

數學示例：特徵函數

我們在《數學示例：方程與方程組》中介紹了「微分／差分方程邊值問題」的概念，指出這些方程不一定有解；即使有解，其解也可能並非唯一解。本文主旨是運用線性代數中「特徵值」的概念研究某些特定的「微分／差分方程邊值問題」和「弗雷德霍姆積分／和分方程」。

首先介紹具有以下一般形式的 2 階微分方程邊值問題：

$$\begin{aligned} D(k_2(x)Df(x)) + (k_0(x) + \lambda w(x))f(x) &= 0, \\ a_1f(a) + a_2Df(a) &= 0, \quad b_1f(b) + b_2Df(b) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

上式中的上下兩行分別為有關方程和邊界條件，其中 $k_2(x)$ 、 $k_0(x)$ 和 $w(x)$ 是給定的函數， λ 是一個參數（即變數）， a_1 、 a_2 、 b_1 和 b_2 則是給定的常數，並且 $k_2(x)$ 和 $w(x)$ 在 $[a, b]$ 上須取正值，而 a_1 和 a_2 以及 b_1 和 b_2 則不可都等於 0。具有上述形式的邊值問題稱為**正則斯圖姆-劉維爾問題**(regular Sturm-Liouville problem)。舉例說，如在 (1) 中取 $k_2(x) = x$ ， $k_0(x) = 0$ ， $w(x) = \frac{1}{x}$ ， $a_1 = b_1 = 1$ ， $a_2 = b_2 = 0$ ， $a = 1$ ， $b = e$ ，便可得到以下這個邊值問題：

$$D(xDf(x)) + \left(\frac{\lambda}{x}\right)f(x) = 0, \quad f(1) = 0, \quad f(e) = 0 \quad (2)$$

請注意 (1) 是一個「齊次邊值問題」，即其方程和邊界條件都不包含不含 $f(x)$ 的項。容易看到，不論 λ 取甚麼值，零函數都是 (1) 的解，這種解稱為「平凡解」(trivial solution)。數學家關心的是找出 λ 在取何值的情況下 (1) 有非平凡解，他們把這樣的 λ 值稱為 (1) 的「特徵值」(eigenvalue)，並把相關的非平凡解稱為**特徵函數**(eigenfunction) (下文會解釋此一名稱的理據)。

以 (2) 為例，這個方程可以改寫成以下形式：

$$x^2 D^2 f(x) + x Df(x) + \lambda f(x) = 0, \quad f(1) = 0, \quad f(e) = 0 \quad (3)$$

如把 λ 當作確定的實數，那麼 (3) 是「2 階柯西-歐拉微分方程」。根據《數學示例：積分／和分因子》的 (19)，(3) 的輔助方程及其根為

$$\begin{aligned} t^2 + \lambda &= 0 \\ t &= \pm\sqrt{-\lambda} \end{aligned} \quad (4)$$

接下來考慮三種情況：(i) $-\lambda = 0$ 、(ii) $-\lambda > 0$ 和 (iii) $-\lambda < 0$ 這三種情況 (其中 $\alpha > 0$)，並看看 (3) 在哪種情況下有非平凡解。在情況 (i) (亦即 $\lambda = 0$) 下，(4) 提供一個二重實數根 $t = 0$ ，根據《數學示例：降階法》，(3) 中的方程的通解是 $f(x) = c_1 + c_2 \ln x$ 。把此一結果代入 (3) 中的邊界條件，可得到以下方程組：

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

解上述方程組，可得 $c_1 = c_2 = 0$ ，即 (3) 的特解是 $f(x) = 0$ 。由此可知，當 $\lambda = 0$ 時，(3) 只有平凡解，因此 0 不是 (3) 的特徵值。

在情況 (ii) (亦即 $\lambda < 0$) 下，不妨設 $\lambda = -\alpha^2$ (其中 $\alpha > 0$)。由此從 (4) 可得到兩個相異實數根 $t = \pm\alpha$ ，因此 (3) 中的方程的通解是 $f(x) = c_1 x^\alpha + c_2 x^{-\alpha}$ 。把此一結果代入 (3) 中的邊界條件，可得到以下方程組：

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^\alpha + c_2 e^{-\alpha} = 0 \end{cases}$$

把上面第一個方程代入第二個方程，可得 $c_1(e^\alpha - e^{-\alpha}) = 0$ 。在 $\alpha > 0$ 的假設下， $e^\alpha \neq e^{-\alpha}$ ，因此上述方程組的解只能是 $c_1 = c_2 = 0$ ，即 (3) 的特解是 $f(x) = 0$ 。由此可知，當 $\lambda = -\alpha^2$ 時，(3) 只有平凡解，因此任何負實數都不可能是 (3) 的特徵值。

在情況 (iii) (亦即 $\lambda > 0$) 下，不妨設 $\lambda = \alpha^2$ (其中 $\alpha > 0$)。由此從 (4) 可得到一對互相共軛的複數根 $t = \pm\alpha i$ ，因此 (3) 中的方程的通解是 $f(x) = c_1 \cos(\alpha \ln x) + c_2 \sin(\alpha \ln x)$ 。把此一結果代入 (3) 中的邊界條件，可得到以下方程組：

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 \cos \alpha + c_2 \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

把上面第一個方程代入第二個方程，可得 $c_2 \sin \alpha = 0$ 。為得到非平凡解，必須假設 $c_2 \neq 0$ ，由此必有

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= 0 \\ \alpha &= n\pi \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

因此 (3) 的特解是 $f(x) = c_2 \sin(n\pi \ln x)$ 。由此可知，對每個 $n = 1, 2, \dots$ ， $\lambda = n^2\pi^2$ 是 (3) 的特徵值，而對應於這個特徵值的特徵函數是 (以下把這個函數的任意常數改寫成 c)：

$$f(x) = c \sin(n\pi \ln x) \quad (5)$$

接著介紹具有以下一般形式的 2 階差分方程邊值問題：

$$\begin{aligned} \Delta(k_2(x)\Delta f(x)) + (k_0(x) + \lambda w(x))Ef(x) &= 0, \\ a_1 f(a) + a_2 Ef(a) = 0, \quad b_1 f(b) + b_2 Ef(b) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

上述問題可被看成「正則斯圖姆-劉維爾問題」的差分方程版本。舉例說，如在 (1) 中取 $k_2(x) = w(x) = 1$, $k_0(x) = 0$, $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 = b_2 = 0$, $a = 0$, $b = 4$, 便可得到以下這個邊值問題：

$$\Delta^2 f(x) + \lambda E f(x) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f(4) = 0 \quad (6)$$

前面介紹的「特徵值」和「特徵函數」概念也適用於 (5) 這種邊值問題。以 (6) 為例，這個方程可以改寫成以下形式：

$$E^2 f(x) + (\lambda - 2) E f(x) + f(x) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f(4) = 0 \quad (7)$$

如把 λ 當作確定的實數，那麼 (7) 是「2 階常係數線性差分方程」，可以運用《數學示例：基本解集》中介紹的方法求上述三個情況下的通解。根據上述網頁的 (6)，上式的輔助方程及其根為

$$\begin{aligned} t^2 + (\lambda - 2)t + 1 &= 0 \\ t &= \frac{2 - \lambda \pm \sqrt{\lambda(\lambda - 4)}}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

接下來考慮三種情況：(i) $\lambda(\lambda - 4) = 0$ 、(ii) $\lambda(\lambda - 4) > 0$ 和 (iii) $\lambda(\lambda - 4) < 0$ 。這三種情況，並看看 (7) 在哪種情況下有非平凡解。在情況 (i) (亦即 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 4$) 下，不妨設 $2 - \lambda = 2\alpha$ (亦即設 $\alpha = \pm 1$)。由此從 (8) 可得到一個二重實數根 $t = \alpha$ ，因此 (7) 中的方程的通解是 $f(x) = c_1 \alpha^x + c_2 x \alpha^x$ 。把此一結果代入 (7) 中的邊界條件，可得到以下方程組：

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 \alpha^4 + 4c_2 \alpha^4 = 0 \end{cases}$$

解上述方程組，可得 $c_1 = c_2 = 0$ ，即 (7) 的特解是 $f(x) = 0$ 。由此可知，當 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 4$ 時，(7) 只有平凡解，因此 0 和 4 都不是 (7) 的特徵值。

在情況 (ii) (亦即 $\lambda < 0$ 或 $\lambda > 4$) 下，不妨設 $2 - \lambda = 2\alpha$ (由此有 $\alpha > 1$ 或 $\alpha < -1$)。由此從 (8) 可得到兩個相異實數根 $t = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}$ ，因此 (7) 中的方程的通解是 $f(x) = c_1(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})^x + c_2(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1})^x$ 。把此一結果代入 (7) 中的邊界條件，可得到以下方程組：

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})^4 + c_2(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1})^4 = 0 \end{cases}$$

把上面第一個方程代入第二個方程，可得 $c_1((\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})^4 - (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1})^4) = 0$ 。

現在如果定義以下算子：

$$Tf(x) = D(k_2(x)Df(x)) + k_0(x)f(x) \quad (3)$$

那麼可以把 (1) 改寫成以下形式：

$$Tf(x) + \lambda w(x)f(x) = 0 \quad (4)$$

[連結至數學專題](#)
[連結至周家發網頁](#)