

數學示例：阿多米安多項式

我們在《數學示例：阿多米安分解法》中介紹了用「阿多米安分解法」求解線性微分／積分／差分／和分方程(組)的基本概念。如要求解非線性方程, 必須引入新的工具—「阿多米安多項式」, 本文主旨是介紹這種新工具。

根據上述網頁, 「阿多米安分解法」的基本原理是先把給定的方程改寫成以下形式(下式等於上述網頁的(1)):

$$f = \Psi(f) \quad (1)$$

並假設未知函數 f 具有以下無窮級數的形式(下式等於上述網頁的(2)):

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \dots \quad (2)$$

接著把(2)代入(1), 從而推導出各個 f_n 之間的遞推關係, 並利用此一遞推關係求得各個 f_n 。把這些 f_n 代入(2), 便最終得到原方程的解。

在上述網頁中, 我們規定 Ψ 必須是線性算子。現在我們放寬規定, 容許 Ψ 內包含某個非線性算子 Φ 並且 f 處於 Φ 的作用之下, 我們把這個關係寫成 $\Psi(\Phi(f))$ 的形式。在此情況下, 僅把 $\Psi(\Phi(f))$ 改寫成 $\Psi(\Phi(f_0 + f_1 + f_2 + \dots))$ 不能推導出 f_n 之間的遞推關係, 因為 $\Psi(\Phi(f_0 + f_1 + f_2 + \dots)) \neq \Psi(\Phi(f_0)) + \Psi(\Phi(f_1)) + \Psi(\Phi(f_2)) + \dots$ 。不過, 我們可以利用有關各種初等函數的運算技巧以及非線性函數的泰勒級數把 $\Phi(f_0 + f_1 + f_2 + \dots)$ 展開成下式:

$$\Phi(f) = F_0 + F_1 + F_2 + \dots \quad (3)$$

在上式中, F_i ($i \geq 0$) 稱為**阿多米安多項式**(Adomian polynomial), 其中 F_0 必須等於 $\Phi(f_0)$, 而其餘每個 F_i 中的每一項在撇除係數後都是包含 f_{i_1} 、...、 f_{i_k} 的項的乘積, 使得 $i_1 + \dots + i_k = i$ 。

舉例說, 考慮最簡單的非線性函數 $\Phi(f) = f^2$ 。取(2)的2次幂, 可得

$$\begin{aligned} f^2 &= (f_0 + f_1 + f_2 + \dots)^2 \\ &= f_0^2 + 2f_0f_1 + 2f_0f_2 + f_1^2 + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

在以上展開式中， f_0^2 正好等於 $\Phi(f_0)$ ，因此 $F_0 = f_0^2$ ； $2f_0f_1$ 在撇除係數 2 後是 f_0 與 f_1 的乘積並且 $0 + 1 = 1$ ，因此 $2f_0f_1$ 是 F_1 的項 (而且是 F_1 的唯一的項)，如此類推。以上結果可以表示成

$$\begin{aligned} f^2 &= F_0 + F_1 + F_2 + \dots, \text{ 其中} \\ F_0 &= f_0^2, \\ F_1 &= 2f_0f_1, \\ F_2 &= 2f_0f_2 + f_1^2, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5)$$

接著考慮非線性函數 $\Phi(f) = e^f$ 。為確保 $F_0 = \Phi(f_0) = e^{f_0}$ ，可以先把 $e^f = e^{(f_0+f_1+f_2+\dots)}$ 分拆成 $e^{f_0} \times e^{(f_1+f_2+\dots)}$ ，然後利用指數函數的泰勒級數展開式 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ ，進行以下計算：

$$\begin{aligned} e^f &= e^{f_0} \times e^{(f_1+f_2+\dots)} \\ &= e^{f_0} \times \left(1 + (f_1 + f_2 + \dots) + \frac{(f_1 + f_2 + \dots)^2}{2!} + \dots \right) \\ &= e^{f_0} + f_1 e^{f_0} + \left(f_2 + \frac{1}{2!} f_1^2 \right) e^{f_0} + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

以上結果可以表示成

$$\begin{aligned} e^f &= F_0 + F_1 + F_2 + \dots, \text{ 其中} \\ F_0 &= e^{f_0}, \\ F_1 &= f_1 e^{f_0}, \\ F_2 &= \left(f_2 + \frac{1}{2!} f_1^2 \right) e^{f_0}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (7)$$

利用「阿多米安多項式」，可以求解多種非線性方程。舉例說，考慮以下非線性沃爾泰拉積分方程：

$$f(x) - \int_{t=0}^{t=x} (f(t))^2 - x = 0 \quad (8)$$

容易把上式寫成 (1) 的形式，然後代入 (2) 和 (3)，從而得到下式：

$$f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots = x + \int_{t=0}^{t=x} (F_0(t) + F_1(t) + F_2(t) + \dots) \quad (9)$$

從上式可得到以下遞推關係：

$$\begin{cases} f_0(x) = x \\ f_n(x) = \int_{t=0}^{t=x} F_{n-1}(t), \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (10)$$

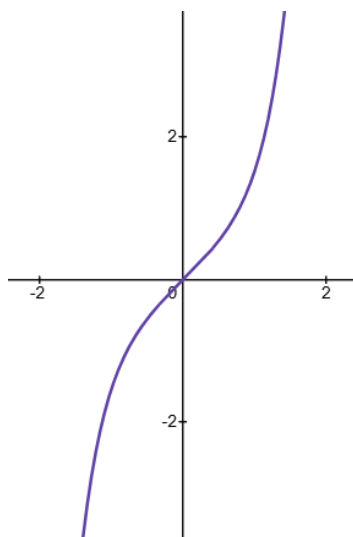
利用上述遞推關係以及 (5)，可以依次求得 $f_0(x)$ 、 $f_1(x)$ 、... 如下：

$$\begin{aligned}
 f_0(x) &= x \\
 f_1(x) &= \int_{t=0}^{t=x} (f_0(t))^2 = \int_{t=0}^{t=x} t^2 = \frac{1}{3}x^3 \\
 f_2(x) &= \int_{t=0}^{t=x} 2f_0(t)f_1(t) = \int_{t=0}^{t=x} \frac{2}{3}t^4 = \frac{2}{15}x^5 \\
 f_3(x) &= \int_{t=0}^{t=x} (2f_0(t)f_2(t) + (f_1(t))^2) = \int_{t=0}^{t=x} \frac{17}{45}t^6 = \frac{17}{315}x^7 \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{11}$$

由此根據 (2)，可知 (8) 的解是

$$f(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots \tag{12}$$

從上式似乎難以推斷 $f(x)$ 代表哪個初等函數，但我們可以繪出上式右端首四項的圖象如下：



上述圖象看似函數 $\tan x$ 在區間 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 之間的圖象，事實上，(12) 的確包含著 $\tan x$ 的泰勒級數展開式的首四項，而讀者可自行驗證，以下函數確是 (8) 的解：

$$f(x) = \tan x \tag{13}$$

接著考慮以下非線性常微分方程初值問題：

$$Df(x) - e^{f(x)} = 0, \quad f(0) = 1 \tag{14}$$

沿用《數學示例：阿多米安分解法》中的方法，先把上式中的方程寫成以下形式：

$$Df(x) = e^{f(x)} \tag{15}$$

接著用積分算子 $\int_0^x$ 抵消上式左端的算子 D ，把這個算子作用於上式左端，並運用「微積分基本定理」，可得到：

$$\begin{aligned}\int_0^x Df(x) &= [f(t)]_{t=0}^{t=x} \\ &= f(x) - f(0)\end{aligned}\quad (16)$$

由此可知把 $\int_0^x$ 作用於 (15) 兩端的結果是

$$f(x) = 1 + \int_0^x e^{f(x)} \quad (17)$$

接著把 (2) 和 (3) 代入上式，從而得到下式：

$$f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots = 1 + \int_0^x (F_0(x) + F_1(x) + F_2(x) + \dots) \quad (18)$$

從上式可得到以下遞推關係：

$$\begin{cases} f_0(x) = 1 \\ f_n(x) = \int_0^x F_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (19)$$

利用上述遞推關係以及 (7)，可以依次求得 $f_0(x)$ 、 $f_1(x)$ 、... 如下：

$$\begin{aligned}f_0(x) &= 1 \\ f_1(x) &= \int_0^x e^{f_0(x)} = \int_0^x e = ex \\ f_2(x) &= \int_0^x f_1(x) e^{f_0(x)} = \int_0^x e^2 x = \frac{1}{2} e^2 x^2 \\ f_3(x) &= \int_0^x (f_2(x) + \frac{1}{2}(f_1(x))^2) e^{f_0(x)} = \int_0^x e^3 x^2 = \frac{1}{3} e^3 x^3 \\ &\vdots\end{aligned}\quad (20)$$

由此根據 (2)，可知 (14) 的解是

$$\begin{aligned}f(x) &= 1 + ex + \frac{1}{2}(ex)^2 + \frac{1}{3}(ex)^3 + \dots \\ &= 1 - \ln(1 - ex)\end{aligned}\quad (21)$$

阿多米安多項式也能用來求解非線性方程組，但由於方程組涉及多於一個未知函數，在運用上述方法時，可能要考慮多個阿多米安多項式。舉例說。考慮以下包含兩個未知 1 元函數的非線性弗雷德霍姆積分方程組：

$$\begin{cases} f(x) - \int_0^{t=\pi} ((1+xt)(f(t))^2 + (1-xt)(g(t))^2) - \sin x + \pi = 0 \\ g(x) - \int_{t=0}^{t=\pi} ((1-xt)(f(t))^2 - (1+xt)(g(t))^2) - \cos x - \frac{\pi^2}{2}x = 0 \end{cases} \quad (22)$$

為求解上述方程組，先把上式中的兩個方程都寫成 (1) 的形式，並把上式所包含兩個未知函數 $f(x)$ 和 $g(x)$ 以及它們的非線性函數 $(f(x))^2$ 和 $(g(x))^2$

改寫成適當的無窮級數形式。對於 $f(x)$ 和 $(f(x))^2$ ，可以沿用前面的 (2) 和 (5)；至於 $g(x)$ 和 $(g(x))^2$ ，則只需把 (2) 和 (5) 作適當調整，從而得到

$$g = g_0 + g_1 + g_2 + \dots \quad (23)$$

以及

$$\begin{aligned} g^2 &= G_0 + G_1 + G_2 + \dots, \text{ 其中} \\ G_0 &= g_0^2, \\ G_1 &= 2g_0g_1, \\ G_2 &= 2g_0g_2 + g_1^2, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (24)$$

經上述改寫後，可得到以下方程組：

$$\begin{cases} f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots \\ = \sin x - \pi + \int_{t=0}^{t=\pi} ((1+xt)(F_0(t) + F_1(t) + F_2(t) + \dots) \\ + (1-xt)(G_0(t) + G_1(t) + G_2(t) + \dots)) \\ g_0(x) + g_1(x) + g_2(x) + \dots \\ = \cos x + \frac{\pi^2}{2}x + \int_{t=0}^{t=\pi} ((1-xt)(F_0(t) + F_1(t) + F_2(t) + \dots) \\ - (1+xt)(G_0(t) + G_1(t) + G_2(t) + \dots)) \end{cases} \quad (25)$$

接著使用「修訂阿多米安分解法」，根據上式設定以下遞推關係：

$$\begin{cases} f_0(x) = \sin x \\ g_0(x) = \cos x \\ f_1(x) = -\pi + \int_{t=0}^{t=\pi} ((1+xt)F_0(t) + (1-xt)G_0(t)) \\ g_1(x) = \frac{\pi^2}{2}x + \int_{t=0}^{t=\pi} ((1-xt)F_0(t) - (1+xt)G_0(t)) \\ f_n(x) = \int_{t=0}^{t=\pi} ((1+xt)F_{n-1}(t) + (1-xt)G_{n-1}(t)), \quad n \geq 2 \\ g_n(x) = \int_{t=0}^{t=\pi} ((1-xt)F_{n-1}(t) - (1+xt)G_{n-1}(t)), \quad n \geq 2 \end{cases} \quad (26)$$

利用上述遞推關係以及 (5) 和 (24)，可以依次求得 $f_0(x)$ 、 $g_0(x)$ 、 $f_1(x)$ 、 $g_1(x)$ 、... 如下：

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \sin x \\ g_0(x) &= \cos x \\ f_1(x) &= -\pi + \int_{t=0}^{t=\pi} ((1+xt)(f_0(t))^2 + (1-xt)(g_0(t))^2) \\ &= -\pi + \int_{t=0}^{t=\pi} (1+xt)\sin^2 t + (1-xt)\cos^2 t = 0 \\ g_1(x) &= \frac{\pi^2}{2}x + \int_{t=0}^{t=\pi} ((1-xt)(f_0(t))^2 - (1+xt)(g_0(t))^2) \\ &= \frac{\pi^2}{2}x + \int_{t=0}^{t=\pi} ((1-xt)\sin^2 t - (1+xt)\cos^2 t) = 0 \\ f_2(x) &= \int_{t=0}^{t=\pi} ((1+xt)(2f_0(t)f_1(t)) + (1-xt)(2g_0(t)g_1(t))) \\ &= \int_{t=0}^{t=\pi} ((1+xt)(2 \times \sin t \times 0) + (1-xt)(2 \times \cos t \times 0)) = 0 \\ g_2(x) &= \int_{t=0}^{t=\pi} ((1-xt)(2f_0(t)f_1(t)) - (1+xt)(2g_0(t)g_1(t))) \\ &= \int_{t=0}^{t=\pi} ((1-xt)(2 \times \sin t \times 0) - (1+xt)(2 \times \cos t \times 0)) = 0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (27)$$

從以上結果容易看到對 $n \geq 1$, 必有 $f_n(x) = g_n(x) = 0$, 由此根據 (2) 和 (23), 可知 (22) 的解是

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x \quad (28)$$

上例中的兩個非線性函數 $(f(x))^2$ 和 $(g(x))^2$ 各只包含一個未知函數, 在某些情況下, 非線性函數可以包含多個未知函數。考慮非線性函數 $\Phi(f, g) = g \times Df$, 這個函數是未知函數 f 的導數與另一未知函數 g 的乘積。為寫出這個非線性函數的阿多米安多項式, 我們假設 f 和 g 分別具有 (2) 和 (23) 的形式。另外, 根據算子 D 的線性性質, 我們有

$$Df = Df_0 + Df_1 + Df_2 + \dots \quad (29)$$

把 (23) 與 (29) 相乘, 可得

$$\begin{aligned} g \times Df &= (g_0 + g_1 + g_2 + \dots) \times (Df_0 + Df_1 + Df_2 + \dots) \\ &= g_0 Df_0 + g_0 Df_1 + g_1 Df_0 + g_0 Df_2 + g_1 Df_1 + g_2 Df_0 + \dots \end{aligned} \quad (30)$$

以上結果可以表示成

$$\begin{aligned} g \times Df &= P_0 + P_1 + P_2 + \dots, \text{ 其中} \\ P_0 &= g_0 Df_0, \\ P_1 &= g_0 Df_1 + g_1 Df_0, \\ P_2 &= g_0 Df_2 + g_1 Df_1 + g_2 Df_0, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (31)$$

把上式中的 g 和 f 對調, 便可求得非線性函數 $f \times Dg$ 的阿多米安多項式如下:

$$\begin{aligned} f \times Dg &= Q_0 + Q_1 + Q_2 + \dots, \text{ 其中} \\ Q_0 &= f_0 Dg_0, \\ Q_1 &= f_0 Dg_1 + f_1 Dg_0, \\ Q_2 &= f_0 Dg_2 + f_1 Dg_1 + f_2 Dg_0, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (32)$$

接下來考慮以下包含兩個未知 2 元函數的非線性偏微分方程組初值問題:

$$\begin{cases} D_y f(x, y) + g(x, y) D_x f(x, y) + f(x, y) - 1 = 0 \\ D_y g(x, y) - f(x, y) D_x g(x, y) - g(x, y) - 1 = 0 \end{cases}, \quad f(x, 0) = e^x, g(x, 0) = e^{-x} \quad (33)$$

由於上述方程組提供了關於變項 y 的初始條件, 所以以下先把上面兩個方程寫成以下形式:

$$\begin{cases} D_y f(x, y) = 1 - f(x, y) - g(x, y) D_x f(x, y) \\ D_y g(x, y) = 1 + g(x, y) + f(x, y) D_x g(x, y) \end{cases} \quad (34)$$

接著用 $\int_0^y$ 抵消上面兩個方程中的 D_y 。根據《數學示例：阿多米安分解法》中的 (32)，我們有 $\int_0^y D_y f(x, y) = f(x, y) - f(x, 0)$ 和 $\int_0^y D_y g(x, y) = g(x, y) - g(x, 0)$ 。我們還要把上式所包含兩個未知函數 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 以及非線性函數 $g(x, y)D_x f(x, y)$ 和 $f(x, y)D_x g(x, y)$ 改寫成適當的無窮級數形式。對於 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ ，可以分別沿用前面的 (2) 和 (23)；至於 $g(x, y)D_x f(x, y)$ 和 $f(x, y)D_x g(x, y)$ ，則可分別使用 (31) 和 (32)(但要把其中的導數算子 D 改為偏導數算子 D_x)。此外，還要計算 $\int_0^y 1 = y$ 。總上所述，把 $\int_0^y$ 作用於上式中的兩個方程並進行上述改寫，可得到以下方程組：

$$\begin{cases} f_0(x, y) + f_1(x, y) + f_2(x, y) + \dots \\ = e^x + y - \int_0^y (f_0(x, y) + f_1(x, y) + f_2(x, y) + \dots) \\ \quad - \int_0^y (P_0(x, y) + P_1(x, y) + P_2(x, y) + \dots) \\ g_0(x, y) + g_1(x, y) + g_2(x, y) + \dots \\ = e^{-x} + y + \int_0^y (g_0(x, y) + g_1(x, y) + g_2(x, y) + \dots) \\ \quad + \int_0^y (Q_0(x, y) + Q_1(x, y) + Q_2(x, y) + \dots) \end{cases} \quad (35)$$

接著使用「修訂阿多米安分解法」，根據上式設定以下遞推關係：

$$\begin{cases} f_0(x, y) = e^x \\ g_0(x, y) = e^{-x} \\ f_1(x, y) = y - \int_0^y (f_0(x, y) + P_0(x, y)) \\ g_1(x, y) = y + \int_0^y (g_0(x, y) + Q_0(x, y)) \\ f_n(x, y) = -\int_0^y (f_{n-1}(x, y) + P_{n-1}(x, y)) \\ g_n(x, y) = \int_0^y (g_{n-1}(x, y) + Q_{n-1}(x, y)), \quad n \geq 2 \end{cases} \quad (36)$$

利用上述遞推關係以及 (31) 和 (32)，可以依次求得 $f_0(x, y)$ 、 $g_0(x, y)$ 、 $f_1(x, y)$ 、 $g_1(x, y)$ 、... 如下：

$$\begin{aligned} f_0(x, y) &= e^x \\ g_0(x, y) &= e^{-x} \\ f_1(x, y) &= y - \int_0^y (f_0(x, y) + g_0(x, y)D_x f_0(x, y)) = y - \int_0^y (e^x + 1) = -ye^x \\ g_1(x, y) &= y + \int_0^y (g_0(x, y) + f_0(x, y)D_x g_0(x, y)) = y + \int_0^y (e^{-x} - 1) = ye^{-x} \\ f_2(x, y) &= -\int_0^y (f_1(x, y) + g_0(x, y)D_x f_1(x, y) + g_1(x, y)D_x f_0(x, y)) \\ &= -\int_0^y -ye^x = \frac{1}{2!}y^2e^x \\ g_2(x, y) &= \int_0^y (g_1(x, y) + f_0(x, y)D_x g_1(x, y) + f_1(x, y)D_x g_0(x, y)) \\ &= \int_0^y ye^{-x} = \frac{1}{2!}y^2e^{-x} \\ f_3(x, y) &= -\int_0^y (f_2(x, y) + g_0(x, y)D_x f_2(x, y) + g_1(x, y)D_x f_1(x, y) \\ &\quad + g_2(x, y)D_x f_0(x, y)) = -\int_0^y \frac{1}{2!}y^2e^x = -\frac{1}{3!}y^3e^x \\ g_3(x, y) &= \int_0^y (g_2(x, y) + f_0(x, y)D_x g_2(x, y) + f_1(x, y)D_x g_1(x, y) \\ &\quad + f_2(x, y)D_x g_0(x, y)) = \int_0^y \frac{1}{2!}y^2e^{-x} = \frac{1}{3!}y^3e^{-x} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (37)$$

由此根據 (2) 和 (23), 可知 (33) 的解是

$$\begin{cases} f(x, y) = e^x \left(1 - y + \frac{1}{2!}y^2 - \frac{1}{3!}y^3 + \dots\right) \\ \quad = e^{x-y}, \\ g(x, y) = e^{-x} \left(1 + y + \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{3!}y^3 + \dots\right) \\ \quad = e^{y-x} \end{cases} \quad (38)$$

阿多米安多項式似乎也可用來求解非線性差分／和分方程，至少可以求解下列簡單方程。考慮以下非線性沃爾泰拉和分方程：

$$f(x) + \sum_{t=0}^{t=x-1} (f(t))^2 - x - 1 = 0 \quad (39)$$

類似積分方程的情況，先把上式寫成 (1) 的形式並代入 (2) 和 (3)，以得到下式：

$$f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots = 1 + x - \sum_{t=0}^{t=x-1} (F_0(t) + F_1(t) + F_2(t) + \dots) \quad (40)$$

這裡我們使用「修訂阿多米安分解法」，根據上式設定以下遞推關係：

$$\begin{cases} f_0(x) = 1 \\ f_1(x) = x - \sum_{t=0}^{t=x-1} F_0(t) \\ f_n(x) = \sum_{t=0}^{t=x-1} F_{n-1}(t), \quad n \geq 2 \end{cases} \quad (41)$$

利用上述遞推關係以及 (5)，可以依次求得 $f_0(x)$ 、 $f_1(x)$ 、... 如下：

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 1 \\ f_1(x) &= x - \sum_{t=0}^{t=x-1} (f_0(t))^2 = \sum_{t=0}^{t=x-1} 1 = 0 \\ f_2(x) &= \sum_{t=0}^{t=x-1} 2f_0(t)f_1(t) = \sum_{t=0}^{t=x-1} 0 = 0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (42)$$

從以上結果容易看到對 $n \geq 1$ ，必有 $f_n(x) = 0$ ，由此根據 (2)，可知 (39) 的解是

$$f(x) = 1 \quad (43)$$

接著考慮以下非線性差分方程初值問題 (若撇除初始條件，以下方程等於《數學示例：可分變項與可分核》中的 (14))：

$$Ef(x) - f(x) + xf(x)Ef(x) = 0, \quad f(0) = 2 \quad (44)$$

為方便接下來的運算，先用等式 $E = \Delta + I$ 把上式的方程寫成以下形式：

$$\Delta f(x) = -xf(x)Ef(x) \quad (45)$$

接著用和分算子 $\int_0^{x-1}$ 抵消上面方程中的 Δ 。根據《數學示例：阿多米安分解法》中的 (69)，我們有 $\sum_0^{x-1} \Delta f(x) = f(x) - f(0)$ 。我們還要把上式所包含的未知函數 $f(x)$ 以及非線性函數 $f \times Ef$ 改寫成適當的無窮級數形式。對於 $f(x)$ ，可以沿用前面的 (2)；至於 $f(x)Ef(x)$ ，由於算子 E 跟算子 D 一樣具有線性性質，我們只需把 (31) 作適當調整 (把 (31) 中的 g 和 Df 分別改為 f 和 Ef)，從而得到

$$\begin{aligned} f \times Ef &= P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \dots, \text{ 其中} \\ P_0 &= f_0 Ef_0, \\ P_1 &= f_0 Ef_1 + f_1 Ef_0, \\ P_2 &= f_0 Ef_2 + f_1 Ef_1 + f_2 Ef_0, \\ P_3 &= f_0 Ef_3 + f_1 Ef_2 + f_2 Ef_1 + f_3 Ef_0, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (46)$$

總上所述，把 $\sum_0^{x-1}$ 作用於 (45) 並進行上述改寫，可得到以下方程：

$$f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots = 2 - \sum_0^{x-1} x(P_0(x) + P_1(x) + P_2(x) + \dots) \quad (47)$$

從上式可得到以下遞推關係：

$$\begin{cases} f_0(x) = 2 \\ f_n(x) = -\sum_0^{x-1} x P_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (48)$$

利用上述遞推關係以及 (46)，可以依次求得 $f_0(x)$ 、 $f_1(x)$ 、... 如下：

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 2 \\ f_1(x) &= -\sum_0^{x-1} x f_0(x) E f_0(x) = -\sum_0^{x-1} 4x = -2x^2 \\ f_2(x) &= -\sum_0^{x-1} x(f_0(x) E f_1(x) + f_1(x) E f_0(x)) \\ &= \sum_0^{x-1} 4x((x+1)^2 + x^2) \\ &= \sum_0^{x-1} 8x^3 \\ &= \sum_0^{x-1} (8x + 24x^2 + 8x^3) \\ &= 4x^2 + 8x^3 + 2x^4 \\ &= 2(x^2)^2 \\ f_3(x) &= -\sum_0^{x-1} x(f_0(x) E f_2(x) + f_1(x) E f_1(x) + f_2(x) E f_0(x)) \\ &= -\sum_0^{x-1} 4x(((x+1)^2)^2 + x^2(x+1)^2 + (x^2)^2) \\ &= -\sum_0^{x-1} (4x^3 + 12x^5) \\ &= -\sum_0^{x-1} (16x + 192x^2 + 304x^3 + 120x^4 + 12x^5) \\ &= -8x^2 - 64x^3 - 76x^4 - 24x^5 - 2x^6 \\ &= -2(x^2)^3 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (49)$$

請注意在以上的計算中，為方便進行和分運算，我們要在遞降階乘函數 x^n 與冪函數 x^n 之間進行多次轉換。特別地，我們應用了公式 $x^3 = x + 3x^2 + x^3$ 和 $x^5 = x + 15x^2 + 25x^3 + 10x^4 + x^5$ 這兩條公式¹。

從以上結果，根據 (2)，可知 (44) 的解是

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 - 2x^2 + 2(x^2)^2 - 2(x^2)^3 + \dots \\ &= \frac{2}{1 + x^2} \quad (50) \end{aligned}$$

我們在《數學示例：可分變項與可分核》求得 (44) 的通解為 $f(x) = \frac{2}{x^2 + 2c}$ (見該網頁的 (16))。容易看到這個通解中的任意函數 c 與初始條件 $f(0)$ 具有以下關係： $c = \frac{1}{f(0)}$ 。現在如把 (44) 中的初始條件 $f(0) = 2$ 代入上述關係，可得 $c = \frac{1}{2}$ ，再把這個結果代入上述通解，便可得 $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$ ，此一結果與 (50) 是一致的。

[連結至數學專題](#)
[連結至周家發網頁](#)

¹這兩條公式可運用《數學示例：微分／差分運算法則》中介紹的「第二類斯特靈數」概念求得。