數學示例：連通性

我們在《數學示例：連續函數與同胚》中介紹了同胚關係。可以說，拓樸學的核心研究課題就是同胚，以及同胚空間共有的性質，這樣的性質又稱為「拓樸性質」(topological property)，本章主旨是介紹一種基本拓樸性質 —「連通性」，讀者在下文將會看到，這種性質對於判定不同胚的空間有重要用途。

「連通性」的定義較容易從其反面去表述。直觀地看，一個拓樸空間不是連通的，如果它可分割成多個不相接合的「組件」。舉例說，

$$X_1 = [0, 1] \cup (2, 3) \cup [4, 5) \cup (6, 7] \qquad (1)$$

就是不連通的，因為它可分割成四個不相接合的區間。在拓樸學上，我們可以把上述直觀概念嚴格地表述如下：設 X 為拓樸空間，如果可以把 X 寫成其上兩個互斥非空開集 U 和 V 的并集，即 $X = U \cup V$，其中 U 和 V 是 X 上的非空開集，並且 $U \cap V = \emptyset$，則 X 是不連通(disconnected) 的，否則 X 是連通(connected) 的。

舉例說，考慮前面的 X_1。由於 X_1 是 $\mathbb{R}$ 的子空間，我們在這裡要運用《數學示例：開集與閉集》中介紹的「子空間拓樸」概念，把 X_1 上的開集定為 $\mathbb{R}$ 上開集與 X_1 的交集。由於 $[0, 1] = X_1 \cap (-0.5, 1.5)$，而 $(-0.5, 1.5)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的開集，所以 $[0, 1]$ 是 X_1 上的開集。同理，容易看到 $(2, 3)$、$[4, 5)$ 和 $(6, 7]$ 也是 X_1 上的開集。如果設定 $U_1 = [0, 1] \cup (2, 3)$，$V_1 = [4, 5) \cup (6, 7]$，那麼 U_1 和 V_1 是 X_1 上兩個互斥非空開集，而且 $X_1 = U_1 \cup V_1$，因此根據上述定義，X_1 是不連通的。

其次考慮 $X_2 = (0, 1]$，這個區間顯然是連通的。事實上，我們無法把 X_2 寫成其上兩個互斥非空開集的并集。例如雖然有 $X_2 = (0, 1) \cup \{1\}$，但 $\{1\}$ 不是 X_2 上的開集。雖然有 $X_2 = (0, 1) \cup (0.9, 1]$，但 $(0, 1)$ 與 $(0.9, 1]$ 並不互斥，因為 $(0, 1) \cap (0.9, 1] = (0.9, 1)$。雖然有 $X_2 = (0, 1] \cup \emptyset$，即把 X_2 寫成其上兩個互斥開集的并集，但這兩個互斥開集中有一個是空集。上例是以下定理的一個特例。

定理 1：設 X 為 $\mathbb{R}$ 的非空子集，則 X 是連通的當且僅當 X 是一個區間。

請注意由於 X_1 不是區間 (雖然它是四個區間的并集)，根據上述定理，可知 X_1 是不連通的。

在上面有關不連通空間的定義中，U 和 V 是 X 上的開集。由於 U 和 V 互為對方的補集 (即 $X - U = V$ 並且 $X - V = U$)，因此根據《數學示例：開集與閉集》中閉集的定義，U 和 V 也是 X 上的閉集，即 U 和 V 是 X 上的「閉開集」。另外，根據上述網頁，我們知道對任何拓樸空間 X 而言，X 和 $\emptyset$ 是 X 上的閉開集。現在我們看到，如果 X 是不連通空間，那麼除了 X 和 $\emptyset$ 這兩個「平凡閉開集」外，它還有其他「非平凡閉開集」。事實上，存在非平凡閉開集是不連通空間的特性，這是以下定理的內容。

定理 2：設 X 為拓樸空間，則 X 是連通的當且僅當除了 X 和 $\emptyset$ 外，X 上沒有其他閉開集。

以前面討論過的 X_1 (見 (1)) 為例，我們在前面指出 X_1 可被寫成 $U_1 = [0,1] \cup (2,3)$ 和 $V_1 = [4,5) \cup (6,7]$ 的并集，並且 U_1 和 V_1 是 X_1 上的開集。但由於 $U_1 = X_1 \cap [0,3]$ 並且 $V_1 = X_1 \cap [4,7]$，而 $[0,3]$ 和 $[4,7]$ 是 $\mathbb{R}$ 上的閉集，因此根據《數學示例：開集與閉集》中的「定理 5(i)」，可知 U_1 和 V_1 也是 X_1 上的閉集。由此可見，U_1 和 V_1 是 X_1 上的非平凡閉開集，根據「定理 2」，可知 X_1 是不連通的，與前面的結論一致。

連通性在拓樸學中的重要性在於此一性質是連續函數下的不變性質，這是以下定理的內容。

定理 3：設 X 和 Y 為拓樸空間，$f : X \to Y$ 為連續函數，若 X 是連通的，則 $f(X)$ 也是連通的。

利用上述定理，可以推導出圓邊 S^1 是連通的。考慮以下函數：

$$f_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2; \quad f_1(x) = (\cos x, \sin x) \qquad (2)$$

上述函數顯然是連續的，而且它把 $[0, 2\pi]$ 映射到 S^1 上，例如我們有 $f_1(0) = (1,0)$，$f_1(\frac{\pi}{2}) = (0,1)$，$f_1(\pi) = (-1,0)$，$f_1(\frac{3\pi}{2}) = (0,-1)$，$f_1(2\pi) = (1,0)$，由此我們有 $f_1([0,2\pi]) = S^1$。根據「定理 1」，區間 $[0, 2\pi]$ 是連通的，由此根據上述定理，可知 S^1 也是連通的。

根據《數學示例：連續函數與同胚》中的定義，若一一到上函數 f 及其逆函數 f^{-1} 都是連續函數，則 f 是同胚。由此從上述定理可以推得以下定理。

定理 4：若 $f: X \to Y$ 是同胚，那麼 X 是連通的當且僅當 Y 是連通的。

上述定理告訴我們，連通性是同胚空間共有的性質，即本文第一段所稱的拓樸性質。

我們在《數學示例：連續函數與同胚》中曾指出，區間 $(-1,1)$ 與整條實數線 $\mathbb{R}$ 同胚。另外，根據「定理 1」，可知區間 $(-1,1)$ 是連通的，由此根據上段的討論，可知 $\mathbb{R}$ 也是連通的。此一結果符合我們的直觀，因為我們可以把 $\mathbb{R}$ 看成區間 $(-\infty,\infty)$，而根據「定理 1」，任何區間都是連通的。

根據「定理 4」，如果 X 和 Y 中有一個是連通空間，另一個是不連通空間，我們可即時推斷 X 與 Y 不可能同胚，由此可見，「定理 4」可幫助我們判斷不同胚空間。以前面討論過的 X_1 和 X_2 為例，由於 X_1 是不連通的，而 X_2 是連通的，由此可知 X_1 與 X_2 不可能同胚。

惟請注意，「定理 4」的逆命題卻不成立，即我們不能因為兩個空間同是連通 (或同是不連通) 的而斷定該兩個空間同胚。例如根據「定理 1」，開區間 $(0,1)$ 和閉區間 $[0,1]$ 都是連通的，但這兩類區間卻不是同胚的 (此一事實要在引入「緊致性」此一概念後才能證明，請參閱《數學示例：緊致性》)。

利用「定理 3」，還可以推得其他有趣結果，其中一個結果是數學分析中的「介值定理」，以下是介值定理的一個版本。

定理 5 (介值定理Intermediate Value Theorem)：設 $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ 為連續函數，y 為介於 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之間的實數，則必存在 $x \in [a,b]$ 使得 $f(x)=y$。

接著讓我們證明上述定理。根據「定理 1」，區間 $[a,b]$ 是連通的。根據「定理 3」，集合 $f([a,b])$ 也是連通的，由此再根據「定理 1」，可知 $f([a,b])$ 必是一個區間。請注意區間具有以下特性：如有兩個實數屬於某區間，那麼介於該兩個實數之間的任何實數都屬於該區間。由於 $f(a) \in f([a,b])$ 並且 $f(b) \in f([a,b])$，而 y 介於 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之間，因此必有 $y \in f([a,b])$，即必存在 $x \in [a,b]$ 使得 $f(x)=y$。

利用「介值定理」，可以推斷某些連續函數的方程在某些範圍內必有解 (即使我們不知道如何找這個解)。舉例說，考慮五次多項式 $f_2(x)=x^5-2x^3-2$。儘管我們沒有解一般五次多項式方程的方法，但可以計算 $f_2(1)=-3$ 和 $f_2(2)=14$。由於 0 是介於 -3 與 14 之間的實數，根據「介值定理」，可知必存在 $x \in [1,2]$ 使得 $f_2(x)=0$，由此可以推斷多項式方程 $f_2(x)=0$ 在區

間 $[1,2]$ 中必有解。以下讀者還會看到「介值定理」的另一個應用例子。

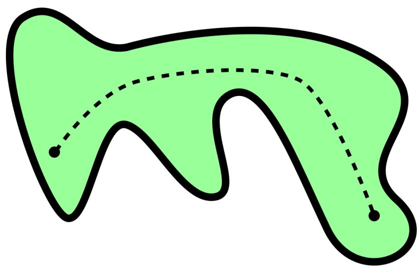
與連通性密切相關的另一種性質是「路徑連通性」，在介紹此一性質前，須先引入「路徑」的概念。設 X 為拓樸空間，a 和 b 為 X 上的點，從 a 到 b 的路徑(path) 是指把閉區間 $[0,1]$ 映射到 X 內的連續函數 f，使得 $f(0)=a$ 並且 $f(1)=b$ [1]。舉例說，在拓樸空間 $\mathbb{R}$ 上，以下便是從點 a 到點 b (其中 $a,b\in\mathbb{R}$) 的路徑：

$$f_3:[0,1]\to\mathbb{R};\quad f_3(x)=a+x(b-a) \qquad (3)$$

讀者可自行驗證，上述函數是連續的，而且有 $f_3(0)=a$ 並且 $f_3(1)=b$，因此確是從 a 到 b 的路徑。

如果對 X 上任意兩點 a 和 b，都有一條從 a 到 b 的路徑，我們便說 X 是路徑連通(path-connected) 的。舉例說，$\mathbb{R}$ 是路徑連通的，這是因為給定 $\mathbb{R}$ 上任意兩點 a 和 b，可以使用前面的函數 f_3 作為從 a 到 b 的路徑。

在上面的例子中，我們具體寫出了從 a 到 b 的路徑函數。但在某些情況下，無需寫出具體的路徑函數，而只需想像出一條從 a 到 b 的路徑便可。舉例說，下圖展示一個綠色的空間，其上的虛線顯示從這個空間中一點到另一點的路徑。容易看到這個綠色空間的任意兩點之間都存在類似的路徑，因此這個綠色空間是路徑連通的。

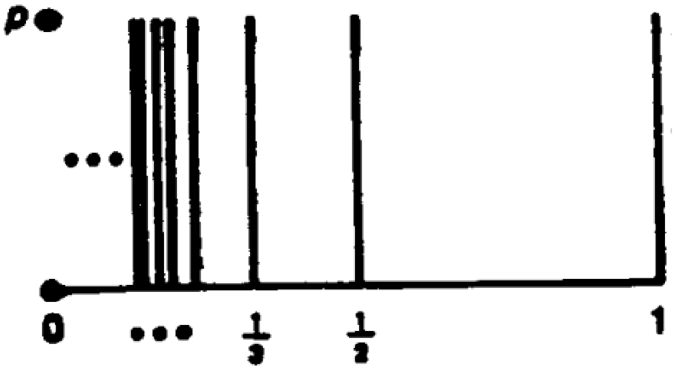


直觀地看，路徑連通性似乎與前面介紹的連通性是等價概念，事實上，我們有以下定理。

定理 6：設 X 為拓樸空間，若 X 是路徑連通的，則 X 也是連通的。

但上述定理的逆命題卻不成立，即存在連通但非路徑連通的空間，下圖展示具有此一特性的空間 X_3，由於下圖像一把梳子，所以 X_3 稱為「拓樸學家的梳子」(topologist's comb)：

[1]根據上述定義，路徑是指一個函數。可是，直觀地看，路徑似乎應該是指函數的映像，而非函數本身，因此在下文的討論中，有時我們會把 f 的映像 $f([0,1])$ 稱為「路徑」。



上圖由三類「部件」組成：(a) 坐標為 $(0,1)$ 的點 p；(b) $\{(x,0) : x \in [0,1]\}$，即 x 軸上從 0 到 1 的一段，也就是上圖中底部的横線；(c) $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{(\frac{1}{n},y) : y \in [0,1]\}$，即無窮多條與 y 軸平行，長度為 1，其底端在 x 軸的 1、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、...、$\frac{1}{n}$、... 等點上的豎線。請注意在 X_3 中雖然越接近 y 軸便越多豎線，但 y 軸上從 0 到 1 的一段 (除了原點 $(0,0)$ 和 p 外) 並不屬於 X_3，因為沒有任何正整數 n 使得 $\frac{1}{n} = 0$。

接下來讓我們證明 X_3 確有所述的特性。首先用反證法證明 X_3 是連通的，故假設它不是連通的，即 X_3 可以寫成兩個互斥非空開集 U_2 和 V_2 的并集。上圖中的 p 點必然屬於這兩個開集中的一個，不失一般性，假設 $p = (0,1) \in U_2$。這有兩種可能情況：(i) U_2 除了 p 外沒有其他點，即 $U_2 = \{p\}$；(ii) U_2 除了 p 外還有其他點。

在情況 (i) 下，由於 U_2 是 X_3 上的開集，而 X_3 是 $\mathbb{R}^2$ 的子空間，根據子空間拓樸的定義，可知

$$U_2 = X_3 \cap U_{\mathbb{R}^2} \qquad (4)$$

其中 $U_{\mathbb{R}^2}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的開集。由於 $p \in U_{\mathbb{R}^2}$，根據我們在《數學示例：拓樸空間》中介紹的 $\mathbb{R}^n$ 上開集的性質，必存在一個包括 p 的開球 $B(p,\epsilon)$，使得 $B(p,\epsilon) \subseteq U_{\mathbb{R}^2}$。由此我們有

$$X_3 \cap B(p,\epsilon) \subseteq X_3 \cap U_{\mathbb{R}^2} = U_2 = \{p\}$$

因此必有 $X_3 \cap B(p,\epsilon) = \{p\}$。可是，不論 ϵ 是多麼小的正實數，都必有某個足夠大的正整數 n 使得 $\frac{1}{n} < \epsilon$，故必有 $|(\frac{1}{n},1) - p| < \epsilon$，即 $(\frac{1}{n},1) \in B(p,\epsilon)$。但由於 $(\frac{1}{n},1) \in X_3$，這麼一來便有 $(\frac{1}{n},1) \in X_3 \cap B(p,\epsilon)$，這與前面的結論 $X_3 \cap B(p,\epsilon) = \{p\}$ 矛盾。

在情況 (ii) 下，$U_2 - \{p\} \neq \emptyset$。根據 (4)，我們有

$$U_2 - \{p\} = (X_3 \cap U_{\mathbb{R}^2}) - \{p\} = X_3 \cap (U_{\mathbb{R}^2} - \{p\})$$

由於 $U_{\mathbb{R}^2} - \{p\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的開集[2]，所以 $U_2 - \{p\}$ 是 X_3 上的開集。但這麼一來，我們便可以把 $X_3 - \{p\}$ 寫成兩個互斥非空開集 $U_2 - \{p\}$ 和 V_2 的并集，由此推得 $X_3 - \{p\}$ 是不連通的。可是，$X_3 - \{p\}$ 顯然是路徑連通的，因為我們總可以循上圖中的豎線和橫線從 $X_3 - \{p\}$ 的某一點通往另一點。由此根據「定理 6」, $X_3 - \{p\}$ 應是連通的，這與前面的結論矛盾。

至此證明了上述情況 (i) 和 (ii) 都會產生矛盾，這顯示我們最初的假設是不正確的，由此證明了 X_3 是連通的。

其次用反證法證明 X_3 不是路徑連通的，故假設它是路徑連通的。考慮 X_3 上有別於 p 的任意一點 q，那麼必有一條從 p 到 q 的路徑 $f_4 : [0,1] \to X_3$ 使得 $f_4(0) = p$ 並且 $f_4(1) = q$。這條路徑 $f_4([0,1])$ 有兩種可能情況：(i) 它與 x 軸不相交；(ii) 它與 x 軸相交。

在情況 (i) 下，考慮投射函數 $\text{Proj}_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，這個函數把 $\mathbb{R}^2$ 上的元素映射為其 x 坐標，例如由於 p 的坐標是 $(0,1)$，故有 $\text{Proj}_x(p) = 0$。至於 q，由於 $q \neq p$ 而且 q 不在 x 軸上，q 的 x 坐標必然大於 0，以下記作 x_q，即 $\text{Proj}_x(q) = x_q$。另請注意由於 $f_4([0,1])$ 與 x 軸不相交，$f_4([0,1])$ 上的點要麼是 p，要麼位於上圖的某條豎線上，因此所有這些點的 x 坐標都是有理數。

接著考慮複合函數 $\text{Proj}_x \circ f_4 : [0,1] \to \mathbb{R}$。由於 f_4 和 Proj_x 都是連續函數，這個複合函數也是連續函數。此外，我們有 $\text{Proj}_x \circ f_4(0) = 0$ 和 $\text{Proj}_x \circ f_4(1) = x_q$，其中 $x_q > 0$。設 x_1 為介於 0 與 x_q 之間的任意無理數，那麼根據「介值定理」(即前面的「定理 5」)，存在 $m \in [0,1]$ 使得 $\text{Proj}_x \circ f_4(m) = x_1$。但這麼一來 $f_4(m)$ 的 x 坐標便是無理數 x_1，這與上段的結論 $f_4([0,1])$ 上所有點的 x 坐標都是有理數相矛盾。

在情況 (ii) 下，首先我們注意到 $\{(x,0) : x \in [0,1]\}$(即上圖中底部的橫線) 等於 X_3 與 x 軸的交集，而 x 軸是 $\mathbb{R}^2$ 上的閉集[3]，因此根據《數學示例：開集與閉集》中的「定理 5(i)」，這條橫線是 X_3 上的閉集。由於 f_4 是連續函數，因此根據我們在《數學示例：連續函數與同胚》中介紹的連續函

[2]此一事實可證明如下：設 $q \in U_{\mathbb{R}^2} - \{p\}$。一方面，由於 $q \in U_{\mathbb{R}^2}$，故有開球 $B(q,\epsilon_1)$ 使得 $B(q,\epsilon_1) \subseteq U_{\mathbb{R}^2}$。另一方面，由於 $q \neq p$，因此 $\epsilon_2 = |q-p|$ 是正實數。現在取 $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$，由此必有 $B(q,\epsilon) \subseteq U_{\mathbb{R}^2}$ 並且 $p \notin B(q,\epsilon)$，即 $B(q,\epsilon) \subseteq U_{\mathbb{R}^2} - \{p\}$。由此可知 $U_{\mathbb{R}^2} - \{p\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的開集。

[3]這是因為 x 軸可被看成集合 $\{(x,y) : y > 0\}$ 的邊界，而我們在《數學示例：開集與閉集》中指出了一個集合的邊界是閉集。

數的性質，前述橫線在 f_4 下的原像，即實數集合 ${f_4}^{-1}(\{(x,0):x\in[0,1]\})$，也是閉集。接著考慮這個原像的「下確界」[4]，以下記作 n，請注意這個 n 是 ${f_4}^{-1}(\{(x,0):x\in[0,1]\})$ 的「閉包點」[5]。由於 ${f_4}^{-1}(\{(x,0):x\in[0,1]\})$ 是閉集，根據《數學示例：開集與閉集》中的「定理 4(iii)」，

$$n\in {f_4}^{-1}(\{(x,0):x\in[0,1]\}) \qquad (5)$$

由此可見，$f_4(n)$ 是路徑 $f_4[0,1]$ 中最早與 x 軸相交的一點。

考慮投射函數 $\mathrm{Proj}_y:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$，這個函數把 $\mathbb{R}^2$ 上的元素映射為其 y 坐標，例如由於 p 的坐標是 $(0,1)$，故有 $\mathrm{Proj}_y(p)=1$。接著考慮複合函數 $\mathrm{Proj}_y\circ f_4:[0,1]\to\mathbb{R}$。跟情況 (i) 相似，這個複合函數也是連續函數。根據這個複合函數的定義，我們有 $\mathrm{Proj}_y\circ f_4(0)=1$。此外，根據 (5)，我們有 $\mathrm{Proj}_y\circ f_4(n)=0$。由於 $\frac{1}{2}$ 介於 0 與 1 之間，根據「定理 5」，存在 $r\in[0,n]$ 使得 $\mathrm{Proj}_y\circ f_4(r)=\frac{1}{2}$。由於如前所述，$f_4(n)$ 是路徑 $f_4([0,1])$ 中最早與 x 軸相交的一點，因此從 p 到 $f_4(r)$ 的這段路徑必不與 x 軸相交。

現在把 f_4 上從 p 到 $f_4(r)$ 的這段路徑 (請注意 $f_4(r)$ 是 X_3 上有別於 p 的點，因為 $f_4(r)$ 和 p 各有不同的 y 坐標) 重寫成一條從 p 到 $f_4(r)$ 的路徑 $f_5:[0,1]\to X_3$ 使得 $f_5(0)=p$ 和 $f_5(1)=f_4(r)$ [6]，而且 $f_5([0,1])$ 與 x 軸不相交。但這正就是上面的情況 (i)，而根據上面的討論，必會產生矛盾，因此情況 (ii) 最終也必會導出矛盾。

至此證明了上述情況 (i) 和 (ii) 都會產生矛盾，這顯示我們最初的假設是不正確的，由此證明了 X_3 不是路徑連通的。綜合上述結果，可以作出如下結論：「連通性」與「路徑連通性」不是等價概念。

連結至數學專題
連結至周家發網頁

[4]根據實數的性質，任何有下界的非空實數集合都有「下確界」(即「最大下界」)。由於 $f_4([0,1])$ 與 x 軸相交，實數集合 ${f_4}^{-1}(\{(x,0):x\in[0,1]\})\neq\emptyset$。由於這個集合的成員是 $[0,1]$ 上被 f_4 映射到 x 軸上的實數，這個集合以 0 為下界。綜上所述，可知這個實數集合必有下確界。

[5]任何實數集合 S 的下確界 n 都是 S 的閉包點，此一事實可用反證法證明如下：設有某個包括 n 的開集 U 與 S 不相交，那麼 U 必然包含某個包括 n 的開區間 $(n-\epsilon,n+\epsilon)$，而且 $(n-\epsilon,n+\epsilon)$ 與 S 不相交。由此可知 $n+\epsilon$ 也是 S 的下界，但這麼一來，n 便不可能是 S 的下確界，與前述假設矛盾。由此證明了包括 n 的任何開集都必與 S 相交，因此 n 是 S 的閉包點。

[6]我們可以把 f_5 寫出如下：$f_5(x)=f_4(rx)$，根據這條公式，$f_5(0)=f_4(0)=p$ 並且 $f_5(1)=f_4(r)$，因此 f_5 確是從 p 到 $f_4(r)$ 的路徑。