數學示例：協變導數

我們在《數學示例：外導數》和《數學示例：張量場的李導數》分別介紹了微分 k 形式 (即 $(0,k)$ 張量場) 的「外導數」和一般張量場的「李導數」。本文主旨是介紹適用於張量場的第三種導數－「協變導數」。

開始時首先考慮以下情況。設 M 為 m 維流形，$x=(x_1,\ldots,x_m)$ 為 M 上某個坐標系的坐標，$v=v^i\,\frac{\partial}{\partial x^i}$ (這裡使用嚴式求和約定) 為 M 上的向量場，現在我們嘗試定義 v 的導數。根據《數學示例：外導數》，若 $\alpha=\alpha_i\,dx^i$ 為微分 1 形式，則 α 的外導數 $d\alpha$ 可用下式計算：

$$d\alpha=\frac{\partial\alpha_i}{\partial x^j}\,dx^j\wedge dx^i \qquad (1)$$

模仿上式，我們似乎可以定義 v 的外導數 dv 如下 (但要把上式中的 $\wedge$ 改為 $\otimes$)[1]：

$$\begin{aligned} dv &= \frac{\partial v^i}{\partial x^j}\,dx^j\otimes\frac{\partial}{\partial x^i}\\ &= \frac{\partial v^i}{\partial x^j}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^j \qquad (2)\end{aligned}$$

上式顯示 dv 應是一個 $(1,1)$ 張量場，其中 $\frac{\partial v^i}{\partial x^j}$ 是這個張量場的分量。現設 $\overline{x}=(\overline{x}^1,\ldots,\overline{x}^m)$ 為 M 上另一個坐標系的坐標。根據《數學示例：逆變與協變變換》中的公式 (41)[2]，由於 v 是 $(1,0)$ 張量場 (即向量場)，它相對於上述兩個坐標系的分項 $\overline{v}^k$ 與 v^i 之間應有以下關係：

$$\overline{v}^k=\frac{\partial\overline{x}^k}{\partial x^i}\,v^i \qquad (3)$$

[1]以下第二行應用了 $dx^j\otimes\frac{\partial}{\partial x^i}=\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^j$，此一等式可根據《數學示例：張量積與縮略》中張量積的定義推導而得。

[2]該公式是說，若 $T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}$ 和 $\overline{T}^{k_1\ldots k_r}_{l_1\ldots l_s}$ 分別為相對於坐標系 x 和 $\overline{x}$ 的 (r,s) 張量場的分量，則它們有以下關係：

$$\overline{T}^{k_1\ldots k_r}_{l_1\ldots l_s}=\frac{\partial\overline{x}^{k_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial\overline{x}^{k_r}}{\partial x^{i_r}}\,\frac{\partial x^{j_1}}{\partial\overline{x}^{l_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_s}}{\partial\overline{x}^{l_s}}\,T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} \qquad (i)$$

同樣，根據註腳 2 中的公式 (i)，如果 dv 是 $(1,1)$ 張量場，它相對於上述兩個坐標系的分項 $\frac{\partial \overline{v}^k}{\partial \overline{x}^l}$ 與 $\frac{\partial v^i}{\partial x^j}$ 之間應有以下關係：

$$\frac{\partial \overline{v}^k}{\partial \overline{x}^l} = \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^l}\frac{\partial v^i}{\partial x^j} \qquad (4)$$

可是，如用求導的「鏈式法則」對 (3) 求偏導數，卻會得到以下結果：

$$\frac{\partial \overline{v}^k}{\partial \overline{x}^l} = \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^l}\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial^2 \overline{x}^k}{\partial x^j \partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^l} v^i \qquad (5)$$

由於 (5) 與 (4) 互不協調，可知上述 dv 不是 $(1,1)$ 張量場，因此我們不能採納 dv 作為一般情況下 v 的導數。

不過，如比較以上兩式，可以看到 (5) 其實只比 (4) 多出了包含 2 階偏導數的項，因此我們可以透過加入適當的項以「抵消」上述 2 階偏導數，從而得到 v 的導數的恰當定義。為此我們先引入「克里斯多福符號」的概念。設 g 為 m 維流形 M 上的黎曼度量，g^{-1} 為其逆度量，那麼從 g (和 g^{-1}) 可以推導出第二類克里斯多福符號(Christoffel symbol of the second kind)，以下記作 Γ^i_{jk} (其中 $i, j, k \in \{1, \ldots, m\}$，因此給定 g，共有 m^3 個 Γ^i_{jk})，其公式如下[3]：

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right) \qquad (6)$$

在上式中，g_{lj} 等是 g 的分量，g^{il} 則是 g^{-1} 的分量 (請注意這裡把 g^{-1} 的分量寫作 g^{il} 而非 $(g^{-1})^{il}$)。由於上式中的 g_{lj} 等和 g^{il} 都是 M 上實值函數，所以 Γ^i_{jk} 也是 M 上實值函數，即其值會因應 M 的不同點而變化。

舉例說，考慮我們在《數學示例：黎曼度量》中介紹的 $\mathbb{R}^2$ 上的以下歐幾里得度量 (下式等於上述網頁的 (3))：

$$g_I = dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 \qquad (7)$$

由於 g_I 的分量全都是常數 (1 或 0)，因此對任何 $i, j, k \in \{1, 2\}$，都必有 $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0$，由此根據 (6)，必有 $(\Gamma_I)^i_{jk} = 0$。

接著考慮我們在上述網頁介紹的 $H = \{(x^1, x^2) : x^1, x^2 \in \mathbb{R} \wedge x^2 > 0\}$ 以及其上的以下龐加萊度量 (下式等於上述網頁 (9) 中的 g_{III})：

$$g_{II} = \frac{1}{(x^2)^2}\left(dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2\right) \qquad (8)$$

[3]此外，還有「第一類克里斯多福符號」(Christoffel symbol of the first kind)，但由於本文不會使用此一符號，以下不作介紹。另請注意，(6) 使用了求和約定，其中 l 是虛擬指標。

為方便以下計算，以下先寫出 g_{II} 的逆度量 (下式等於上述網頁 (20) 中的 ${g_{III}}^{-1}$)：

$$ {g_{II}}^{-1} = (x^2)^2 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes \frac{\partial}{\partial x^2} \right) \qquad (9) $$

接著讓我們用 (6) 計算 $(\Gamma_{II})^2_{11}$：

$$ \begin{aligned} (\Gamma_{II})^2_{11} &= \frac{1}{2}(g_{II})^{2l} \left(\frac{\partial (g_{II})_{l1}}{\partial x^1} + \frac{\partial (g_{II})_{l1}}{\partial x^1} - \frac{\partial (g_{II})_{11}}{\partial x^l} \right) \\ &= \frac{1}{2}(g_{II})^{21} \left(\frac{\partial (g_{II})_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial (g_{II})_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial (g_{II})_{11}}{\partial x^1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}(g_{II})^{22} \left(\frac{\partial (g_{II})_{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial (g_{II})_{21}}{\partial x^1} - \frac{\partial (g_{II})_{11}}{\partial x^2} \right) \\ &= 0 + \frac{1}{2} \times (x^2)^2 \times \left(0 + 0 - \left(\frac{-2}{(x^2)^3} \right) \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \end{aligned} $$

讀者可自行驗證，$(\Gamma_{II})^1_{12} = (\Gamma_{II})^1_{21} = (\Gamma_{II})^2_{22} = -\frac{1}{x^2}$，$(\Gamma_{II})^1_{11} = (\Gamma_{II})^1_{22} = (\Gamma_{II})^2_{12} = (\Gamma_{II})^2_{21} = 0$。

以下定理提供第二類克里斯多福符號的一個重要性質。

定理 1：設 g 為 m 維流形 M 上的黎曼度量，Γ^i_{jk} 為從 g 導出的第二類克里斯多福符號，則對任何 $i, j, k \in \{1, \ldots, m\}$，都有 $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$。

上述定理有助減省對 Γ^i_{jk} 的計算。舉例說，給定 2 維流形 M 的黎曼度量 g，我們實際只需計算 Γ^1_{11}、Γ^1_{12}、Γ^1_{22}、Γ^2_{11}、Γ^2_{12} 和 Γ^2_{22}。

Γ^i_{jk} 雖然在外形上類似一個 $(1, 2)$ 張量場的分量，但它實際上卻不是任何張量場的分量。事實上，可以證明若 $\overline{\Gamma}^p_{qr}$ 和 Γ^i_{jk} 是某個第二類克里斯多福符號相對於兩個坐標系的值，則它們滿足以下變換關係：

$$ \overline{\Gamma}^p_{qr} = \frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^q} \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^r} \Gamma^i_{jk} + \frac{\partial \overline{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \overline{x}^q \partial \overline{x}^r} \qquad (10) $$

由於上式多出了包含 2 階偏導數的項，所以 Γ^i_{jk} 不是任何 $(1, 2)$ 張量場的分量。

正由於第二類克里斯多福符號的變換關係包含 2 階偏導數的項，這正好用來「抵消」前面 (5) 中的 2 階偏導數，因此我們可以利用第二類克里

斯多福符號來定義向量場的導數。設 M、g 和 Γ^i_{jk} 如上定義，$v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 為 M 上的向量場，則 v 的協變導數(covariant derivative)，以下記作 ∇v[4]，是具有以下形式的 $(1,1)$ 張量場：

$$\nabla v = v^i_{;j} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \qquad (11)$$

在上式中，$v^i_{;j}$ 是 ∇v 的分量。請注意這個分量帶有上、下標各一，顯示 ∇v 是一個 $(1,1)$ 張量場。由此可見，對向量場 (亦即 $(1,0)$ 張量場) 求協變導數的結果是使原來向量場的協變度從 0 增至 1，這就是「協變導數」一名的由來。此外，這個分量的下標 j 前有一個 ; 號，以突顯這個 j 是求協變導數而新增的下標。以下是上述分量的計算公式：

$$v^i_{;j} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jp} v^p \qquad (12)$$

由於上述定義涉及 Γ^i_{jp}，這顯示 ∇v 的值依賴於 v 所「寄生」的流形上的黎曼度量。

舉例說，考慮前面討論過的黎曼流形 $(\mathbb{R}^2, g_I)$。如前所述，對任何 $i, j, k \in \{1, 2\}$，$(\Gamma_I)^i_{jk} = 0$。由此根據 (11) 和 (12)，可知若 v 是 $(\mathbb{R}^2, g_I)$ 上的向量場，則有

$$\begin{aligned}
\nabla v &= \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \\
&= \frac{\partial v^1}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^1 + \frac{\partial v^1}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^2 + \frac{\partial v^2}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^1 + \frac{\partial v^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^2
\end{aligned}$$

把上面第一行與 (2) 比較，可以看到兩式等號右端的數式是一樣的。由此可見，在 $(\mathbb{R}^2, g_I)$ 上，前面介紹的 dv 等於這裡介紹的 ∇v。換句話說，前面介紹的 dv 其實可以作為 $(\mathbb{R}^2, g_I)$ 上 v 的導數，但不能作為一般黎曼流形上 v 的導數。

接著考慮前面討論過的另一黎曼流形 (H, g_{II})，讓我們先用 (12) 和前面的計算結果求 (H, g_{II}) 上 ∇v 的分量 $v^2_{;1}$：

$$\begin{aligned}
v^2_{;1} &= \frac{\partial v^2}{\partial x^1} + (\Gamma_{II})^2_{1p} v^p \\
&= \frac{\partial v^2}{\partial x^1} + (\Gamma_{II})^2_{11} v^1 + (\Gamma_{II})^2_{12} v^2 \\
&= \frac{\partial v^2}{\partial x^1} + \frac{v^1}{x^2}
\end{aligned}$$

[4]請不要把本文中的「協變導數」與向量分析中的「梯度」(gradient) 相混淆，兩者雖然使用相同的符號 ∇，但卻是不同的概念。

讀者可自行驗證,在 (H, g_{II}) 上,$v^1_{;1} = \frac{\partial v^1}{\partial x^1} - \frac{v^2}{x^2}$,$v^1_{;2} = \frac{\partial v^1}{\partial x^2} - \frac{v^1}{x^2}$ 和 $v^2_{;2} = \frac{\partial v^2}{\partial x^2} - \frac{v^2}{x^2}$。綜合以上計算結果，根據 (11) 可知若 v 是 (H, g_{II}) 上的向量場，則有

$$\begin{aligned}\nabla v &= \left(\frac{\partial v^1}{\partial x^1} - \frac{v^2}{x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^1}\otimes dx^1 + \left(\frac{\partial v^1}{\partial x^2} - \frac{v^1}{x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^1}\otimes dx^2 \\ &\quad + \left(\frac{\partial v^2}{\partial x^1} + \frac{v^1}{x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^2}\otimes dx^1 + \left(\frac{\partial v^2}{\partial x^2} - \frac{v^2}{x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^2}\otimes dx^2\end{aligned}$$

前面說過，∇v 是 $(1,1)$ 張量場。事實上，可以證明若 $\overline{v}^k_{;l}$ 和 $v^i_{;j}$ 分別為 ∇v 相對於坐標系 $\overline{x}$ 和 x 的分量，則它們滿足以下變換關係：

$$\overline{v}^k_{;l} = \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^l}\, v^i_{;j} \qquad (13)$$

把上式與 (4) 比較，可以看到 ∇v 的確滿足 $(1,1)$ 張量場的變換關係，由此驗證了 ∇v 確是 $(1,1)$ 張量場。

協變導數的概念不僅適用於向量場，也適用於微分 1 形式。設 M、g 和 Γ^i_{jk} 如上定義，$\alpha = \alpha_i\, dx^i$ 為 M 上的微分 1 形式，則 α 的協變導數，以下記作 $\nabla\alpha$，是具有以下形式的 $(0,2)$ 張量場：

$$\nabla\alpha = \alpha_{i;\,j}\, dx^i \otimes dx^j \qquad (14)$$

在上式中，$\alpha_{i;\,j}$ 是 $\nabla\alpha$ 的分量。請注意這個分量帶有兩個下標，顯示 $\nabla\alpha$ 是一個 $(0,2)$ 張量場。由此可見，對微分 1 形式 (亦即 $(0,1)$ 張量場) 求協變導數的結果是使原來微分 1 形式的協變度從 1 增至 2。此外，這個分量的下標 j 前有一個；號，以突顯這個 j 是求協變導數而新增的下標。以下是上述分量的計算公式：

$$\alpha_{i;\,j} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} - \Gamma^p_{ij}\alpha_p \qquad (15)$$

跟 ∇v 一樣，$\nabla\alpha$ 的值也依賴於 α 所「寄生」的流形上的黎曼度量。舉例說，根據 (14) 和 (15)，可知若 α 是 (H, g_{II}) 上的微分 1 形式，則有

$$\begin{aligned}\nabla\alpha &= \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} - (\Gamma_{II})^p_{ij}\alpha_p\right) dx^i \otimes dx^j \\ &= \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x^1} - \frac{\alpha_2}{x^2}\right) dx^1\otimes dx^1 + \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x^2} + \frac{\alpha_1}{x^2}\right) dx^1\otimes dx^2 \\ &\quad + \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x^1} + \frac{\alpha_1}{x^2}\right) dx^2\otimes dx^1 + \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x^2} + \frac{\alpha_2}{x^2}\right) dx^2\otimes dx^2\end{aligned}$$

類似 ∇v 的情況，可以證明若 $\overline{\alpha}_{k;\,l}$ 和 $\alpha_{i;\,j}$ 分別為 $\nabla\alpha$ 相對於坐標系 $\overline{x}$ 和 x 的分量，則它們滿足以下變換關係：

$$\overline{\alpha}_{k;\,l} = \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^l}\,\alpha_{i;\,j} \qquad (16)$$

把上式與註腳 2 中的公式 (i) 比較，可以看到 $\nabla\alpha$ 的確滿足 $(0,2)$ 張量場的變換關係，由此驗證了 $\nabla\alpha$ 確是 $(0,2)$ 張量場。

現在我們把協變導數概念推廣應用到一般張量場。設 M、g 和 Γ^i_{jk} 如上定義，$T = T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\ldots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\ldots\otimes dx^{j_s}$ 為 M 上的 (r,s) 張量場，則 T 的協變導數，以下記作 ∇T，是具有以下形式的 $(r,s+1)$ 張量場：

$$\nabla T = T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s;\,j_{s+1}}\,\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\ldots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\ldots\otimes dx^{j_s}\otimes dx^{j_{s+1}} \qquad (17)$$

在上式中，$T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s;\,j_{s+1}}$ 是 ∇T 的分量。請注意這個分量帶有 r 個上標和 $s+1$ 個下標，顯示 ∇T 是一個 $(r,s+1)$ 張量場。由此可見，對 (r,s) 張量場求協變導數的結果是使原來 (r,s) 張量場的協變度從 s 增至 $s+1$。此外，這個分量的下標 j_{s+1} 前有一個；號，以突顯這個 j_{s+1} 是求協變導數而新增的下標。以下是上述分量的計算公式：

$$T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s;\,j_{s+1}} = \frac{\partial T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}}{\partial x^{j_{s+1}}} + \sum_{q=1}^{r}\Gamma^{i_q}_{j_{s+1}\,p}\,T^{i_1\ldots i_{q-1}\,p\,i_{q+1}\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} - \sum_{q=1}^{s}\Gamma^{p}_{j_{s+1}\,j_q}\,T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_{q-1}\,p\,j_{q+1}\ldots j_s} \qquad (18)$$

上式等號右端包含 $1+r+s$ 個項，其中第 1 項是一個偏導數，接下來的 r 個項是就著 T 的分量的 r 個上標各加上一個包含第二類克里斯多福符號的項，最後 s 個項則是就著 T 的分量的 s 個下標各減去一個包含第二類克里斯多福符號的項。惟請注意，上式中除了第 1 項外，其餘 $r+s$ 個項都包含虛擬指標 p，而根據求和約定，這 $r+s$ 個項中的每一個都可展開成包含 m 個項的數式，因此上式展開後實應包含 $1+mr+ms$ 個項。請讀者自行驗證，前面的 (12) 和 (15) 都是上式的特例。

舉例說，設 $T = T^{i_1 i_2}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_2}}$ 為 (H, g_{II}) 上的 $(2,0)$ 張量場，那麼 ∇T 是 (H, g_{II}) 上的 $(2,1)$ 張量場。以下讓我們用 (18) 求 ∇T 的 $T^{21}_{;2}$ 分量：

$$\begin{aligned}
T^{21}_{;2} &= \frac{\partial T^{21}}{\partial x^2} + \Gamma^2_{2p}T^{p1} + \Gamma^1_{2p}T^{2p}\\
&= \frac{\partial T^{21}}{\partial x^2} + \Gamma^2_{21}T^{11} + \Gamma^2_{22}T^{21} + \Gamma^1_{21}T^{21} + \Gamma^1_{22}T^{22}\\
&= \frac{\partial T^{21}}{\partial x^2} + 0 - \frac{T^{21}}{x^2} - \frac{T^{21}}{x^2} + 0\\
&= \frac{\partial T^{21}}{\partial x^2} - \frac{2T^{21}}{x^2}
\end{aligned}$$

請讀者自行驗證,$T^{11}_{;1} = \frac{\partial T^{11}}{\partial x^1} - \frac{T^{12}+T^{21}}{x^2}$,$T^{11}_{;2} = \frac{\partial T^{11}}{\partial x^2} - \frac{2T^{11}}{x^2}$,$T^{12}_{;1} = \frac{\partial T^{12}}{\partial x^1} + \frac{T^{11}-T^{22}}{x^2}$, $T^{12}_{;2} = \frac{\partial T^{12}}{\partial x^2} - \frac{2T^{12}}{x^2}$, $T^{21}_{;1} = \frac{\partial T^{21}}{\partial x^1} + \frac{T^{11}-T^{22}}{x^2}$, $T^{22}_{;1} = \frac{\partial T^{22}}{\partial x^1} + \frac{T^{12}+T^{21}}{x^2}$ 和 $T^{22}_{;2} = \frac{\partial T^{22}}{\partial x^2} - \frac{2T^{22}}{x^2}$。綜合以上計算結果, 根據 (17), 可知若 T 是 (H, g_{II}) 上的 $(2,0)$ 張量場, 則有

$$\begin{aligned}
& \nabla T \\
= \; & \left(\frac{\partial T^{11}}{\partial x^1} - \frac{T^{12}+T^{21}}{x^2}\right) \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^1 + \left(\frac{\partial T^{11}}{\partial x^2} - \frac{2T^{11}}{x^2}\right) \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^2 \\
& + \left(\frac{\partial T^{12}}{\partial x^1} + \frac{T^{11}-T^{22}}{x^2}\right) \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^1 + \left(\frac{\partial T^{12}}{\partial x^2} - \frac{2T^{12}}{x^2}\right) \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^2 \\
& + \left(\frac{\partial T^{21}}{\partial x^1} + \frac{T^{11}-T^{22}}{x^2}\right) \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^1 + \left(\frac{\partial T^{21}}{\partial x^2} - \frac{2T^{21}}{x^2}\right) \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes dx^2 \\
& + \left(\frac{\partial T^{22}}{\partial x^1} + \frac{T^{12}+T^{21}}{x^2}\right) \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^1 + \left(\frac{\partial T^{22}}{\partial x^2} - \frac{2T^{22}}{x^2}\right) \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes \frac{\partial}{\partial x^2} \otimes dx^2
\end{aligned}$$

可以證明若 $\overline{T}^{k_1 \ldots k_r}_{l_1 \ldots l_s;\, l_{s+1}}$ 和 $T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s;\, j_{s+1}}$ 分別為 ∇T 相對於坐標系 $\overline{x}$ 和 x 的分量, 則它們滿足以下變換關係:

$$\overline{T}^{k_1 \ldots k_r}_{l_1 \ldots l_s;\, l_{s+1}} = \frac{\partial \overline{x}^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial \overline{x}^{k_r}}{\partial x^{i_r}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \overline{x}^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_s}}{\partial \overline{x}^{l_s}} \frac{\partial x^{j_{s+1}}}{\partial \overline{x}^{l_{s+1}}} T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s;\, j_{s+1}} \qquad (19)$$

把上式與註腳 2 中的公式 (i) 比較, 可以看到 ∇T 的確滿足 $(r, s+1)$ 張量場的變換關係, 由此驗證了 ∇T 確是 $(r, s+1)$ 張量場。

協變導數概念也適用於 $(0,0)$ 張量場。設 f 為 $(0,0)$ 張量場 (即 M 上實值函數), 那麼根據 (17), ∇f 應是具有以下形式的 $(0,1)$ 張量場 (即微分 1 形式):

$$\nabla f = f_{;j}\, dx^j \qquad (20)$$

在上式中, $f_{;j}$ 是 ∇f 的分量。根據 (18), 這個分量的計算公式如下 (由於 f 沒有上、下標, 所以 (18) 中包含第二類克里斯多福符號的項全部消失):

$$f_{;j} = \frac{\partial f}{\partial x^j} \qquad (21)$$

把 (20) 和 (21) 結合起來, 便有

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x^j}\, dx^j \qquad (22)$$

上式跟 f 的外導數 df 的定義是一樣的 (請參閱《數學示例:外導數》中的 (2))。由於上式的值不依賴於黎曼度量 g, 因此在任何黎曼流形上, 都有

$\nabla f = df$，由此可以看到，協變導數從某方面看是外導數的推廣。

由於黎曼度量 g 及其逆度量 g^{-1} 分別是 $(0,2)$ 和 $(2,0)$ 張量場，我們可以對這兩個度量求協變導數，以下提供一個與此有關的重要定理。

定理 2 (里奇定理Ricci's Theorem)：設 g 為某流形 M 上的黎曼度量，g^{-1} 為其逆度量，則

$$\nabla g = \nabla g^{-1} = 0 \qquad (23)$$

上式的意思是 ∇g 和 ∇g^{-1} 均為零張量場，即它們的任何分量以任何 $x \in M$ 為輸入的值都是 0。以前面討論過的 g_{II} 為例，根據 (8)，我們有 $(g_{II})_{11} = \frac{1}{(x^2)^2}$。以下讓我們用 (18) 計算 $(g_{II})_{11;2}$：

$$\begin{aligned}
(g_{II})_{11;2} &= \frac{\partial (g_{II})_{11}}{\partial x^2} - (\Gamma_{II})^p_{21}(g_{II})_{p1} - (\Gamma_{II})^p_{21}(g_{II})_{1p} \\
&= \frac{\partial (g_{II})_{11}}{\partial x^2} - (\Gamma_{II})^1_{21}(g_{II})_{11} - (\Gamma_{II})^2_{21}(g_{II})_{21} - (\Gamma_{II})^1_{21}(g_{II})_{11} - (\Gamma_{II})^2_{21}(g_{II})_{12} \\
&= -\frac{2}{(x^2)^3} + \frac{1}{(x^2)^3} - 0 + \frac{1}{(x^2)^3} - 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

請讀者自行就 $i, j, k \in \{1, 2\}$，計算 $g_{ij;k}$ 和 $g^{ij}_{;k}$，以驗證 (23)。

連結至數學專題
連結至周家發網頁