數學示例:含任意函數的解

我們在《數學示例:方程與解》中指出「n 階常微分/差分方程」的通解一般帶有 n 個任意常數(arbitrary constant),而「n 階 m 元偏微分/差分方程」的通解則一般帶有 n 個 m-1 元任意函數(arbitrary function) 1 ,本文主旨是介紹求某些偏微分/差分方程通解的方法。

我們從1階2元偏微分方程說起,這類方程具有以下一般形式:

$$k_1(x_1, x_2)D_{x_1}f(x_1, x_2) + k_2(x_1, x_2)D_{x_2}f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) = 0$$
 (1)

其中 $k_1(x_1,x_2)$ 和 $k_2(x_1,x_2)$ 是不全為 0 的係數 (如果這兩者都等於 0, 那麼 (1) 不成其為微分方程), $g(x_1,x_2,f(x_1,x_2))$ 則是給定函數。從 (1) 可以得到以下<mark>附屬方程</mark>(subsidiary equation) (為免數式過於繁冗,以下略去函數 k_1 、…、 k_m 和 f 的論元 (x_1,\ldots,x_m) :

$$\frac{dx_1}{k_1} = \frac{dx_2}{k_2} = \frac{df}{-g(x_1, x_2, f)}$$
 (2)

上式採用傳統表示導數的方法,用 $\frac{d}{dx_1}$ 代表 $D_{x_1}f$ 等,並把這種表示法中的 df、 dx_1 等當作分子、分母處理,因此上式可被看成表示以下多個微分方程的簡潔方式:

$$D_{x_1}f = -\frac{g(x_1, x_2, f)}{k_1}, \quad D_{x_2}f = -\frac{g(x_1, x_2, f)}{k_2}$$

$$D_{x_2}x_1 = \frac{k_1}{k_2}, \quad D_{x_1}x_2 = \frac{k_2}{k_1}$$
(4)

為求解 (1),先要選擇保留一個論元 x_i 並消去另一個論元 x_j 。 為此,我們可以求解 (4) 中的一個常微分方程,這個方程的通解可寫成以下形式:

$$p(x_i, x_j) = c_1 \qquad (5)$$

[」]如果把常數看成 0 元函數,並把常微分/差分方程看成 1 元微分/差分方程,那麼可以把以上兩類方程的情況統一表述為:n 階 m 元微分/差分方程的通解一般帶有 n 個任意 m-1 元函數。

其中 $p(x_i, x_j)$ 代表 x_i 與 x_j 之間的函數關係式, c_1 代表任意常數。現在如從 (5) 解出 x_j 並將之代入 (3) 兩個方程中合適的一個,便可消去論元 x_j ,從而得到一個僅以 x_i 為論元的 1 階常微分方程,這個方程的通解具有以下形式:

$$f(x_i) = q(x_i, c_1, c_2)$$
 (6)

其中 q 代表函數關係式, c_2 則代表另一個任意常數。可以證明, (1) 的通解就是

$$f(x_1, x_2) = q(x_i, p(x_i, x_i), h(p(x_i, x_i)))$$
(7)

其中 h 代表任意 1 元函數關係。

舉例說,考慮以下偏微分方程:

$$xD_x f(x,y) + D_y f(x,y) + xe^y + f(x,y) = 0, \ x \in (0,\infty)$$
 (8)

上述方程的附屬方程為

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{1} = \frac{df}{-xe^y - f(x,y)}$$
 (9)

根據前面的討論, 設我們選擇保留論元 y 並消去 x, 為此求解以下方程:

$$D_y x = x \qquad (10)$$

上式是以y為自變項、x 為因變項的 1 階常係數齊次方程,運用《數學示例:基本解集》中的方法,可得到以下通解:

$$xe^{-y} = c_1 \qquad (11)$$

從上式解出 $x = c_1 e^y$ 並將之代入 $D_y f$,便可消去 x,從而得到以下僅以 y 為論元的 1 階常微分方程:

$$Df(y) = -c_1 e^{2y} - f(y)$$
 (12)

上式是1階常係數非齊次方程,運用《數學示例:待定係數法》中的方法,可求得

$$f(y) = c_2 e^{-y} - \frac{1}{3} c_1 e^{2y} \qquad (13)$$

由此根據 (7), 可得 (8) 的通解如下:

$$f(x,y) = -\frac{1}{3}xe^y + e^{-y}h(xe^{-y}) \qquad (14)$$

讀者請自行驗證,如在開始時選擇保留論元 x,便要先求解 $D_x y$,從而求得 $y - \ln x = c_1$ 。從此式解出 $y = \ln x + c_1$ 並將之代入 $D_x f$,便可消去 y,

從而得到一個僅以 x 為論元的 1 階常微分線性方程 $Df(x) = -e^{c_1}x - \frac{f(x)}{x}$ 。 運用《數學示例:積分/和分因子》中的方法,可求得這個方程的解為 $f(x) = -\frac{1}{3}e^{c_1}x^2 + \frac{c_2}{x}$ 。 由此根據 (7),可得 (8) 的另一個通解為 $f(x,y) = -\frac{1}{3}xe^y + \frac{h(y-\ln x)}{x}$ 2。

接下來我們朝兩個方向對以上介紹的偏微分方程作出推廣,第一個方向是推廣為1階 m 元偏微分方程,這種方程具有以下一般形式:

$$k_1 D_{x_1} f + \ldots + k_m D_{x_m} f + g(x_1, \ldots, x_m, f) = 0$$
 (15)

類似前面的情況,從 (15) 可以得到以下附屬方程:

$$\frac{dx_1}{k_1} = \dots = \frac{dx_m}{k_m} = \frac{df}{-g(x_1, \dots, x_m, f)}$$
 (16)

為求解 (15),先要選擇保留一個論元 x_i 並消去所有其他論元。為此,可以根據 (16) 求解 m-1 個以 x_i 作為自變項的常微分方程,這些方程的通解可寫成以下形式:

$$p_1 = c_1, \dots, p_{i-1} = c_{i-1}, p_{i+1} = c_{i+1}, \dots, p_m = c_m$$
 (17)

其中 p_j 代表 x_i 與 x_j 之間的函數關係式 (這裡不寫出其論元 (x_i, x_j)), c_j 代表任意常數。現在如從 (17) 的 m-1 個解中依次解出 x_1 、…、 x_{i-1} 、 x_{i+1} 、…、 x_m 並將之代入 (16) 中合適的方程,便可消去上述論元,從而得到一個僅以 x_i 為論元的 1 階常微分方程,這個方程的通解具有以下形式:

$$f(x_i) = q(x_i, c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_m, c_{m+1})$$
 (18)

其中 q 代表函數關係式, c_{m+1} 代表另一個任意常數。可以證明,(15) 的通解就是

$$f(x_1, \dots, x_m) = q(x_i, p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_m, h(p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_m))$$
(19)

其中 h 代表任意 m-1 元函數關係。

舉例說,考慮以下3元偏微分方程:

$$D_x f(x, y, z) - D_y f(x, y, z) + D_z f(x, y, z) - x - y - z = 0$$
 (20)

 $^{^{2}}$ 方程 (8) 的兩個通解只在 $e^{-y}h(xe^{-y})$ 和 $\frac{h(y-\ln x)}{x}$ 這兩個包含任意函數的項上有差異,但這兩項其實是相等的,因為它們可以表示成對方的形式,即 (i) $e^{-y}h(xe^{-y})$ 可以表示成 $\frac{h^*(y-\ln x)}{x}$,其中 $h^*(u) = e^{-u}h(e^{-u})$;(ii) $\frac{h(y-\ln x)}{x}$ 也可表示成 $e^{-y}h^*(xe^{-y})$,其中 $h^*(u) = \frac{h(\ln(u^{-1}))}{x}$ 。

上述方程的附屬方程為

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1} = \frac{dz}{1} = \frac{df}{x+y+z}$$
 (21)

設我們選擇保留論元 x 並消去 y 和 z, 為此依次求解以下方程:

$$D_x y = -1, \ D_x z = 1$$
 (22)

以上兩個方程的通解分別為

$$y + x = c_1, \ z - x = c_2$$
 (23)

容易從以上兩式解出 $y = -x + c_1$ 和 $z = x + c_2$ 並將之代入 $D_x f$,便可消去 y 和 z,從而得到以下僅以 x 為論元的 1 階常微分方程:

$$Df(x) = x + c_1 + c_2 (24)$$

容易求得上述方程的解如下:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + (c_1 + c_2)x + c_3 \qquad (25)$$

由此根據 (19), 可得 (20) 的通解如下:

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + x(y+z) + h(y+x,z-x)$$
 (26)

讀者請自行驗證,如在開始時選擇保留論元 y,可求得 (20) 的通解為 $f(x,y,z)=-\frac{3}{2}y^2-y(x+z)+h(x+y,z+y)$;如在開始時選擇保留論元 z,可求得 (20) 的通解為 $f(x,y,z)=\frac{1}{2}z^2+z(x+y)+h(x-z,y+z)$ 。

第二個方向是推廣為 n 階 2 元偏微分方程,以下只討論其中的常係數方程,這類方程具有以下一般形式:

$$(k_0I + k_1D_{x_1} + k_2D_{x_2} + k_{11}D_{x_1x_1} + \dots + k_{2\dots 2}D_{x_2\dots x_2})f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2) = 0$$
 (27)

其中 k_0 、…、 $k_{2...2}$ (包含 n 個 2) 是給定的常係數, $g(x_1, x_2)$ 則是給定的函數 (以下稱為「非齊次項」)。以下假設上式中的 n 階算子可以因式分解成

³方程 (20) 的三個通解是相等的,因為(i) $\frac{1}{2}x^2+x(y+z)+h(y+x,z-x)$ 可以表示成 $-\frac{3}{2}y^2-y(x+z)+h^*(x+y,z+y)$,其中 $h^*(u,v)=uv+\frac{1}{2}u^2+h(u,v-u)$;(ii) $-\frac{3}{2}y^2-y(x+z)+h(x+y,z+y)$ 也可以表示成 $\frac{1}{2}z^2+z(x+y)+h^*(x-z,y+z)$,其中 $h^*(u,v)=-uv-\frac{3}{2}v^2+h(u+v,v)$;(iii) $\frac{1}{2}z^2+z(x+y)+h(x-z,y+z)$ 則可以表示成 $\frac{1}{2}x^2+x(y+z)+h^*(y+x,z-x)$,其中 $h^*(u,v)=uv+\frac{1}{2}v^2+h(-v,u+v)$ 。

n 個因子之積 (某些因子可能重複出現),而每個因子所含算子 D 的階最高 為 1,從而把 (27) 改寫成

$$F_1 \times \ldots \times F_n f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2) = 0$$
 (28)

其中 F_1 、…、 F_n 代表上述因子。若 (28) 中的非齊次項等於 0 (以下把具有此一特點的方程稱為「齊次方程」),可用以下方法求解:就 (28) 中的每個 i ($1 \le i \le n$) 求解以下 1 階 2 元偏微分方程:

$$F_i f(x_1, x_2) = 0$$
 (29)

以得到前面 (7) 所示的通解。把這 n 個解加起來,就是 (28) 的通解。如果 (28) 有重複的因子,便得不到 n 個解。類似常微分方程的情況,我們可以 這樣做:設 $F_i{}^k$ 是重複的因子,其出現次數是 k,並設求解 (29) 後得到 (7) 所示的通解。可以證明,在此情況下,與 $F_i{}^k$ 相關的解是 (以下略去 f、p、 h_1 、…、 h_k 的論元):

$$f = q(x_i, p, h_1) + x_i q(x_i, p, h_2) + \ldots + x_i^{k-1} q(x_i, p, h_k)$$
 (30)

其中 x_i 是在求解 (29) 時選擇保留的論元, h_1 、…、 h_k 是任意函數, 並且這些任意函數異於 (28) 的其他解中的任意函數, 請注意上式相當於 k 個線性獨立解之和。如果 (28) 中有任何因子涉及虛數單位 i, 在求得 (28) 的通解後, 便要設法去掉 i, 或者對所得通解附加限制條件, 規定 (28) 的解須為實值函數。

舉例說,考慮以下2階齊次偏微分方程(以下方程等於《數學示例:方程與解》中的(3)):

$$(D_{xx} - 2D_{xy} + D_{yy})f(x,y) = 0 (31)$$

上式可以因式分解如下:

$$(D_x - D_y)^2 f(x, y) = 0 (32)$$

上式包含一個出現 2 次的因子 $D_x - D_y$ 。 先求解以下 1 階偏微分方程:

$$D_x f(x, y) - D_y f(x, y) = 0$$
 (33)

以下是 (33) 的附屬方程:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1} = \frac{df}{0} \qquad (34)$$

設我們選擇保留論元 y, 那麼從方程 $D_y x = -1$, 先解得 $x + y = c_1$ 。接著又從方程 Df(y) = 0, 可解得 $f(y) = c_2$ 。由此根據 (7), 可得 (33) 的通解為

$$f(x,y) = h(x+y) \qquad (35)$$

由於 (32) 沒有其他因子, 從 (30) 可直接得到 (31) 的通解如下:

$$f(x,y) = h_1(x+y) + yh_2(x+y)$$
 (36)

讀者請自行驗證,如在求解 (33) 時選擇保留論元 x,可求得 (31) 的另一通解為 $f(x,y) = h_1(x+y) + xh_2(x+y)^4$ 。

若 (28) 中的非齊次項不等於 0 (以下把具有此一特點的方程稱為「非齊次方程」),跟非齊次常微分方程相似,非齊次偏微分方程的通解也由兩部分相加而成,其中一部分是「補助解」(以下記作 $f_c(x_1,x_2)$),此即相關齊次方程的通解;另一部分則是「特解」(以下記作 $f_p(x_1,x_2)$)。為求 $f_p(x_1,x_2)$,可以使用「待定係數法」,其原理跟《數學示例:待定係數法》所介紹的相同,也是根據非齊次項的形式確定一個包含待定係數的 $f_p(x_1,x_2)$,並把 $f_p(x_1,x_2)$ 代入 (28),從而解出這些待定係數。不過,由於非齊次偏微分方程的情況較非齊次常微分方程複雜,我們沒有像上述網頁的「表 1」那樣的表,有時要透過反覆試驗來確定 $f_p(x_1,x_2)$ 的形式。

以下提供一個較簡單的例子:

$$(D_{xx} - 2D_{xy} + D_{yy})f(x,y) - 2 = 0 (37)$$

由於與上式相關的齊次方程是 (31), (37) 的補助解就是 (36), 以下只需求 (37) 的特解。這裡的非齊次項是 -2, 我們設定

$$f_p(x,y) = s_1 x^2 + s_2 xy + s_3 y^2 (38)$$

把 (38) 代入 (37) 中的 f(x,y), 可得到

$$2s_1 - 2s_2 + 2s_3 = 2$$

從上式可得到 $s_2 = s_1 + s_3 - 1$, 把上述結果代入 (38), 可得

$$f_p(x,y) = s_1 x^2 + (s_1 + s_3 - 1)xy + s_3 y^2$$

= $s_1 x(x+y) + s_3 y(x+y) - xy$
= $s_1 (x+y)^2 + (s_3 - s_1)y(x+y) - xy$

我們固然可以上式作為 (37) 的特解,但請注意上式中的 $s_1(x+y)^2 + (s_3 - s_1)y(x+y)$ 可被看成 (36) 中的 $h_1(x+y) + yh_2(x+y)$ 的一個實例 (這裡有 $h_1(z) = s_1z^2$ 和 $h_2(z) = (s_3 - s_1)z$),因此不妨把 (37) 的特解簡化為

$$f_p(x,y) = -xy \qquad (39)$$

 $^{^4}$ 方程 (31) 的兩個通解是相等的,因為 (i) $h_1(x+y)+yh_2(x+y)$ 可以表示成 $h_1^*(x+y)+xh_2^*(x+y)$,其中 $h_1^*(u)=h_1(u)+uh_2(u)$ 和 $h_2^*(u)=-h_2(u)$; (ii) $h_1(x+y)+xh_2(x+y)$ 也可以表示成 $h_1^*(x+y)+yh_2^*(x+y)$,其中 $h_1^*(u)=h_1(u)+uh_2(u)$ 和 $h_2^*(u)=-h_2(u)$ 。

把 (37) 的補助解 (即 (36)) 和特解 (即 (39)) 相加, 便可得到 (37) 的通解如下:

$$f(x,y) = h_1(x+y) + yh_2(x+y) - xy (40)$$

接著考慮 2 元偏差分方程,我們在這裡只集中討論至少有一個論元的階為 1 的方程,這類方程可寫成以下一般形式:

$$k_1(x_1, x_2)(E_{x_1})^{n_1} f(x_1, x_2) + k_2(x_1, x_2)(E_{x_2})^{n_2} f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) = 0$$
 (41)

在上式中, $k_1(x_1,x_2)$ 和 $k_2(x_1,x_2)$ 是不全為 0 的係數, $g(x_1,x_2,f(x_1,x_2))$ 是 給定的函數。 n_1 和 n_2 則是非負整數,其中至少有一個等於 1。上述方程一般不易求解,但如果在 (41) 中, $n_i=1$, $E_{x_i}f(x_1,x_2)$ 的係數 $k_i(x_1,x_2)$ 只依賴於論元 x_i (因而可以簡記作 $k_i(x_i)$);而另一個係數 $k_j(x_1,x_2)$ 是常數 (因而可以簡記作 k_j);並且函數 g 只依賴於 x_i 和 $f(x_i)$ (因而可以簡記作 $g(x_i,f(x_i))$,則在此情況下,可以選擇保留論元 x_i ,並把算子 $k_j(E_{x_j})^{n_j}$ 當作常數處理,這等於把上述方程改寫成以下僅包含一個論元 x_i 的 1 階常差分方程:

$$k_i(x_i)E_{x_i}f(x_i) + c_1f(x_i) + g(x_i, f(x_i)) = 0$$
 (42)

其中

$$c_1 = k_j (E_{x_i})^{n_j}$$

是常數。假設求得上述方程的通解如下:

$$f(x_i) = q(x_i, c_1, c_2)$$
 (43)

其中 q 代表函數關係式, c_2 則代表任意常數。可以證明, 在上述情況下 (42) 的通解就是

$$f(x_1, x_2) = q(x_i, k_i(E_{x_i})^{n_i}, h(x_i))$$
 (44)

其中 h 代表任意函數關係。在上述通解中, $k_j(E_{x_j})^{n_j}$ 應被理解成作用於函數的算子。在進行上述函數作用時,有時要應用「二項式定理」(binomial theorem) 5 。

舉例說,考慮以下偏差分方程:

$$xE_{xy}f(x,y) - 4E_{yyy}f(x,y) = 0, \quad x \in \mathbb{N}$$
 (45)

$$(x+y)^k = \sum_{n=0}^k C(k,n)x^{k-n}y^n$$

^{5「}二項式定理」是說, 若 k 是非負整數, 則

在上述方程中, 論元 x 和 y 的階分別為 1 和 2。為方便以下的計算, 首先把上式改寫成 (42) 的形式如下 (其方法是代入 y+1=z, 然後又代入 z=y):

$$xE_x f(x,y) - 4(E_y)^2 f(x,y) = 0, x \in \mathbb{N}$$
 (46)

在上式中, $E_x f(x,y)$ 的係數只依賴於 x,而另一個係數則是常數,所以我們選擇保留論元 x,並設定 $c_1 = -4(E_y)^2$,這等於把上式改寫成以下僅以 x 為論元的 1 階常差分方程:

$$xE_x f(x) + c_1 f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{N}$$
 (47)

請注意上式具有 (42) 的形式。運用《數學示例:積分/和分因子》中的方法,可求得

$$f(x) = \frac{(-c_1)^{x-1}c_2}{(x-1)!}$$
 (48)

由此根據 (44), 可得 (46) 的通解如下:

$$f(x,y) = \frac{(4(E_y)^2)^{x-1}h(y)}{(x-1)!}$$

$$= \frac{4^{x-1}}{(x-1)!}E_y^{2x-2}h(y)$$

$$= \frac{4^{x-1}}{(x-1)!}h(2x+y-2) \qquad (49)$$

接下來朝兩個方向對以上介紹的偏差分方程作出推廣,第一個方向是推廣 為至少有一個論元的階為 1 的 m 元偏差分方程,這種方程可寫成以下一般 形式:

$$k_1(E_{x_1})^{n_1}f + \dots + k_m(E_{x_m})^{n_m}f + g(x_1, \dots, x_m, f) = 0$$
 (50)

在 n_1 、…、 n_m 中,至少有一個等於 1。類似前面的情況,上述方程一般不易求解,但如果在 (50) 中, $n_i=1$, $E_{x_i}f$ 的係數 k_i 只依賴於論元 x_i (因而可以簡記作 $k_i(x_i)$);而所有其他係數都是常數 (因而可以簡記作 k_1 、…、 k_{i-1} 、 k_{i+1} 、…、 k_m);並且函數 g 只依賴於 x_i 和 $f(x_i)$ (因而可以簡記作 $g(x_i, f(x_i))$,則在此情況下,可以選擇保留論元 x_i ,並把算子 $k_j(E_{x_j})^{n_j}$ (其中 $j \neq i$)當作常數處理,這等於把上述方程改寫成以下僅包含一個變項 x_i 的 1 階常差分方程:

$$k_i(x_i)E_{x_i}f(x_i) + c_1f(x_i) + g(x_i, f(x_i)) = 0$$
 (51)

其中

$$c_1 = \sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{m} k_j (E_{x_j})^{n_j} \qquad (52)$$

是常數。假設求得以上方程的通解如下:

$$f(x_i) = q(x_i, c_1, c_2)$$
 (53)

其中 q 代表函數關係式, c_2 則代表任意常數。可以證明, 在上述情況下 (50) 的通解就是

$$f(x_1, \dots, x_m) = q \left(x_i, \sum_{\substack{j=0\\j \neq i}}^m k_j (E_{x_j})^{n_j}, h(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m) \right)$$
(54)

其中 h 代表任意 m-1 元函數關係。

舉例說,考慮以下3元偏差分方程(以下方程等於《數學示例:方程與解》中的(7)):

$$E_x f(x, y, z) - E_y f(x, y, z) - E_z f(x, y, z) = 0$$
 (55)

在上述方程中,所有論元的階都是 1,而所有係數都是常數,所以可以保留任何一個論元。假設我們選擇保留 x,並設定 $c_1 = -E_y - E_z$,這等於把上式改寫成以下僅以 x 為論元的 1 階常差分方程:

$$E_x f(x) + c_1 f(x) = 0$$
 (56)

請注意上式具有 (51) 的形式。解上述方程,可得

$$f(x) = (-c_1)^x c_2 (57)$$

由此根據 (54), 可得 (55) 的通解如下:

$$f(x,y,z) = (E_y + E_z)^x h(y,z)$$

$$= \sum_{n=0}^x C(x,n) (E_y^{x-n} E_z^n) h(y,z)$$

$$= \sum_{n=0}^x C(x,n) h(x+y-n,z+n)$$
 (58)

讀者請自行驗證,如在開始時選擇保留論元 y,可求得 (55) 的通解為 $f(x,y,z) = \sum_{n=0}^{y} (-1)^{n} C(y,n) h(x+y-n,z+n)$;如在開始時選擇保留論元 z,可求得 (55) 的通解為 $f(x,y,z) = \sum_{n=0}^{z} (-1)^{n} C(z,n) h(x+z-n,y+n)$ 。

第二個方向是推廣為 n 階 2 元偏差分方程,以下只討論其中的常係數方程,這類方程具有以下一般形式:

$$(k_0I + k_1E_{x_1} + k_2E_{x_2} + k_{11}E_{x_1x_1} + \dots + k_{2\dots 2}E_{x_2\dots x_2})f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2) = 0$$
 (59)

其中 k_0 、…、 $k_{2...2}$ 是給定的常係數, $g(x_1,x_2)$ 則是給定的函數 (即非齊次項)。以下假設上式中的 n 階算子可以因式分解成 n 個因子之積 (某些因子可能重複出現),而每個因子至少有一個論元的階為 1,從而把 (59) 改寫成

$$G_1 \times \ldots \times G_n f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2) = 0$$
 (60)

其中 G_1 、…、 G_n 代表上述因子。若 (60) 中的非齊次項等於 0 (以下把具有此一特點的方程稱為「齊次方程」),可用以下方法求解:就 (60) 中的每個 i (1 < i < n) 求解以下至少有一個論元的階為 1 的 2 元偏差分方程:

$$G_i f(x_1, x_2) = 0$$
 (61)

以得到前面 (44) 所示的通解。把這 n 個解加起來,就是 (60) 的通解。如果 (60) 有重複的因子 G_i^k ,其出現次數是 k,並設求解 (61) 後得到 (44) 所示的通解,在此情況下,與 G_i^k 相關的解是 (以下略去 f、 h_1 、…、 h_k 的論元):

$$f = q(x_i, k_j(E_{x_i})^{n_j}, h_1) + x_i q(x_i, k_j(E_{x_i})^{n_j}, h_2) + \dots + x_i^{k-1} q(x_i, k_j(E_{x_i})^{n_j}, h_k)$$
(62)

其中 x_i 是在求解 (61) 時選擇保留的論元, h_1 、…、 h_k 是任意函數, 並且這些任意函數異於 (60) 的其他解中的任意函數。請注意上式相當於 k 個線性獨立解之和。如果 (60) 中有任何因子涉及虛數單位 i, 在求得 (60) 的通解後, 便要設法去掉 i, 或者對所得通解附加限制條件, 規定 (60) 的解須為實值函數。

舉例說. 考慮以下 2 階齊次偏差分方程:

$$((E_x)^2 + 4(E_y)^6)f(x,y) = 0 (63)$$

上式中的算子可以因式分解如下:

$$(E_x - 2i(E_y)^3)((E_x + 2i(E_y)^3)f(x,y) = 0 (64)$$

為求解 (63), 先逐一求解以下至少有一個論元的階為 1 的偏差分方程:

$$E_x f(x, y) - 2i(E_y)^3 f(x, y) = 0 (65)$$

$$E_x f(x,y) + 2i(E_y)^3 f(x,y) = 0$$
 (66)

在 (65) 中,論元 x 的階是 1,而兩個係數都是常數,所以我們選擇保留論元 x,並設定 $c_1 = -2i(E_y)^3$,這等於把 (65) 改寫成以下僅以 x 為論元的 1 階常差分方程:

$$E_x f(x) + c_1 f(x) = 0,$$
 (67)

上式是常係數常差分方程,運用《數學示例:基本解集》中的方法,可得 到以下通解:

$$f(x) = (-c_1)^x c_2 (68)$$

由此根據 (44), 可得 (65) 的通解如下:

$$f(x,y) = (2i(E_y)^3)^x h_1(y)$$

= $(2i)^x h_1(3x+y)$ (69)

用上述方法, 也可求得 (66) 的通解如下:

$$f(x,y) = (-2i)^x h_2(3x+y)$$
 (70)

把 (69) 和 (70) 相加, 便得到 (63) 的通解如下:

$$f(x,y) = (2i)^x h_1(3x+y) + (-2i)^x h_2(3x+y)$$
 (71)

可是,上式包含虚數單位 i, 要設法去掉它。為此, 先把 $\pm 2i$ 改寫成 $2(\cos \frac{\pi}{2} \pm i \sin \frac{\pi}{2})$,由此根據「棣美弗定理」(de Moivre's Theorem)⁶,可以把 (71) 改 寫成下式:

$$f(x,y) = 2^{x} \left(\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) h_{1}(3x+y)$$

$$+2^{x} \left(\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) h_{2}(3x+y)$$
 (72)

由於 $h_1(3x+y)$ 和 $h_2(3x+y)$ 是任意函數, $h_3(3x+y) = \frac{1}{2}h_1(3x+y) - \frac{i}{2}h_2(3x+y)$ 和 $h_4(3x+y) = \frac{1}{2}h_1(3x+y) + \frac{i}{2}h_2(3x+y)$ 也是任意函數, 因此用 h_3 和 h_4 分別代替 (72) 中的 h_1 和 h_2 ,得到的以下結果必然也是 (63)的通解:

$$f(x,y) = 2^{x} \left(\cos \left(\frac{\pi x}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi x}{2} \right) \right) \left(\frac{1}{2} h_{1}(3x+y) - \frac{i}{2} h_{2}(3x+y) \right)$$

$$+ 2^{x} \left(\cos \left(\frac{\pi x}{2} \right) - i \sin \left(\frac{\pi x}{2} \right) \right) \left(\frac{1}{2} h_{1}(3x+y) + \frac{i}{2} h_{2}(3x+y) \right)$$

$$= 2^{x} \cos \left(\frac{\pi x}{2} \right) h_{1}(3x+y) + 2^{x} \sin \left(\frac{\pi x}{2} \right) h_{2}(3x+y)$$
 (73)

因此我們使用 (73) 作為 (63) 的通解,請注意這個通解不含虛數單位 i。

若 (60) 中的非齊次項不等於 0 (以下把具有此一特點的方程稱為「非齊次方程」),則有關方程的通解也由「補助解」(以下記作 $f_c(x_1,x_2)$) 和「特

⁶該定理是說,若 x 是整數,則 $(r(\cos\theta \pm i\sin\theta))^x = r^x(\cos(\theta x) \pm i\sin(\theta x))$ 。

解」(以下記作 $f_p(x_1, x_2)$) 相加而成。為求 $f_p(x_1, x_2)$,同樣可以使用「待定係數法」,以下提供一個較簡單的例子:

$$((E_x)^2 + 4(E_y)^6)f(x,y) - 5x - 10y = 0 (74)$$

由於與上式相關的齊次方程是 (63), (74) 的補助解就是 (73), 以下只需求 (74) 的特解。這裡的非齊次項是 -5x - 10y, 因此可以設定

$$f_p(x,y) = s_1 x + s_2 y + s_3 \qquad (75)$$

把 (75) 代入 (74) 中的 f(x,y), 可得到

$$s_1x + 2s_1 + s_2y + s_3 + 4s_1x + 4s_2y + 24s_2 + 4s_3 - 5x - 10y = 0$$

從上式可得到以下方程組:

$$\begin{cases} 5s_1 = 5 \\ 5s_2 = 10 \\ 2s_1 + 24s_2 + 5s_3 = 0 \end{cases}$$

解上述方程組, 得 $s_1 = 1, s_2 = 2, s_3 = -10$, 把上述結果代入 (75), 可得

$$f_p(x,y) = x + 2y - 10$$
 (76)

把 (74) 的補助解 (即 (73)) 和特解 (即 (76)) 相加, 便可得到 (74) 的通解如下:

$$f(x,y) = 2^x \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) h_1(3x+y) + 2^x \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) h_2(3x+y) + x + 2y - 10$$
 (77)

連結至數學專題連結至周家發網頁