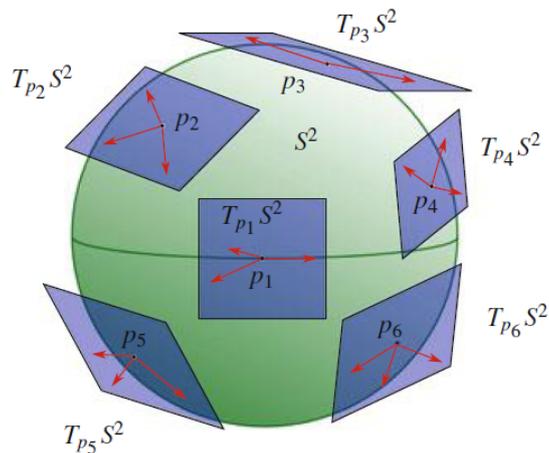


數學示例：流形上的微分

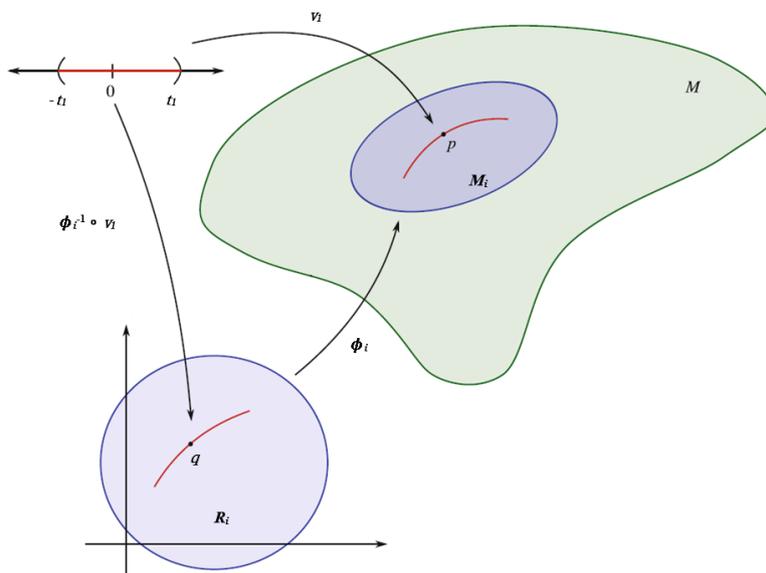
我們在《數學示例：流形及其定向》中介紹了一般流形的正式定義。現在的問題是，以往介紹的與 \mathbb{R}^n 空間相關的概念，例如微分概念，在應用於一般流形時，是否需要作出調整？流形分析中的微分主要是指微分形式的外導數運算，本文主旨是介紹一般流形上與這種運算相關的各個概念，包括切向量、向量場、 k 餘切向量、微分 k 形式等，最後介紹一般流形上的外導數運算。

我們從一般流形的切向量談起，首先回顧切向量的傳統定義。設有流形 M ，其上一點 p ，以及 M 上通過 p 點的一條曲線。設這條曲線的參數化形式為 $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ ，其中 ϵ 為正實數，並且有 $\gamma(0) = p$ 。在傳統定義下， $\gamma'(0)$ 就是 M 於 p 點處的一個切向量。可是，上述傳統定義存在一些問題。第一，一般的流形不是某個 \mathbb{R}^n 空間的子集，對於這些流形，我們不知道如何進行上述求導運算。第二， $\gamma'(0)$ 不一定是整個位於 M 上的向量，請看下圖所示球面（記作 S^2 ）及其上六個切空間中的切向量：



從上圖可以看到， S^2 的切向量除了其起點外根本並不位於 S^2 上，而是位於 S^2 被嵌入到的 \mathbb{R}^3 空間中，但一般的流形卻並非被嵌入到任何 \mathbb{R}^n 空間中的圖形。

以下提供能與一般流形的定義協調的新的切向量定義，讀者可用下圖幫助理解以下定義：



設 M 為 m 維流形， M_i 為包含 p 點的 M 的開子集， $\phi_i : R_i \rightarrow M_i$ 為 M_i 的坐標卡，並設 $q = \phi_i^{-1}(p)$ 。現設有 M_i 上通過 p 點的兩條曲線 $v_1 : (-t_1, t_1) \rightarrow M_i$ 和 $v_2 : (-t_2, t_2) \rightarrow M_i$ ，其中 $v_1(0) = v_2(0) = p$ (上圖只繪出 v_1)。從上圖可見，複合函數 $\phi_i^{-1} \circ v_1$ 和 $\phi_i^{-1} \circ v_2$ 代表 R_i 上的兩條對應曲線 (上圖只繪出其中一條)。接著定義以下關係 \sim_1 ，

$$v_1 \sim_1 v_2 \text{ 當且僅當 } (\phi_i^{-1} \circ v_1)'(0) = (\phi_i^{-1} \circ v_2)'(0) \quad (1)$$

可以證明 \sim_1 是等價關係，我們把 M_i 上通過 p 點的切向量定義為 M_i 上通過 p 點的曲線在上述等價關係下的等價類 $[v_1]$ 。請注意上述定義克服了前述困難。第一，由於上述複合函數是把 \mathbb{R} 某個子集映射到 \mathbb{R}^m 某個子集的函數，我們可以對它們求導 (而不是對 v_1 和 v_2 求導)。第二，在上述定義下，切向量是 M_i 上曲線的等價類，這些曲線總是位於 M_i 上，而非被嵌入到某個 \mathbb{R}^n 空間中。另請注意，上述定義雖然用到 M 的一個坐標卡 ϕ_i ，但可以證明，上述定義其實並不依賴於任何特定坐標卡。

根據切向量的傳統定義， $(\phi_i^{-1} \circ v_1)'(0)$ 等於 R_i 上曲線 $\phi_i^{-1} \circ v_1$ 於 $\phi_i^{-1} \circ v_1(0) = q$ 點處的切向量²，因此 (1) 實質是說， M_i 上的曲線 v_1 和 v_2 等價

¹嚴格地說，應區分「曲線的參數化形式」和「曲線的圖象」這兩個不同概念，這裡的 v_1 和 v_2 是「曲線的參數化形式」；但為簡化名稱和符號，本文把「曲線的參數化形式」和「曲線的圖象」都稱為「曲線」，並用相同的符號來代表這兩個概念。

²請注意由於 R_i 是 \mathbb{R}^m 的子集，所以這裡可以採用切向量的傳統定義。

當且僅當它們在 R_i 上的對應曲線有相同的 (傳統定義下的) 切向量。這樣 M_i 上 p 點處的切向量 (即通過該點的曲線的等價類) 便與 R_i 上 q 點處的 (傳統) 切向量存在一一對應關係。

一方面, 給定 M_i 上 p 點處的切向量 $[v]$, 只要計算 $(\phi_i^{-1} \circ v)'(0)$ 就可得到 R_i 上 q 點處的對應 (傳統) 切向量, 以下把這個對應切向量記作 $(\phi_i^{-1})_*[v]$, 即

$$(\phi_i^{-1})_*[v] = (\phi_i^{-1} \circ v)'(0) \quad (2)$$

上式中的 $(\phi_i^{-1})_*$ 是我們在《數學示例：前推與拉回》中介紹過的「前推」運算, $(\phi_i^{-1})_*$ 的作用是把 M_i 上的切向量映射為 R_i 上的切向量。

另一方面, 給定 R_i 上 q 點處的 (傳統) 切向量 w , 也可以求 M_i 上 p 點處的對應切向量, 記作 $(\phi_i)_*w$, 這裡 $(\phi_i)_*$ 的作用與 $(\phi_i^{-1})_*$ 剛好相反, 是把 R_i 上的切向量映射為 M_i 上的切向量。以下是求 $(\phi_i)_*w$ 的方法, 首先找出一條通過 q 點的曲線 ω , 使得 ω 於 q 點處的 (傳統) 切向量等於 w , 以下把這條曲線稱為 w 的**積分曲線** (integral curve)。容易看到, $\phi_i \circ \omega$ 是 M 上 p 點處的一條曲線, 以這條曲線為代表的等價類 $[\phi_i \circ \omega]$ 就是 $(\phi_i)_*w$ 。總結以上所述, 我們有

$$(\phi_i)_*w = [\phi_i \circ \omega] \quad (3)$$

請注意上面有關前推的計算方法跟上述網頁介紹的方法 (即利用「雅可比矩陣」) 有所不同, 這是因為這裡的切向量定義 (即曲線的等價類) 跟傳統的切向量定義不同。但可以證明, 若 M_i 是 \mathbb{R}^m 空間的子集, 則這裡介紹的計算前推的方法與上述網頁介紹的方法一致, 即都可得到相同的結果。

如同 \mathbb{R}^m 空間的情況, M_i 上 p 點處的切向量也構成一個切空間 $T_p M_i$, 這個切空間與 R_i 上 q 點處的切空間 $T_q R_i$ 存在對應關係, 因此 $T_p M_i$ 上的概念和操作可透過 $T_q R_i$ 上的對應概念和操作來確定, 例如 $T_p M_i$ 中的向量應可進行加法和純量乘法, 但如何對曲線的等價類進行這些運算? 方法是先用 $(\phi_i^{-1})_*$ 把這些曲線等價類映射為 $T_q R_i$ 中的對應 (傳統) 向量, 對這些 (傳統) 向量進行加法或純量乘法, 然後再用 $(\phi_i)_*$ 把結果映射為 $T_p M_i$ 中的向量。用數式表示, 若 $[v_1], [v_2] \in T_p M_i$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, 則

$$c_1[v_1] + c_2[v_2] = (\phi_i)_*(c_1(\phi_i^{-1})_*[v_1] + c_2(\phi_i^{-1})_*[v_2]) \quad (4)$$

舉例說, 考慮「3 維實射影空間」(3-dimensional real projective space), 以下記作 $\mathbb{R}P^3$, 這個空間是我們在《數學示例：流形及其定向》中討論過的 $\mathbb{R}P^1$ 的推廣, 它的成員包括所有通過原點的 4 維空間上的直線。沿用該網頁的概念, 首先定義以下關係 \sim_2 , 設 $(p_1, p_2, p_3, p_4), (q_1, q_2, q_3, q_4) \in \mathbb{R}^4 - \{(0, 0, 0, 0)\}$, 則

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) \sim_2 (q_1, q_2, q_3, q_4) \text{ 當且僅當} \\ \text{存在 } k \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ 使得 } (q_1, q_2, q_3, q_4) = (kp_1, kp_2, kp_3, kp_4) \quad (5)$$

可以證明 \sim_2 是等價關係，而 \mathbb{RP}^3 的成員就是上述等價關係的等價類，以下把包含 (p_1, p_2, p_3, p_4) 的等價類記作 $(p_1 : p_2 : p_3 : p_4)$ 。接著定義 $M_I = \{(x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \in \mathbb{RP}^3 : x_1 \neq 0\}$ 和 $R_I = \mathbb{R}^3$ ，以下是 M_I 的坐標卡及其逆函數：

$$\phi_I : R_I \rightarrow M_I; \phi_I(y_1, y_2, y_3) = (1 : y_1 : y_2 : y_3) \quad (6)$$

$$\phi_I^{-1} : M_I \rightarrow R_I; \phi_I^{-1}(x_1 : x_2 : x_3 : x_4) = \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \frac{x_4}{x_1} \right) \quad (7)$$

根據 (6)，可知 $\phi_I(2, 3, 4) = (1 : 2 : 3 : 4)$ 是 M_I 上的一點。現設有 M_I 上的兩條曲線³：

$$v_I = t \mapsto (1 : 5t + 2 : 6t + 3 : 4) \quad (8)$$

$$v_{II} = t \mapsto (1 : t^2 + 5t + 2 : t^2 + 6t + 3 : t^2 + 4) \quad (9)$$

由於 $v_I(0) = v_{II}(0) = (1 : 2 : 3 : 4)$ ，可見 v_I 和 v_{II} 都是通過 M_I 上 $(1 : 2 : 3 : 4)$ 點的曲線。接著計算

$$\phi_I^{-1} \circ v_I(t) = (5t + 2, 6t + 3, 4)$$

$$\phi_I^{-1} \circ v_{II}(t) = (t^2 + 5t + 2, t^2 + 6t + 3, t^2 + 4)$$

由此容易算出

$$(\phi_I^{-1} \circ v_I)'(0) = (\phi_I^{-1} \circ v_{II})'(0) = (5, 6, 0)$$

根據 (1)，我們有 $v_I \sim_1 v_{II}$ ，因此 v_I 和 v_{II} 構成一個等價類 $[t \mapsto (1 : 5t + 2 : 6t + 3 : 4)]$ 。由此可知 $[t \mapsto (1 : 5t + 2 : 6t + 3 : 4)]$ 是 M_I 上 $(1 : 2 : 3 : 4)$ 點處的一個切向量，而且根據 (2)，我們有⁴

$$(\phi_I^{-1})_*[t \mapsto (1 : 5t + 2 : 6t + 3 : 4)] = [5, 6, 0]^T$$

以上計算顯示， M_I 上 $(1 : 2 : 3 : 4)$ 點處的切向量 $[t \mapsto (1 : 5t + 2 : 6t + 3 : 4)]$ 與 R_I 上 $(2, 3, 4)$ 點處的切向量 $[5, 6, 0]^T$ 相對應。

反過來，若給定 R_I 上 $(2, 3, 4)$ 點處的切向量 $[0, 7, 8]^T$ ，以下讓我們求 M_I 上 $(1 : 2 : 3 : 4)$ 點處的對應切向量 $(\phi_I)_*[0, 7, 8]^T$ 。容易看到，以下曲

³為簡化數式，以下把曲線的參數化形式一律寫成 $v = t \mapsto v(t)$ 的形式，略去參數化形式的定義域和對應域（這裡假設所有曲線的定義域都具有區間 $(-t_1, t_1)$ 的形式，其中 t_1 是某個數值小的實數）。

⁴上面的計算結果顯示 $(\phi_I^{-1} \circ v_I)'(0) = (5, 6, 0)$ ，其中 $(5, 6, 0)$ 是 \mathbb{R}^3 （即 R_I ）上的點而非向量，但由於 \mathbb{R}^3 與其每一點上的切空間同構，所以可以把點 $(5, 6, 0)$ 看成以 $(0, 0, 0)$ 為起點並以 $(5, 6, 0)$ 為終點的向量 $[5, 6, 0]^T$ 。

線是 $[0, 7, 8]^T$ 的一條積分曲線 (請讀者自行驗證, $\omega_{III}(0) = (2, 3, 4)$, 並且 $\omega_{III}'(0) = (0, 7, 8)$, 所以這確是 $(2, 3, 4)$ 點處切向量 $[0, 7, 8]^T$ 的積分曲線) :

$$\omega_{III} = t \mapsto (2, 7t + 3, 8t + 4) \quad (10)$$

接著把 ϕ_I 與 ω_{III} 複合, 可得以下曲線 :

$$\phi_I \circ \omega_{III} = t \mapsto (1 : 2 : 7t + 3 : 8t + 4) \quad (11)$$

由此根據 (3), 我們有

$$\begin{aligned} (\phi_I)_*[0, 7, 8]^T &= [\phi_I \circ \omega_{III}] \\ &= [t \mapsto (1 : 2 : 7t + 3 : 8t + 4)] \end{aligned}$$

至此我們討論了 $T_{(1:2:3:4)}M_I$ 中的兩個切向量 $[t \mapsto (1 : 5t + 2 : 6t + 3 : 4)]$ 和 $[t \mapsto (1 : 2 : 7t + 3 : 8t + 4)]$, 以下讓我們用 (4) 計算 $9[t \mapsto (1 : 5t + 2 : 6t + 3 : 4)] - [t \mapsto (1 : 2 : 7t + 3 : 8t + 4)]$:

$$\begin{aligned} &9[t \mapsto (1 : 5t + 2 : 6t + 3 : 4)] - [t \mapsto (1 : 2 : 7t + 3 : 8t + 4)] \\ &= (\phi_I)_*(9 \times (\phi_I^{-1})_*[t \mapsto (1 : 5t + 2 : 6t + 3 : 4)] \\ &\quad - (\phi_I^{-1})_*[t \mapsto (1 : 2 : 7t + 3 : 8t + 4)]) \\ &= (\phi_I)_*(9 \times [5, 6, 0]^T - [0, 7, 8]^T) \\ &= (\phi_I)_*[45, 47, -8]^T \\ &= [t \mapsto (1 : 45t + 2 : 47t + 3 : -8t + 4)] \end{aligned}$$

M_i 的每一點 p 處除了切向量外, 還有 k 餘切向量⁵, 這是指以 $T_p M_i$ 中的 k 個切向量作為論元的實值函數, 這些 k 餘切向量構成一個 k 餘切空間 $\wedge^k T_p^* M_i$ 。此外, $\wedge^k T_p^* M_i$ 中的 k 餘切向量也與 R_i 上 q 點處 k 餘切空間 $\wedge^k T_q^* R_i$ 中的 k 餘切向量存在一一對應關係。此一對應關係可用 $(\phi_i^{-1})^*$ 和 $(\phi_i)^*$, 即我們在《數學示例：前推與拉回》中介紹過的「拉回」運算, 來實現, 其中 $(\phi_i^{-1})^*$ 的作用是把 $\wedge^k T_q^* R_i$ 中的 k 餘切向量 β 映射為 $\wedge^k T_p^* M_i$ 中的對應 k 餘切向量, 並且對任意 $v_1, \dots, v_k \in T_p M_i$, 均有 (下式與上述網頁的 (6) 相似) :

$$(\phi_i^{-1})^* \beta(v_1, \dots, v_k) = \beta((\phi_i^{-1})_* v_1, \dots, (\phi_i^{-1})_* v_k) \quad (12)$$

⁵看到這裡, 有些讀者可能想到是否也可討論一般流形上的 k 切向量。如前所述, 一般流形上的切向量可被看成曲線的等價類, 因此如要討論 k 切向量, 便要討論曲線等價類之間的楔積運算, 這將牽涉較高深的概念。不過, 如把 k 切向量看成與 k 餘切向量對稱的數學對象 (即以 k 個餘切向量作為論元的實值函數), 那麼也可透過這種對稱關係來理解一般流形上的 k 切向量, 但本文不擬對此作深入討論。

$(\phi_i)^*$ 的作用則是把 $\bigwedge^k T_p^* M_i$ 中的 k 餘切向量 α 映射為 $\bigwedge^k T_q^* R_i$ 中的對應 k 餘切向量，並且對任意 $w_1, \dots, w_k \in T_q R_i$ ，均有：

$$(\phi_i)^* \alpha(w_1, \dots, w_k) = \alpha((\phi_i)_* w_1, \dots, (\phi_i)_* w_k) \quad (13)$$

如同 $T_p M_i$ 的情況， M_i 上 p 點處的多重餘切向量也可進行加法和純量乘法運算，而且還可進行楔積運算，方法是先用 $(\phi_i)^*$ 把這些多重餘切向量映射為 R_i 上 q 點處的對應多重餘切向量，對這些多重餘切向量進行加法、純量乘法或楔積運算，然後再用 $(\phi_i^{-1})^*$ 把結果映射為 M_i 上 p 點處的多重餘切向量。用數式表示，若 $\alpha_1, \alpha_2 \in \bigwedge^k T_p^* M_i$ ， $\alpha_3 \in \bigwedge^l T_p^* M_i$ ， $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ，則

$$c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 = (\phi_i^{-1})^*(c_1 (\phi_i)^* \alpha_1 + c_2 (\phi_i)^* \alpha_2) \quad (14)$$

$$\alpha_1 \wedge \alpha_3 = (\phi_i^{-1})^*((\phi_i)^* \alpha_1 \wedge (\phi_i)^* \alpha_3) \quad (15)$$

以前面討論過的 M_I 為例，考慮 $\bigwedge^2 T_{(2,3,4)}^* R_I$ 中的 2 餘切向量 $-7dy_1 \wedge dy_2$ 。根據前面的討論， $-7dy_1 \wedge dy_2$ 對應著 $\bigwedge^2 T_{(1:2:3:4)}^* M_I$ 中的以下 2 餘切向量：

$$\alpha_{IV} = (\phi_I^{-1})^*(-7dy_1 \wedge dy_2) \quad (16)$$

α_{IV} 究竟是甚麼？根據 2 餘切向量的定義， α_{IV} 是這樣的函數，給定 $T_{(1:2:3:4)}^* M_I$ 中的任意兩個切向量 $[v_1]$ 和 $[v_2]$ (即曲線等價類)， $\alpha_{IV}([v_1], [v_2])$ 是一個實數，這個實數可以用 (12) 來求。以下讓我們求 $\alpha_{IV}([t \mapsto (1 : 5t + 2 : 6t + 3 : 4)], [t \mapsto (1 : 2 : 7t + 3 : 8t + 4)])$ ：

$$\begin{aligned} & \alpha_{IV}([t \mapsto (1 : 5t + 2 : 6t + 3 : 4)], [t \mapsto (1 : 2 : 7t + 3 : 8t + 4)]) \\ &= (\phi_I^{-1})^*(-7dy_1 \wedge dy_2)([t \mapsto (1 : 5t + 2 : 6t + 3 : 4)], [t \mapsto (1 : 2 : 7t + 3 : 8t + 4)]) \\ &= (-7dy_1 \wedge dy_2)((\phi_I^{-1})_*[t \mapsto (1 : 5t + 2 : 6t + 3 : 4)], \\ & \quad (\phi_I^{-1})_*[t \mapsto (1 : 2 : 7t + 3 : 8t + 4)]) \\ &= (-7dy_1 \wedge dy_2)([5, 6, 0]^T, [0, 7, 8]^T) \\ &= -7 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} \\ &= -245 \end{aligned}$$

上述計算顯示，給定任意兩個適當的切向量 $[v_1]$ 和 $[v_2]$ ，我們總能用 (12) 求得 $\alpha_{IV}([v_1], [v_2])$ ，因此 α_{IV} 是一個確定的 2 餘切向量。

接著考慮 $T_{(1:2:3:4)}^* M_I$ 的以下餘切向量⁶：

$$\alpha_V = (\phi_I^{-1})^*(dy_1 - 2dy_2 + 3dy_3) \quad (17)$$

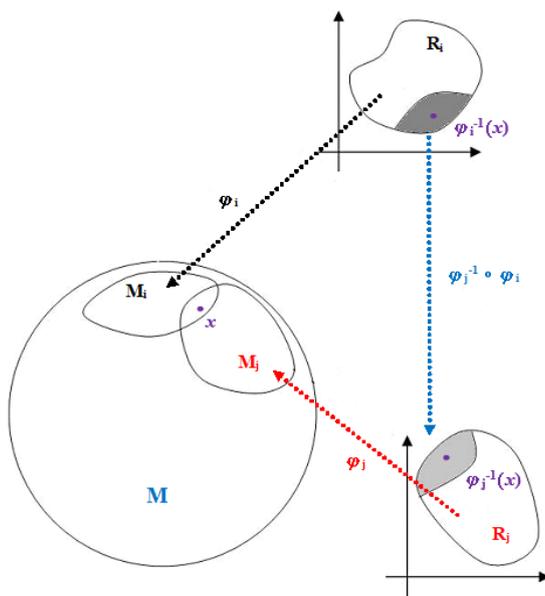
⁶我們沒有把 α_{IV} 和 α_V 寫成基底 k 餘向量的線性組合 (即像 $dy_1 - 2dy_2 + 3dy_3$ 那樣的線性組合)，這是因為如要這樣做，便先要為各個 k 餘切空間定義基底 k 餘向量，而且如果 M 包含不只一個坐標卡，則對每個坐標卡的對應域 M_i 都要這樣做，這是很繁瑣的工作。

以下讓我們用 (15) 計算 $\alpha_{IV} \wedge \alpha_V$:

$$\begin{aligned} & \alpha_{IV} \wedge \alpha_V \\ &= (\phi_I^{-1})^*((\phi_I)^*\alpha_{IV} \wedge (\phi_I)^*\alpha_V) \\ &= (\phi_I^{-1})^*((-7dy_1 \wedge dy_2) \wedge (dy_1 - 2dy_2 + 3dy_3)) \\ &= (\phi_I^{-1})^*(-21dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3) \end{aligned}$$

上述計算結果顯示, $\alpha_{IV} \wedge \alpha_V$ 等於 $\wedge^3 T_{(1:2:3:4)}^* M_I$ 中對應著 $-21dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3$ 的 3 餘切向量。

我們知道, 向量場和微分 k 形式是把流形 M 上的點分別映射為該點處的切向量和 k 餘切向量的函數。原則上可以把向量場和微分 k 形式概念推廣到一般流形, 但由於 M 可以有許多個坐標卡, 這為 M 上的向量場和微分 k 形式帶來了一些複雜性, 讀者可用下圖幫助理解以下討論:



設 $\phi_i : R_i \rightarrow M_i$ 和 $\phi_j : R_j \rightarrow M_j$ 為 M 的兩個坐標卡, 並設有 $M_i \cap M_j$ 上的可變點 x , 那麼 x 分別對應著 R_i 上的 $\phi_i^{-1}(x)$ 和 R_j 上的 $\phi_j^{-1}(x)$ 。如上圖所示, 我們可以用「轉換函數」 $\phi_j^{-1} \circ \phi_i$ 把 $\phi_i^{-1}(x)$ 映射為 $\phi_j^{-1}(x)$ 。

現設有 M 上的向量場 v 和微分 k 形式 α , 那麼 $v(x)$ 和 $\alpha(x)$ 分別是 x 點處的切向量和 k 餘切向量。由於 R_i 和 R_j 對應著 M 的不同子集 M_i 和 M_j , $v(x)$ 在 R_i 和 R_j 中的對應切向量可以有很不同的形式, $\alpha(x)$ 也是如此。但根據上圖, 我們應可透過 $\phi_j^{-1} \circ \phi_i$ 的前推把 $v(x)$ 在 R_i 中的對應切向量映射為 $v(x)$ 在 R_j 中的對應切向量, 以及透過 $\phi_j^{-1} \circ \phi_i$ 的拉回把

$\alpha(x)$ 在 R_j 中的對應 k 餘切向量映射為 $\alpha(x)$ 在 R_i 中的對應 k 餘切向量。由於 x 是一般的可變點，上述前推/拉回運算實質上是把 M 的某一對應向量場/微分 k 形式映射為另一對應向量場/微分 k 形式⁷。

仍以 \mathbb{RP}^3 為例，現定義 $M_{II} = \{(x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \in \mathbb{RP}^3 : x_2 \neq 0\}$ 和 $R_{II} = \mathbb{R}^3$ ，以下是 M_{II} 的坐標卡及其逆函數：

$$\phi_{II} : R_{II} \rightarrow M_{II}; \quad \phi_{II}(z_1, z_2, z_3) = (z_1 : -1 : z_2 : z_3) \quad (18)$$

$$\phi_{II}^{-1} : M_{II} \rightarrow R_{II}; \quad \phi_{II}^{-1}(x_1 : x_2 : x_3 : x_4) = \left(-\frac{x_1}{x_2}, -\frac{x_3}{x_2}, -\frac{x_4}{x_2} \right) \quad (19)$$

從 (6)、(7)、(18) 和 (19) 可得到以下轉換函數：

$$\phi_{II}^{-1} \circ \phi_I(y_1, y_2, y_3) = (z_1, z_2, z_3), \quad \text{其中 } z_1 = -\frac{1}{y_1}, z_2 = -\frac{y_2}{y_1}, z_3 = -\frac{y_3}{y_1} \quad (20)$$

$$\phi_I^{-1} \circ \phi_{II}(z_1, z_2, z_3) = (y_1, y_2, y_3), \quad \text{其中 } y_1 = -\frac{1}{z_1}, y_2 = \frac{z_2}{z_1}, y_3 = \frac{z_3}{z_1} \quad (21)$$

例如我們有 $(1 : 2 : 3 : 4) \in M_I \cap M_{II}$ ，這一點對應著 R_I 上的點 $(2, 3, 4)$ (因為 $\phi_I^{-1}(1 : 2 : 3 : 4) = (2, 3, 4)$) 和 R_{II} 上的點 $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -2)$ (因為 $\phi_{II}^{-1}(1 : 2 : 3 : 4) = (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -2)$)。讀者可自行驗證，利用 (20) 和 (21)，可以把 R_I 和 R_{II} 上的這兩點互相轉換。

現設有 \mathbb{RP}^3 上的以下向量場和微分 1 形式：

$$v_{VI} = (\phi_I)_*[2y_2, 0, -y_1]^T \quad (22)$$

$$\alpha_{VI} = (\phi_I^{-1})*(2y_2dy_1 - y_1dy_3) \quad (23)$$

雖然上式只告訴我們 v_{VI} 和 α_{VI} 在 R_I 中的對應向量場 (即 $[2y_2, 0, -y_1]^T$) 和對應微分 1 形式 (即 $2y_2dy_1 - y_1dy_3$)，但如前所述，我們可以透過轉換函數的前推和拉回來求 v_{VI} 和 α_{VI} 在 R_{II} 中的對應向量場和對應微分 1 形式。由於 $R_I = R_{II} = \mathbb{R}^3$ ，我們可以用《數學示例：前推與拉回》中介紹的「雅可比矩陣」和「代入法」來分別進行上述前推和拉回運算。

首先計算 $\phi_{II}^{-1} \circ \phi_I$ 的雅可比矩陣如下：

$$D(\phi_{II}^{-1} \circ \phi_I) = \begin{bmatrix} \frac{1}{y_1^2} & 0 & 0 \\ \frac{y_2}{y_1^2} & -\frac{1}{y_1} & 0 \\ \frac{y_3}{y_1^2} & 0 & -\frac{1}{y_1} \end{bmatrix}$$

⁷請注意由於坐標卡是可逆函數 (因為它們是同胚函數)，上述轉換函數也是可逆函數，因此根據我們在《數學示例：前推與拉回》的討論，我們可以計算這些轉換函數對向量場的前推。

接著便可進行前推運算以求 v_{VI} 在 R_{II} 中的對應向量場：

$$\begin{aligned}
& (\phi_{II}^{-1} \circ \phi_I)_* [2y_2, 0, -y_1]^T \\
&= D(\phi_{II}^{-1} \circ \phi_I) \times [2y_2, 0, -y_1]^T \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{y_1^2} & 0 & 0 \\ \frac{y_2}{y_1^2} & -\frac{1}{y_1} & 0 \\ \frac{y_3}{y_1^2} & 0 & -\frac{1}{y_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2y_2 \\ 0 \\ -y_1 \end{bmatrix} \\
&= \left[\frac{2y_2}{y_1^2}, \frac{2y_2^2}{y_1^2}, \frac{2y_2y_3}{y_1^2} + 1 \right]^T \\
&= [2z_1z_2, 2z_2^2, 2z_2z_3 + 1]^T
\end{aligned}$$

其次從 (21) 可求得

$$dy_1 = \frac{1}{z_1^2} dz_1, \quad dy_2 = -\frac{z_2}{z_1^2} dz_1 + \frac{1}{z_1} dz_2, \quad dy_3 = -\frac{z_3}{z_1^2} dz_1 + \frac{1}{z_1} dz_3 \quad (24)$$

接著便可進行拉回運算 (代入法) 以求 α_{VI} 在 R_{II} 中的對應微分 1 形式：

$$\begin{aligned}
& (\phi_I^{-1} \circ \phi_{II})^* (2y_2 dy_1 - y_1 dy_3) \\
&= 2 \times \frac{z_2}{z_1} \times \frac{1}{z_1^2} dz_1 - \left(-\frac{1}{z_1} \right) \times \left(-\frac{z_3}{z_1^2} dz_1 + \frac{1}{z_1} dz_3 \right) \\
&= \left(\frac{2z_2 - z_3}{z_1^3} \right) dz_1 + \frac{1}{z_1^2} dz_3
\end{aligned}$$

為驗證上述結果，以下讓我們用 α_{VI} 、 v_{VI} 和 $(1:2:3:4)$ 在 R_I 和 R_{II} 的對應形式以計算 $\alpha_{VI}(v_{VI})(1:2:3:4)$ ，看看它們是否相同。首先計算

$$\begin{aligned}
& (2y_2 dy_1 - y_1 dy_3)([2y_2, 0, -y_1]^T)(2, 3, 4) \\
&= (4y_2^2 + y_1^2)|_{(2,3,4)} \\
&= 40
\end{aligned}$$

其次計算

$$\begin{aligned}
& \left(\left(\frac{2z_2 - z_3}{z_1^3} \right) dz_1 + \frac{1}{z_1^2} dz_3 \right) ([2z_1z_2, 2z_2^2, 2z_2z_3 + 1]^T) \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -2 \right) \\
&= \left(\left(\frac{2z_2 - z_3}{z_1^3} \right) (2z_1z_2) + \frac{1}{z_1^2} (2z_2z_3 + 1) \right) \Big|_{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -2 \right)} \\
&= 40
\end{aligned}$$

總結以上計算結果，我們有

$$v_{VI} = (\phi_I)_* [2y_2, 0, -y_1]^T = (\phi_{II})_* [2z_1z_2, 2z_2^2, 2z_2z_3 + 1]^T \quad (25)$$

$$\alpha_{VI} = (\phi_I^{-1})^*(2y_2dy_1 - y_1dy_3) = (\phi_{II}^{-1})^* \left(\left(\frac{2z_2 - z_3}{z_1^3} \right) dz_1 + \frac{1}{z_1^2} dz_3 \right) \quad (26)$$

\mathbb{RP}^3 還可能有其他坐標卡 $\phi_{III} : R_{III} \rightarrow M_{III}$ 、 $\phi_{IV} : R_{IV} \rightarrow M_{IV}$...，如繼續進行上述運算，還可求得 v_{VI} 和 α_{VI} 在 R_{III} 、 R_{IV} ... 中的形式。

最後介紹一般流形上微分 k 形式的外導數運算。給定 M 上的微分 k 形式 α ，求 $d\alpha$ 的方法是先用某個 $(\phi_i)^*$ 把 α 映射為某個 R_i 上的對應微分 k 形式，對這個微分 k 形式進行外導數運算，然後再用 $(\phi_i^{-1})^*$ 把結果映射為 M 上的微分 $k+1$ 形式。用數式表示，若 $\alpha \in \Gamma(\wedge^k T^*M)$ ，則

$$d\alpha = (\phi_i^{-1})^* d((\phi_i)^* \alpha) \quad (27)$$

以前面討論過的微分 1 形式 α_{VI} 為例，現把 ϕ_I 代入上式的 ϕ_i 計算 $d\alpha_{VI}$ ：

$$\begin{aligned} d\alpha_{VI} &= (\phi_I^{-1})^* d((\phi_I)^* \alpha_{VI}) \\ &= (\phi_I^{-1})^* d((\phi_I)^* (\phi_I^{-1})^* (2y_2dy_1 - y_1dy_3)) \\ &= (\phi_I^{-1})^* d(2y_2dy_1 - y_1dy_3) \\ &= (\phi_I^{-1})^* (-2dy_1 \wedge dy_2 - dy_1 \wedge dy_3) \end{aligned}$$

我們也可把 ϕ_{II} 代入 (27) 的 ϕ_i 以計算 $d\alpha_{VI}$ ：

$$\begin{aligned} d\alpha_{VI} &= (\phi_{II}^{-1})^* d((\phi_{II})^* \alpha_{VI}) \\ &= (\phi_{II}^{-1})^* d \left((\phi_{II})^* (\phi_{II}^{-1})^* \left(\left(\frac{2z_2 - z_3}{z_1^3} \right) dz_1 + \frac{1}{z_1^2} dz_3 \right) \right) \\ &= (\phi_{II}^{-1})^* d \left(\left(\frac{2z_2 - z_3}{z_1^3} \right) dz_1 + \frac{1}{z_1^2} dz_3 \right) \\ &= (\phi_{II}^{-1})^* \left(-\frac{2}{z_1^3} dz_1 \wedge dz_2 - \frac{1}{z_1^3} dz_1 \wedge dz_3 \right) \end{aligned}$$

讀者可自行驗證， $(\phi_I^{-1} \circ \phi_{II})^* (-2dy_1 \wedge dy_2 - dy_1 \wedge dy_3) = -\frac{2}{z_1^3} dz_1 \wedge dz_2 - \frac{1}{z_1^3} dz_1 \wedge dz_3$ ，由此可得 $(\phi_I^{-1})^* (-2dy_1 \wedge dy_2 - dy_1 \wedge dy_3) = (\phi_{II}^{-1})^* (-\frac{2}{z_1^3} dz_1 \wedge dz_2 - \frac{1}{z_1^3} dz_1 \wedge dz_3)$ ，因此以上算得的兩個 $d\alpha_{VI}$ 都是正確的。

連結至數學專題
連結至周家發網頁