數學示例：消元法

我們在《數學示例：基本矩陣》、《數學示例：待定係數法》和《數學示例：參數變異法》中介紹了一種用矩陣求解 1 階常微分／差分方程組的方法，這種方法只適用於求解具有「正態形式」的 1 階常微分／差分方程組，對其他形式／種類的方程組卻是無能為力。本文主旨是介紹一種可用來求解多種形式／種類方程組的方法－消元法(elimination method)，這種方法跟求解線性代數方程組的同名方法具有相似的原理。

為方便討論，以下以包含兩個未知函數 f 和 g 的方程組為例闡釋這種方法。「消元法」的基本原理就是通過對方程組中的方程進行適當運算，把未知函數消去至只剩下一個 (設為 f)，得到一個僅包含 f 的常係數線性方程，並從而解出 f，此後可以採取兩種不同的策略。第一種策略可稱為「逐一消去法」，就是通過對方程組中的方程進行適當運算，把未知函數消去至只剩下另一個 (即 g)，並從而解出 g。

舉例說，考慮以下 1 階常微分方程組 (為方便以下計算，以下一般把方程組中的方程寫成算子形式)：

$$\left\{\begin{array}{l}(5D+4I)f(x)-(2D+I)g(x)-e^{-x}=0\\(D+8I)f(x)-3Ig(x)-5e^{-x}=0\end{array}\right. \qquad (1)$$

上述方程並不具有「正態形式」，所以我們運用上述第一種策略，依次消去上列兩個未知函數 $f(x)$ 和 $g(x)$ 中的一個。首先，把 $-3I$ 和 $2D+I$ 分別乘以 (即作用於) (1) 的第一和第二個方程，得到

$$\left\{\begin{array}{l}-3(5D+4I)f(x)+3(2D+I)g(x)+3e^{-x}=0\\(2D+I)(D+8I)f(x)-(2D+I)3g(x)-(2D+I)5e^{-x}=0\end{array}\right. \qquad (2)$$

把以上兩個方程相加，便可消去 $g(x)$，從而得到以下僅含 $f(x)$ 的常微分方程：

$$2D^2f(x)+2Df(x)-4f(x)+8e^{-x}=0 \qquad (3)$$

可以求得上述方程的通解如下：

$$f(x)=c_1e^{-2x}+c_2e^{x}+2e^{-x} \qquad (4)$$

其次，把 $D+8I$ 和 $5D+4I$ 分別乘以 (1) 的第一和第二個方程，得到

$$\begin{cases} (D+8I)(5D+4I)f(x)-(D+8I)(2D+I)g(x)-(D+8I)e^{-x}=0 \\ (5D+4I)(D+8I)f(x)-(5D+4I)3g(x)-(5D+4I)5e^{-x}=0 \end{cases} \quad (5)$$

把以上第二個方程減去第一個方程，便可消去 $f(x)$，從而得到以下僅含 $g(x)$ 的微分方程：

$$2D^2f(x)+2Df(x)-4f(x)+12e^{-x}=0 \quad (6)$$

可以求得上述方程的通解如下：

$$g(x)=c_3e^{-2x}+c_4e^{x}+3e^{-x} \quad (7)$$

以上求得的 $f(x)$ 和 $g(x)$ 包含四個任意常數，但這四個常數並非相互獨立。事實上，如把 (4) 和 (7) 代入 (1) 的任何一個方程，例如第二個方程，可得到

$$(6c_1-3c_3)e^{-2x}+(9c_2-3c_4)e^{x}=0$$

從上式可得以下方程組：

$$\begin{cases} 6c_1-3c_3=0 \\ 9c_2-3c_4=0 \end{cases}$$

解上述方程組，得 $c_3=2c_1, c_4=3c_2$，由此可得 (1) 的通解為

$$f(x)=c_1e^{-2x}+c_2e^{x}+2e^{-x},\ \ g(x)=2c_1e^{-2x}+3c_2e^{x}+3e^{-x} \quad (8)$$

第二種策略可稱為「消元 + 代入法」，就是在解出 f 後，把 f 代入原來方程組中只包含 Ig 項 (即不包含 $\phi^i g$ 項，其中 ϕ 等於 D 或 E，並且 $i>0$) 的方程，使之變成僅包含 g 的方程，並從而解出 g。惟請注意，此一策略能否得到正確答案，視乎原來的方程組是否包含符合上述條件的方程。

仍以 (1) 為例，當解出 $f(x)$ (見 (4)) 後，可以把 (4) 代入 (1) 中第二個方程 (因為該方程只包含 $Ig(x)$ 項而沒有 $Dg(x)$、$D^2g(x)$ 等項)，得到以下方程：

$$-3g(x)+6c_1e^{-2x}+9c_2e^{x}+9e^{-x}=0 \quad (9)$$

從上式可馬上解出

$$g(x)=2c_1e^{-2x}+3c_2e^{x}+3e^{-x} \quad (10)$$

上述結果與 (4) 合在一起正好等於 (8)。讀者請自行驗證，如果把 (4) 代入 (1) 中第一個方程，會得到常微分方程 $2Dg(x)+g(x)+6c_1e^{-2x}-9c_2e^{x}+3e^{-x}=0$，這個方程的通解是 $g(x)=c_5e^{-\frac{1}{2}x}+2c_1e^{-2x}+3c_2e^{x}+3e^{-x}$，但這個解與 (4) 合在一起並不構成 (1) 正確的解。

從上例可以看到，上述第二種策略比第一種策略簡單易行，但只能用於符合上述特定條件的方程組。在以下的討論中，在可行情況下，將盡量使用第二種策略。

上例是包含兩個未知函數的 1 階方程組，這是最簡單的情況。以下讓我們看一些較複雜的例子，考慮以下包含兩個未知函數的 2 階常差分方程組：

$$\begin{cases} 2If(x) + (E^2 - 8I)g(x) = 0 \\ (E^2 - 8I)f(x) + 32Ig(x) = 0 \end{cases} \qquad (11)$$

為消去未知函數 $f(x)$，把 $E^2 - 8I$ 和 $2I$ 分別乘以 (11) 的第一和第二個方程，然後把第一個方程減去第二個方程，得到

$$(E^4 - 16E^2)g(x) = 0$$

上式實質上等於以下 2 階常差分方程：

$$(E^2 - 16I)g(x) = 0 \qquad (12)$$

可以求得上述方程的通解如下：

$$g(x) = c_1(-4)^x + c_2 4^x \qquad (13)$$

把上式代入 (11) 的第一個方程 (因為該方程只包含 $If(x)$ 項而沒有 $Ef(x)$、$E^2f(x)$ 等項)，可得以下方程：

$$2f(x) + 8c_1(-4)^x + 8c_2 4^x = 0 \qquad (14)$$

從上式可馬上解出

$$f(x) = -4c_1(-4)^x - 4c_2 4^x \qquad (15)$$

現把 (11) 的通解總結如下：

$$f(x) = -4c_1(-4)^x - 4c_2 4^x, \;\; g(x) = c_1(-4)^x + c_2 4^x \qquad (16)$$

接著考慮以下包含三個未知函數的 1 階常微分方程組：

$$\begin{cases} Df(x) + Ih(x) - e^x = 0 \\ (D - I)f(x) + Dg(x) + Dh(x) = 0 \\ If(x) + 2Ig(x) + Dh(x) - e^x = 0 \end{cases} \qquad (17)$$

為求解上述方程組，可以先消去 $h(x)$。一方面，用 D 乘以第一個方程，然後把第一個方程減去第二個方程，得到

$$(D^2 - D + I)f(x) - Dg(x) - e^x = 0 \qquad (18)$$

另一方面，用 D 乘以第一個方程，然後把第一個方程減去第三個方程，得到

$$(D^2 - I)f(x) - 2Ig(x) = 0 \qquad (19)$$

至此得到包含兩個未知函數的 2 階常微分方程組 (18) 和 (19)，我們繼續用消元法求解這個方程組。為消去未知函數 $g(x)$，把 $2I$ 和 D 分別乘以 (18) 和 (19)，然後把 (19) 減去 (18)，得到

$$(D^3 - 2D^2 + D - 2I)f(x) + 2e^x = 0 \qquad (20)$$

可以求得上述方程的通解如下：

$$f(x) = c_1e^{2x} + c_2\cos x + c_3\sin x + e^x \qquad (21)$$

把 (21) 代入 (19) (因為該方程只包含 $Ig(x)$ 項而沒有 $Dg(x)$、$D^2g(x)$ 等項)，可得以下方程：

$$-2g(x) + 3c_1e^{2x} - 2c_2\cos x - 2c_3\sin x = 0 \qquad (22)$$

從上式可馬上解出

$$g(x) = \frac{3}{2}c_1e^{2x} - c_2\cos x - c_3\sin x \qquad (23)$$

把 (21) 代入 (17) 的第一個方程 (因為該方程只包含 $Ih(x)$ 項而沒有 $Dh(x)$、$D^2h(x)$ 等項)，可馬上解出 $h(x)$ 如下：

$$h(x) = -2c_1e^{2x} + c_2\sin x - c_3\cos x \qquad (24)$$

現把 (17) 的通解總結如下：

$$\begin{aligned} f(x) &= c_1e^{2x} + c_2\cos x + c_3\sin x + e^x, \\ g(x) &= \frac{3}{2}c_1e^{2x} - c_2\cos x - c_3\sin x, \\ h(x) &= -2c_1e^{2x} + c_2\sin x - c_3\cos x \qquad (25) \end{aligned}$$

消元法也可用來求解偏微分／差分方程，考慮以下 1 階偏微分方程組：

$$\left\{ \begin{array}{l} (D_x + D_y)f(x,y) + 2Ig(x,y) = 0 \\ -2If(x,y) + (D_x + D_y)g(x,y) = 0 \end{array} \right. \qquad (26)$$

為消去未知函數 $g(x,y)$，把 $D_x + D_y$ 和 $2I$ 分別乘以 (26) 的第一和第二個方程，然後把第一個方程減第二個方程，得到

$$((D_x + D_y)^2 + 4I)f(x,y) = 0 \qquad (27)$$

對上式左端進行因式分解，可把上式轉化為

$$(D_x + D_y - 2iI)(D_x + D_y + 2iI)f(x,y) = 0 \qquad (28)$$

根據《數學示例：含任意函數的解》，只需分別求解 $D_x f(x,y)+D_y f(x,y)-2if(x,y)=0$ 和 $D_x f(x,y)+D_y f(x,y)+2if(x,y)=0$，然後把這兩個解相加。根據該網頁，為求解上面第一個方程，可以運用以下附屬方程：

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{df}{2if} \qquad (29)$$

運用該網頁介紹的方法，可求得上面第一個方程的通解為 $f(x,y) = e^{2ix}h_1(y-x)$。類似地，也可求得上面第二個方程的通解為 $f(x,y) = e^{-2ix}h_2(y-x)$，其中 h_1 和 h_2 為任意函數。由此可得 (27) 的通解如下 (為方便討論，以下把 e^{2ix} 和 e^{-2ix} 寫成圓函數形式)：

$$f(x,y) = (\cos(2x)+i\sin(2x))h_1(y-x)+(\cos(2x)-i\sin(2x))h_2(y-x) \qquad (30)$$

把上式代入 (26) 的第一個方程 (因為該方程只包含 $Ig(x,y)$ 項而沒有 $D_x g(x,y)$、$D_y g(x,y)$ 等項)，可得以下方程：

$$2g(x,y)+2(i\cos(2x)-\sin(2x))h_1(y-x)-2(i\cos(2x)+\sin(2x))h_2(y-x) = 0 \qquad (31)$$

從上式可馬上解出

$$g(x,y) = (-i\cos(2x)+\sin(2x))h_1(y-x)+(i\cos(2x)+\sin(2x))h_2(y-x) \qquad (32)$$

現把 (26) 的通解總結如下：

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (\cos(2x)+i\sin(2x))h_1(y-x)+(\cos(2x)-i\sin(2x))h_2(y-x), \\ g(x,y) &= (-i\cos(2x)+\sin(2x))h_1(y-x)+(i\cos(2x)+\sin(2x))h_2(y-x) \end{aligned} \qquad (33)$$

可是，上式包含虛數單位 i，如果希望 (26) 的通解必須為實值函數，可以為上式附加限制條件，規定上式中的任意函數 h_1 和 h_2 必須使得上式中的 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 為實值函數，例如如果設定 h_1 為實值函數並且 $h_2 = h_1$，那麼有 $f(x,y) = 2\cos(2x)h_1(y-x), g(x,y) = 2\sin(2x)h_1(y-x)$，這兩個函數顯然都是實值函數。

接著考慮以下 x 和 y 的階俱為 1 的偏差分方程組：

$$\begin{cases} E_x f(x,y) + E_y g(x,y) = 0 \\ E_y f(x,y) + E_x g(x,y) - 1 = 0 \end{cases} \qquad (34)$$

為消去未知函數 $f(x,y)$，把 E_y 和 E_x 分別乘以 (34) 的第一和第二個方程，然後把第二個方程減第一個方程，得到

$$((E_x)^2 - (E_y)^2)g(x,y) - 1 = 0 \qquad (35)$$

這是一個非齊次方程，根據《數學示例：含任意函數的解》，應先求解與它相關的齊次方程，即 $((E_x)^2-(E_y)^2)g(x,y)=0$，經因式分解後，這個方程具有以下形式：

$$(E_x-E_y)(E_x+E_y)g(x,y)=0 \qquad (36)$$

我們只需分別求解 $E_xg(x,y)-E_yg(x,y)=0$ 和 $E_xg(x,y)+E_yg(x,y)=0$，然後把這兩個解相加。運用該網頁介紹的方法，可求得第一個方程的通解為 $g(x,y)=h_1(x+y)$。類似地，也可求得第二個方程的通解為 $g(x,y)=(-1)^xh_2(x+y)$，其中 h_1 和 h_2 為任意函數。由此可得 (36) 的通解 (亦即 (35) 的補助解) 如下：

$$g_c(x,y)=h_1(x+y)+(-1)^xh_2(x+y) \qquad (37)$$

接下來用「待定係數法」求 (35) 的特解，為此設定 $g_p(x,y)=s_1x+s_2y+s_3$。讀者請自行驗證，把上述 $g_p(x,y)$ 代入 (35)，可得一個解為 $s_1=\frac{1}{2}+s_2, s_2=s_2, s_3=0$，由此可得 (35) 的特解為 $g_p(x,y)=\frac{1}{2}x+s_2(x+y)$。但這裡的 $s_2(x+y)$ 可被看成 (37) 中的 $h_1(x+y)$ 的一個特例，因此可以把 (35) 的特解簡化為：

$$g_p(x,y)=\frac{1}{2}x \qquad (38)$$

把 (37) 中的 $g_c(x,y)$ 與 (38) 中的 $g_p(x,y)$ 相加，便可得到 (35) 的通解如下：

$$g(x,y)=h_1(x+y)+(-1)^xh_2(x+y)+\frac{1}{2}x \qquad (39)$$

由於 (34) 中的兩個方程都包含 $E_xf(x,y)$ 或 $E_yf(x,y)$，無法對其採取上述第二種策略，所以接下來要消去 $g(x,y)$。為此，把 E_x 和 E_y 分別乘以 (34) 的第一和第二個方程，然後把第一個方程減第二個方程，得到

$$((E_x)^2-(E_y)^2)f(x,y)+1=0 \qquad (40)$$

讀者請自行驗證，利用類似前面的方法，可求得上述方程的通解如下：

$$f(x,y)=h_3(x+y)+(-1)^xh_4(x+y)-\frac{1}{2}x \qquad (41)$$

以上求得的 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 包含四個任意函數，但這四個函數並非相互獨立。如把 (39) 和 (41) 代入 (34) 的第一個方程，可得到

$$h_3(x+y+1)-(-1)^xh_4(x+y+1)-\frac{1}{2}+h_1(x+y+1)+(-1)^xh_2(x+y+1)=0$$

根據上式，不妨設定 $h_3=-h_1+\frac{1}{2}, h_4=h_2$，由此可得 (34) 的通解為

$$\begin{aligned}f(x,y)&=-h_1(x+y)+(-1)^xh_2(x+y)-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2},\\ g(x,y)&=h_1(x+y)+(-1)^xh_2(x+y)+\frac{1}{2}x \qquad (42)\end{aligned}$$

以上介紹了用消元法求解微分／差分方程組的方法，利用這種方法能否成功解題，視乎經消去未知函數後所得的方程是否容易求解。此外，還存在一些無法用消元法求解的方程組，考慮以下差分方程組：

$$\begin{cases} (E-I)f(x)+(E-I)g(x)=0 \\ (E+2I)f(x)+(E+2I)g(x)=0 \end{cases} \tag{43}$$

請讀者自行驗證，如使用上述消元法，總是同時消去兩個未知函數，無法得到僅含一個未知函數的方程。事實上，(43) 可以改寫成以下形式：

$$\begin{cases} E(f(x)+g(x))=f(x)+g(x) \\ E(f(x)+g(x))=-2(f(x)+g(x)) \end{cases} \tag{44}$$

從上式可得到 $f(x)+g(x)=-2(f(x)+g(x))$，由此必有 $f(x)+g(x)=0$，這即是說，任何滿足 $f(x)+g(x)=0$ 的 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 (43) 的解，因此 (43) 的通解具有以下形式：

$$f(x)=h(x),\ \ g(x)=-h(x) \tag{45}$$

其中 $h(x)$ 是任意函數。

接著討論具有「可分核」的弗雷德霍姆積分／和分方程組，我們在《數學示例：可分變項與可分核》中介紹了求解具有「可分核」的單個弗雷德霍姆積分／和分方程的方法，這種方法的要旨是把方程中包含積分／和分算子的項寫成待定的常數，在解出這些常數後，便得到原來方程的解。對於具有「可分核」的弗雷德霍姆積分／和分方程組，我們同樣把各個方程中包含積分／和分算子的項寫成待定的常數，並設法解出這些常數。請注意在求解這些常數的過程中，常須應用求解線性代數方程組的消元法。

舉例說，考慮以下包含三個未知函數的弗雷德霍姆積分方程組：

$$\begin{cases} f(x)-\int_{t=0}^{t=1}(g(t)-h(t))+\frac{1}{12}-x=0 \\ g(x)-\int_{t=0}^{t=1}(h(t)-f(t))+\frac{1}{4}-2x^2=0 \\ h(x)-\int_{t=0}^{t=1}(f(t)-g(t))-\frac{1}{6}-3x^3=0 \end{cases} \tag{46}$$

首先定義以下常數：

$$c_1=\int_{t=0}^{t=1}f(t),\ \ c_2=\int_{t=0}^{t=1}g(t),\ \ c_3=\int_{t=0}^{t=1}h(t) \tag{47}$$

由此可把 (46) 中的方程改寫成

$$f(x)=c_2-c_3-\frac{1}{12}+x,\ \ g(x)=c_3-c_1-\frac{1}{4}+2x^2,\ \ h(x)=c_1-c_2+\frac{1}{6}+3x^3 \tag{48}$$

把以上三式代入 (47) 中的三式，並進行計算，可得

$$c_1 = \int_{t=0}^{t=1} \left(c_2 - c_3 - \frac{1}{12} + t \right) = c_2 - c_3 + \frac{5}{12}$$

$$c_2 = \int_{t=0}^{t=1} \left(c_3 - c_1 - \frac{1}{4} + 2t^2 \right) = c_3 - c_1 + \frac{5}{12}$$

$$c_3 = \int_{t=0}^{t=1} \left(c_1 - c_2 + \frac{1}{6} + 3t^3 \right) = c_1 - c_2 + \frac{11}{12}$$

由此有以下線性代數方程組：

$$\begin{cases} c_1 - c_2 + c_3 = \frac{5}{12} \\ c_1 + c_2 - c_3 = \frac{5}{12} \\ -c_1 + c_2 + c_3 = \frac{11}{12} \end{cases} \tag{49}$$

解上述方程組，可得

$$c_1 = \frac{5}{12},\ \ c_2 = \frac{2}{3},\ \ c_3 = \frac{2}{3} \tag{50}$$

把以上結果代入 (48)，便最終求得 (46) 的解如下：

$$f(x) = x - \frac{1}{12},\ \ g(x) = 2x^2,\ \ h(x) = 3x^3 - \frac{1}{12} \tag{51}$$

接著考慮以下包含兩個未知函數的弗雷德霍姆和分方程組：

$$\begin{cases} f(x) - \sum_{t=0}^{t=9} g(t) + 1011 - 3x = 0 \\ g(x) + \sum_{t=0}^{t=9} tf(t) - 944 - 2^x = 0 \end{cases} \tag{52}$$

首先定義以下常數：

$$c_1 = \sum_{t=0}^{t=9} tf(t),\ \ c_2 = \sum_{t=0}^{t=9} g(t) \tag{53}$$

由此可把 (52) 中的方程改寫成

$$f(x) = c_2 - 1011 + 3x,\ \ g(x) = -c_1 + 944 + 2^x \tag{54}$$

把以上兩式代入 (53) 中的兩式，並進行計算，可得

$$c_1 = \sum_{t=0}^{t=9} (c_2 t - 1011t + 3t^2) = 45c_2 - 44640$$

$$c_2 = \sum_{t=0}^{t=9}(-c_1 + 944 + 2^t) = -10c_1 + 10463$$

由此有以下線性代數方程組：

$$\begin{cases} c_1 - 45c_2 = -44640 \\ 10c_1 + c_2 = 10463 \end{cases} \qquad (55)$$

解上述方程組，可得

$$c_1 = 945,\ \ c_2 = 1013 \qquad (56)$$

把以上結果代入 (54)，便最終求得 (52) 的解如下：

$$f(x) = 3x + 2,\ \ g(x) = 2^x - 1 \qquad (57)$$

連結至數學專題
連結至周家發網頁