)」也不難驗證。

學過微積分的讀者都會知道導數與函數的乘積存在以下關係：設 f 和 g 為普通實值函數，那麼 (在下式中，$\times$ 代表函數之間的乘法，’ 代表導數)

$$(f\times g)'=f'\times g+f\times g' \qquad (10)$$

我們在《數學示例：楔積與內部積》中介紹了微分多重形式之間的一種稱為「楔積」的乘法。現在的問題是，外導數與楔積是否也存在類似 (10) 那樣的關係？為回答這個問題，須先注意到 (10) 具備一種對稱性，而這種對稱性是源自函數乘法的「交換性」，即對任何函數 f 和 g，都有 $f\times g=g\times f$。

可是，根據上述網頁，微分多重形式的楔積卻不具備交換性。事實上，根據上述網頁的「定理 2」，若 α 為微分 k 形式，β 為微分 l 形式，則 $\alpha\wedge\beta=(-1)^{kl}\beta\wedge\alpha$，即 $\alpha\wedge\beta$ 與 $\beta\wedge\alpha$ 的值可能相差一個正負號。有趣的是，$\alpha\wedge\beta$ 的外導數雖然並不滿足 (10) 所示的對稱關係，但它與 (10) 的差異也僅在於一個正負號，這是以下定理的內容。

定理 2：設 $\alpha\in\Gamma(\bigwedge^k T^*M)$，$\beta\in\Gamma(\bigwedge^l T^*M)$，則

$$d(\alpha\wedge\beta)=(d\alpha)\wedge\beta+(-1)^k\alpha\wedge(d\beta) \qquad (11)$$

請注意上式等號兩端都是微分 $k+l+1$ 形式。把上式與 (10) 作一比較，其中 α 與 f 對應，β 與 g 對應，$\times$ 與 $\wedge$ 對應，d 與 ’ 對應，那麼可以看到，兩式的等號右端都由兩個項相加而成，其差別僅在於兩式的第二項可能相差一個正負號。當 k 是偶數時，$(-1)^k=1$，在此情況下，上式更與 (10) 有相似的對稱形式。

為驗證上述定理，考慮微分 1 形式

$$\alpha_{IV}={x_2}^2dx_1+{x_2}^2dx_3 \qquad (12)$$

和

$$\alpha_V = x_1x_3dx_2 \qquad (13)$$

我們先計算

$$\begin{aligned}
\alpha_{IV} \wedge \alpha_V &= ({x_2}^2dx_1 + {x_2}^2dx_3) \wedge (x_1x_3dx_2) \\
&= x_1{x_2}^2x_3dx_1 \wedge dx_2 + x_1{x_2}^2x_3dx_3 \wedge dx_2 \\
&= x_1{x_2}^2x_3dx_1 \wedge dx_2 - x_1{x_2}^2x_3dx_2 \wedge dx_3
\end{aligned}$$

由此根據 (2) 和 (5)，可求得

$$\begin{aligned}
& d(\alpha_{IV} \wedge \alpha_V) \\
= \;& d(x_1{x_2}^2x_3dx_1 \wedge dx_2 - x_1{x_2}^2x_3dx_2 \wedge dx_3) \\
= \;& d(x_1{x_2}^2x_3) \wedge dx_1 \wedge dx_2 - d(x_1{x_2}^2x_3) \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
= \;& ({x_2}^2x_3dx_1 + 2x_1x_2x_3dx_2 + x_1{x_2}^2dx_3) \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\
& -({x_2}^2x_3dx_1 + 2x_1x_2x_3dx_2 + x_1{x_2}^2dx_3) \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
= \;& {x_2}^2x_3dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + 2x_1x_2x_3dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + x_1{x_2}^2dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\
& -{x_2}^2x_3dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - 2x_1x_2x_3dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - x_1{x_2}^2dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
= \;& (x_1{x_2}^2 - {x_2}^2x_3)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3
\end{aligned}$$

另一方面，我們又根據 (2) 和 (5) 分別計算 α_{IV} 和 α_V 的外導數如下：

$$\begin{aligned}
d\alpha_{IV} &= d({x_2}^2dx_1 + {x_2}^2dx_3) \\
&= d({x_2}^2) \wedge dx_1 + d({x_2}^2) \wedge dx_3 \\
&= 2x_2dx_2 \wedge dx_1 + 2x_2dx_2 \wedge dx_3 \\
&= -2x_2dx_1 \wedge dx_2 + 2x_2dx_2 \wedge dx_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\alpha_V &= d(x_1x_3dx_2) \\
&= d(x_1x_3) \wedge dx_2 \\
&= x_3dx_1 \wedge dx_2 + x_1dx_3 \wedge dx_2 \\
&= x_3dx_1 \wedge dx_2 - x_1dx_2 \wedge dx_3
\end{aligned}$$

接著計算以下兩個楔積：

$$\begin{aligned}
& (d\alpha_{IV}) \wedge \alpha_V \\
= \;& (-2x_2dx_1 \wedge dx_2 + 2x_2dx_2 \wedge dx_3) \wedge x_1x_3dx_2 \\
= \;& -2x_1x_2x_3dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_2 + 2x_1x_2x_3dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_2 \\
= \;& 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\alpha_{IV} \wedge (d\alpha_V) \\
= \; & (-{x_2}^2 dx_1 - {x_2}^2 dx_3) \wedge (x_3 dx_1 \wedge dx_2 - x_1 dx_2 \wedge dx_3) \\
= \; & -{x_2}^2 x_3 dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + x_1 {x_2}^2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
& -{x_2}^2 x_3 dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + x_1 {x_2}^2 dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
= \; & (x_1 {x_2}^2 - {x_2}^2 x_3) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3
\end{aligned}
$$

把上述兩個楔積相加，可得

$$(d\alpha_{IV}) \wedge \alpha_V - \alpha_{IV} \wedge (d\alpha_V) = (x_1 {x_2}^2 - {x_2}^2 x_3) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

此一結果正好等於前面算得的 $d(\alpha_{IV} \wedge \alpha_V)$，由此驗證了「定理 2」。

學過微積分的讀者都知道求導運算可以重複進行，即在求某函數的導數 (稱為「一階導數」) 後，還可以求這個導數的導數 (稱為「二階導數」)，以至更高階的導數。不過，對於某些函數而言，當求導運算進行至某一階時，所得結果便會是零。舉例說，對一次多項式函數 $f = 2x$ 求二階導數，所得結果是零，即 $f" = 0$。

微分 k 形式的情況又如何？出乎一般人意料的是，對任何微分 k 形式進行兩次外導數運算，其結果都等於零，這是以下定理的內容。

定理 3：設 α 為微分 k 形式，則

$$d(d\alpha) = 0 \qquad (14)$$

接下來用前面討論過的微分 0 形式 f_I 來驗證上述定理，由於前面已求得 df_I，我們可以利用此中間結果求 $d(df_I)$ 如下：

$$
\begin{aligned}
& d(df_I) \\
= \; & d(x_2 e^{x_1 x_2} dx_1 + x_1 e^{x_1 x_2} dx_2 + 3{x_3}^2 dx_3) \\
= \; & d(x_2 e^{x_1 x_2}) \wedge dx_1 + d(x_1 e^{x_1 x_2}) \wedge dx_2 + d(3{x_3}^2) \wedge dx_3 \\
= \; & ({x_2}^2 e^{x_1 x_2} dx_1 + (e^{x_1 x_2} + x_1 x_2 e^{x_1 x_2}) dx_2) \wedge dx_1 \\
& +((e^{x_1 x_2} + x_1 x_2 e^{x_1 x_2}) dx_1 + {x_1}^2 e^{x_1 x_2} dx_2) \wedge dx_2 + 6x_3 dx_3 \wedge dx_3 \\
= \; & {x_2}^2 e^{x_1 x_2} dx_1 \wedge dx_1 + (e^{x_1 x_2} + x_1 x_2 e^{x_1 x_2}) dx_2 \wedge dx_1 \\
& +(e^{x_1 x_2} + x_1 x_2 e^{x_1 x_2}) dx_1 \wedge dx_2 + {x_1}^2 e^{x_1 x_2} dx_2 \wedge dx_2 + 6x_3 dx_3 \wedge dx_3 \\
= \; & (-e^{x_1 x_2} - x_1 x_2 e^{x_1 x_2} + e^{x_1 x_2} + x_1 x_2 e^{x_1 x_2}) dx_1 \wedge dx_2 \\
= \; & 0
\end{aligned}
$$

讀者可自行驗證，本文討論過的其他微分 k 形式全都滿足「定理 3」。

連結至數學專題
連結至周家發網頁