數學示例：阿多米安分解法

我們在《數學示例：冪級數解》和《數學示例：傅立葉級數》中分別介紹了用冪級數和傅立葉級數表示微分／差分方程的解的方法。除了以上兩種級數外，學者近年來發展了一種新的級數解方法，稱為「阿多米安分解法」，可用來求解多種線性方程 (組)，本文主旨是介紹這種方法的基本概念。

阿多米安分解法(Adomian decomposition method) 的基本原理是先把給定的方程改寫成以下形式：

$$f = \Psi(f) \qquad (1)$$

其中 f 是未知函數，$\Psi(f)$ 則代表包含 f 的某個線性函數關係。在進行上述改寫時，有時要使用適當的算子以抵消原來作用於 f 的算子。此外，我們假設 f 具有以下無窮級數的形式 (不一定是冪級數或其他特定級數)：

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \ldots \qquad (2)$$

把 (2) 代入 (1)，可得到

$$f_0 + f_1 + f_2 + \ldots = \Psi(f_0 + f_1 + f_2 + \ldots) \qquad (3)$$

接著從上式推導出各個 f_n 之間的遞推關係，並利用此一遞推關係求得各個 f_n。把這些 f_n 代入 (2)，便最終得到原方程的解[1]。

舉例說，考慮以下弗雷德霍姆積分方程：

$$f(x) - \frac{1}{2}\int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{4}} \sec^2 x f(t) - 1 = 0 \qquad (4)$$

容易把上式寫成 (1) 的形式，然後代入 (2)，從而得到下式：

$$f_0(x)+f_1(x)+f_2(x)+\ldots = 1+\frac{1}{2}\sec^2 x\int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{4}}(f_0(t)+f_1(t)+f_2(t)+\ldots) \qquad (5)$$

[1]以下不討論 (2) 的斂散性問題，只想指出當給定方程滿足某些條件時，則 (2) 會收斂。

從上式可得到以下遞推關係：

$$\begin{cases} f_0(x) = 1 \\ f_n(x) = \frac{1}{2}\sec^2 x \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{4}} f_{n-1}(t), \;\; n \geq 1 \end{cases} \qquad (6)$$

利用上述遞推關係，可以依次求得 $f_0(x)$、$f_1(x)$、... 如下：

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 1 \\ f_1(x) &= \tfrac{1}{2}\sec^2 x \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{4}} f_0(t) = \tfrac{1}{2}\sec^2 x \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{4}} 1 = \tfrac{\pi}{8}\sec^2 x \\ f_2(x) &= \tfrac{1}{2}\sec^2 x \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{4}} f_1(t) = \tfrac{1}{2}\sec^2 x \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{4}} \tfrac{\pi}{8}\sec^2 t = \tfrac{\pi}{16}\sec^2 x \\ f_3(x) &= \tfrac{1}{2}\sec^2 x \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{4}} f_2(t) = \tfrac{1}{2}\sec^2 x \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{4}} \tfrac{\pi}{16}\sec^2 t = \tfrac{\pi}{32}\sec^2 x \\ &\vdots \end{aligned} \qquad (7)$$

由此根據 (2)，可知 (4) 的解是

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{\pi}{8}\sec^2 x \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right) \\ &= 1 + \frac{\pi}{4}\sec^2 x \qquad (8) \end{aligned}$$

上述方法也可應用於沃爾泰拉積分方程，請看以下例子：

$$f(x) + \int_{t=0}^{t=x} f(t) - 1 = 0 \qquad (9)$$

容易把上式寫成 (1) 的形式，然後代入 (2)，從而得到下式：

$$f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \ldots = 1 - \int_{t=0}^{t=x} (f_0(t) + f_1(t) + f_2(t) + \ldots) \qquad (10)$$

從上式可得到以下遞推關係：

$$\begin{cases} f_0(x) = 1 \\ f_n(x) = -\int_{t=0}^{t=x} f_{n-1}(t), \;\; n \geq 1 \end{cases} \qquad (11)$$

利用上述遞推關係，可以依次求得 $f_0(x)$、$f_1(x)$、... 如下：

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 1 \\ f_1(x) &= -\int_{t=0}^{t=x} f_0(t) = -\int_{t=0}^{t=x} 1 = -x \\ f_2(x) &= -\int_{t=0}^{t=x} f_1(t) = -\int_{t=0}^{t=x} (-t) = \tfrac{x^2}{2!} \\ f_3(x) &= -\int_{t=0}^{t=x} f_2(t) = -\int_{t=0}^{t=x} \tfrac{t^2}{2!} = -\tfrac{x^3}{3!} \\ &\vdots \end{aligned} \qquad (12)$$

由此根據 (2)，可知 (9) 的解是

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots \\ &= e^{-x} \qquad (13) \end{aligned}$$

在以上兩個例子中，很容易便把給定方程寫成 (1) 的形式，因為這兩個積分方程都包含一個不受任何算子作用的 $f(x)$ 項。微分方程的情況卻有所不同，一般而言，給定一個微分方程，應把包含最高階算子的項和所有其他項分別放在等號左端和右端，然後把適當的積分算子同時作用於等號兩端，以抵消上述最高階算子，從而得到 (1) 的形式。舉例說，考慮以下常微分方程初值問題 (以下方程如撇除其初始條件，等於《數學示例：冪級數解》中的 (6))：

$$2D^2f(x) + xDf(x) + f(x) = 0,\ \ f(0) = c_0, Df(0) = c_1 \qquad (14)$$

如前所述，先把上式寫成以下形式：

$$D^2f(x) = -\frac{1}{2}(xDf(x) + f(x)) \qquad (15)$$

為抵消上式左端的算子 D^2，可以採用二重定積分算子 $\int_0^x\int_0^x$。把這個算子作用於上式左端，並運用「微積分基本定理」，可得到[2]：

$$\begin{aligned} \int_0^x\int_0^x D^2f(x) &= \int_0^x [Df(t)]_{t=0}^{t=x} \\ &= \int_0^x (Df(x) - Df(0)) \\ &= [f(t) - Df(0)t]_{t=0}^{t=x} \\ &= f(x) - Df(0)x - f(0) \qquad (16) \end{aligned}$$

由此可知把 $\int_0^x\int_0^x$ 作用於 (15) 兩端的結果是

$$f(x) = c_0 + c_1x - \frac{1}{2}\int_0^x\int_0^x (xDf(x) + f(x)) \qquad (17)$$

接著把 (1) 代入上式，從而得到下式：

$$\begin{aligned} f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \ldots &= c_0 + c_1x - \frac{1}{2}\int_0^x\int_0^x (xD(f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \ldots) \\ &\quad + f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \ldots) \qquad (18) \end{aligned}$$

[2]由於二重定積分算子的上限 x 與被積函數的變項 x 相同，為避免引起混淆，以下在進行定積分運算時，應先把被積函數的變項從 x 變成 t。

從上式可得到以下遞推關係：

$$\begin{cases} f_0(x) = c_0 + c_1 x \\ f_n(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x\int_0^x (xDf_{n-1}(x) + f_{n-1}(x)),\ \ n \geq 1 \end{cases} \qquad (19)$$

利用上述遞推關係，可以依次求得 $f_0(x)$、$f_1(x)$、... 如下：

$$\begin{aligned} f_0(x) &= c_0 + c_1 x \\ f_1(x) &= -\tfrac{1}{2}\int_0^x\int_0^x (xDf_0(x) + f_0(x)) = -\tfrac{1}{2}\int_0^x\int_0^x (c_0 + 2c_1 x) \\ &= -\tfrac{1}{4}c_0 x^2 - \tfrac{1}{6}c_1 x^3 \\ f_2(x) &= -\tfrac{1}{2}\int_0^x\int_0^x (xDf_1(x) + f_1(x)) = -\tfrac{1}{2}\int_0^x\int_0^x (-\tfrac{3}{4}c_0 x^2 - \tfrac{2}{3}c_1 x^3) \\ &= \tfrac{1}{32}c_0 x^4 + \tfrac{1}{60}c_1 x^5 \\ f_3(x) &= -\tfrac{1}{2}\int_0^x\int_0^x (xDf_2(x) + f_2(x)) = -\tfrac{1}{2}\int_0^x\int_0^x (\tfrac{5}{32}c_0 x^4 + \tfrac{1}{10}c_1 x^5) \\ &= -\tfrac{1}{384}c_0 x^6 - \tfrac{1}{840}c_1 x^7 \\ &\vdots \end{aligned} \qquad (20)$$

由此根據 (2)，可以證明 (14) 的解是

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1 x - \frac{1}{4}c_0 x^2 - \frac{1}{6}c_1 x^3 + \frac{1}{32}c_0 x^4 + \frac{1}{60}c_1 x^5 - \frac{1}{384}c_0 x^6 - \frac{1}{840}c_1 x^7 + \ldots \\ &= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n n!} x^{2n} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n+1)} x^{2n+1} \qquad (21) \end{aligned}$$

以上結果跟《數學示例：冪級數解》中的 (8) 完全相同。

接著考慮以下常微分方程邊值問題：

$$D^2 f(x) + f(x) - 1 = 0,\ \ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),\ \ f(0) + Df(0) = 0, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \qquad (22)$$

像上例一樣，先把上式的方程寫成以下形式：

$$D^2 f(x) = 1 - f(x) \qquad (23)$$

接著把 $\int_0^x\int_0^x$ 同時作用於上式左右兩端，這個算子對 $D^2 f(x)$ 的作用已見於 (16)。此外，還要計算 $\int_0^x\int_0^x 1 = \frac{1}{2}x^2$。由此可知把 $\int_0^x\int_0^x$ 作用於 (23) 兩端的結果是

$$f(x) = f(0) + Df(0)x + \frac{1}{2}x^2 - \int_0^x\int_0^x f(x) \qquad (24)$$

上式包含兩個待求常數 $f(0)$ 和 $Df(0)$，但我們可以利用 (22) 中的第一個邊界條件得到 $Df(0) = -f(0)$，從而消去其中一個待求常數。接著把此一結果和 (1) 代入上式，從而得到下式：

$$f_0(x)+f_1(x)+f_2(x)+\ldots = f(0)(1-x)+\frac{1}{2}x^2-\int_0^x\int_0^x (f_0(x)+f_1(x)+f_2(x)+\ldots) \qquad (25)$$

從上式可得到以下遞推關係：

$$\begin{cases} f_0(x) = f(0)(1-x) + \frac{1}{2}x^2 \\ f_n(x) = -\int_0^x\int_0^x f_{n-1}(x), \ \ n \ge 1 \end{cases} \qquad (26)$$

利用上述遞推關係，可以依次求得 $f_0(x)$、$f_1(x)$、... 如下：

$$\begin{array}{ll} f_0(x) & = f(0)(1-x) + \frac{1}{2}x^2 \\ f_1(x) & = -\int_0^x\int_0^x f_0(x) = -\int_0^x\int_0^x \left(f(0)(1-x) + \frac{1}{2}x^2\right) \\ & = f(0)\left(-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3\right) - \frac{1}{4!}x^4 \\ f_2(x) & = -\int_0^x\int_0^x f_1(x) = -\int_0^x\int_0^x \left(f(0)\left(-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3\right) - \frac{1}{4!}x^4\right) \\ & = f(0)\left(\frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5\right) + \frac{1}{6!}x^6 \\ f_3(x) & = -\int_0^x\int_0^x f_2(x) = -\int_0^x\int_0^x \left(f(0)\left(\frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5\right) + \frac{1}{6!}x^6\right) \\ & = f(0)\left(-\frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7\right) - \frac{1}{8!}x^8 \\ & \vdots \end{array} \qquad (27)$$

由此根據 (2)，可知 (22) 的解是

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & f(0)\left(1 - x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7 + \dots\right) \\ & & + \left(\frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 - \frac{1}{8!}x^8 + \dots\right) \\ & = & f(0)(\cos x - \sin x) + 1 - \cos x \qquad (28) \end{array}$$

但上述結果仍然包含未知常數 $f(0)$，為解出這個常數，要利用 (22) 中至今未被使用的邊界條件 $f(\frac{\pi}{2}) = 2$，把此一條件代入 (28)，可得

$$-f(0) + 1 = 2$$

由此可解出 $f(0) = -1$，把此一結果代入 (28)，便最終求得 (22) 的解為

$$f(x) = -2\cos x + \sin x + 1 \qquad (29)$$

阿多米安分解法也能用來求解偏微分方程。由於偏微分方程往往包含多個偏微分算子，在把給定方程改寫成 (1) 的形式時，可以有多種選擇，而這些選擇可能影響求解過程的難易程度。舉例說，考慮以下 2 階偏微分方程初值-邊值問題：

$$\begin{array}{l} D_{xx}f(x,y) - D_y f(x,y) + \cos x = 0, \ \ x \in (0,\pi), y \in (0,\infty), \\ f(0,y) = 1 - e^{-y}, f(\pi,y) = e^{-y} - 1; \ \ f(x,0) = 0 \qquad (30) \end{array}$$

為把上式改寫成 (1) 的形式，可以用二重定積分算子 $\int_0^x\int_0^x$ 抵消 D_{xx} 或用一重定積分算子 $\int_0^y$ 抵消 D_y。這裡選擇後者，這除了因為一重定積分算子

較簡單外，還因為在上式中，與變項 x 和 y 相關的分別是「邊界條件」和「初始條件」，而從前面的例子可以看到，在用阿多米安分解法時，初始條件較邊界條件易於處理。根據以上的討論，先把 (30) 中的方程寫成以下形式：

$$D_y f(x,y) = \cos x + D_{xx} f(x,y) \qquad (31)$$

把 $\int_0^y$ 作用於 $D_y f(x,y)$，並運用「微積分基本定理」，可得到

$$\begin{aligned} \int_0^y D_y f(x,y) &= [f(x,t)]_{t=0}^{t=y} \\ &= f(x,y) - f(x,0) \qquad (32) \end{aligned}$$

此外，還要計算 $\int_0^y \cos x = y\cos x$。由此可知把 $\int_0^y$ 作用於 (31) 兩端的結果是

$$f(x,y) = y\cos x + \int_0^y D_{xx} f(x,y) \qquad (33)$$

接著把 (1) 代入上式，從而得到下式：

$$\begin{aligned} & f_0(x,y) + f_1(x,y) + f_2(x,y) + \ldots \\ = \ & y\cos x + \int_0^y D_{xx}(f_0(x,y) + f_1(x,y) + f_2(x,y) + \ldots) \qquad (34) \end{aligned}$$

從上式可得到以下遞推關係：

$$\begin{cases} f_0(x,y) = y\cos x \\ f_n(x,y) = \int_0^y D_{xx} f_{n-1}(x,y), \ \ n \geq 1 \end{cases} \qquad (35)$$

利用上述遞推關係，可以依次求得 $f_0(x,y)$、$f_1(x,y)$、... 如下：

$$\begin{aligned} f_0(x,y) &= y\cos x \\ f_1(x,y) &= \int_0^y D_{xx} f_0(x,y) = -\cos x \int_0^y y = -\tfrac{1}{2!} y^2 \cos x \\ f_2(x,y) &= \int_0^y D_{xx} f_1(x,y) = \tfrac{1}{2!}\cos x \int_0^y y^2 = \tfrac{1}{3!} y^3 \cos x \\ f_3(x,y) &= \int_0^y D_{xx} f_2(x,y) = -\tfrac{1}{3!}\cos x \int_0^y y^3 = -\tfrac{1}{4!} y^4 \cos x \\ &\vdots \end{aligned} \qquad (36)$$

由此根據 (2)，我們有

$$\begin{aligned} f(x,y) &= y\cos x - \frac{1}{2!} y^2 \cos x + \frac{1}{3!} y^3 \cos x - \frac{1}{4!} y^4 \cos x + \ldots \\ &= (1 - e^{-y})\cos x \qquad (37) \end{aligned}$$

由於上述函數滿足 (30) 的兩個邊界條件 $f(0,y) = 1 - e^{-y}$ 和 $f(\pi,y) = e^{-y} - 1$，可知上述函數是 (30) 的解。

接著考慮以下 2 階偏微分方程邊值問題：

$$\begin{array}{l} D_{xx}f(x,y)+D_{yy}f(x,y)=0,\;\; x,y\in(0,\pi) \\ D_xf(0,y)=0, D_xf(\pi,y)=0, D_yf(x,0)=\cos x, D_yf(x,\pi)=\cosh\pi\cos x \end{array} \qquad (38)$$

為把上式改寫成 (1) 的形式，可以用 $\int_0^x\!\int_0^x$ 抵消 D_{xx} 或用 $\int_0^y\!\int_0^y$ 抵消 D_{yy}，這裡選擇後者。為此，先把 (38) 中的方程寫成以下形式：

$$D_{yy}f(x,y)=-D_{xx}f(x,y) \qquad (39)$$

利用前面 (16) 所示的結果 (作適當調整)，可知把 $\int_0^y\!\int_0^y$ 作用於 D_{yy} 的結果為

$$\int_0^y\!\int_0^y D_{yy}f(x,y)=f(x,y)-D_yf(x,0)y-f(x,0) \qquad (40)$$

由此可知把 $\int_0^y\!\int_0^y$ 作用於 (39) 兩端的結果是

$$f(x,y)=f(x,0)+y\cos x-\int_0^y\!\int_0^y D_{xx}f(x,y) \qquad (41)$$

其中 $f(x,0)$ 是以 x 為變項的待求 1 元函數。接著把 (1) 代入上式，從而得到下式：

$$\begin{array}{rl} & f_0(x,y)+f_1(x,y)+f_2(x,y)+\ldots \\ = & f(x,0)+y\cos x-\displaystyle\int_0^y\!\int_0^y D_{xx}(f_0(x,y)+f_1(x,y)+f_2(x,y)+\ldots) \end{array} \qquad (42)$$

從上式可得到以下遞推關係：

$$\left\{\begin{array}{l} f_0(x,y)=f(x,0)+y\cos x \\ f_n(x,y)=-\int_0^y\!\int_0^y D_{xx}f_{n-1}(x,y),\;\; n\geq 1 \end{array}\right. \qquad (43)$$

利用上述遞推關係，可以依次求得 $f_0(x,y)$、$f_1(x,y)$、... 如下：

$$\begin{array}{ll} f_0(x,y) & =f(x,0)+y\cos x \\ f_1(x,y) & =-\int_0^y\!\int_0^y D_{xx}f_0(x,y)=-\int_0^y\!\int_0^y(D^2f(x,0)-y\cos x) \\ & =-\frac{1}{2!}y^2D^2f(x,0)+\frac{1}{3!}y^3\cos x \\ f_2(x,y) & =-\int_0^y\!\int_0^y D_{xx}f_1(x,y)=-\int_0^y\!\int_0^y(-\frac{1}{2!}y^2D^4f(x,0)-\frac{1}{3!}y^3\cos x) \\ & =\frac{1}{4!}y^4D^4f(x,0)+\frac{1}{5!}y^5\cos x \\ f_3(x,y) & =-\int_0^y\!\int_0^y D_{xx}f_2(x,y)=-\int_0^y\!\int_0^y(\frac{1}{4!}y^4D^6f(x,0)-\frac{1}{5!}y^5\cos x) \\ & =-\frac{1}{6!}y^6D^6f(x,0)+\frac{1}{7!}y^7\cos x \\ & \vdots \end{array} \qquad (44)$$

由此根據 (2)，我們有

$$
\begin{aligned}
& f(x,y) \\
= \ & f(x,0)+y\cos x-\frac{1}{2!}y^2D^2f(x,0)+\frac{1}{3!}y^3\cos x \\
& +\frac{1}{4!}y^4D^4f(x,0)+\frac{1}{5!}y^5\cos x-\frac{1}{6!}y^6D^6f(x,0)+\frac{1}{7!}y^7\cos x+\ldots \\
= \ & \cos x\sinh y+f(x,0)-\frac{1}{2!}y^2D^2f(x,0)+\frac{1}{4!}y^4D^4f(x,0)-\frac{1}{6!}y^6D^6f(x,0)+\ldots
\end{aligned}
\tag{45}
$$

但上述結果仍然包含未知 1 元函數 $f(x,0)$。為解出這個函數，要利用 (38) 中的最後一個邊界條件 $D_yf(x,\pi)=\cosh\pi\cos x$。為此，首先求

$$D_yf(x,y)=\cos x\cosh y-yD^2f(x,0)+\frac{1}{3!}y^3D^4f(x,0)-\frac{1}{5!}y^5D^6f(x,0)+\ldots \tag{46}$$

把上述條件代入上式，可得

$$\cosh\pi\cos x-\pi D^2f(x,0)+\frac{1}{3!}\pi^3D^4f(x,0)-\frac{1}{5!}\pi^5D^6f(x,0)+\ldots=\cosh\pi\cos x \tag{47}$$

從上式可得到的一個解是

$$f(x,0)=0 \tag{48}$$

把 (48) 代入 (45)，可得

$$f(x,y)=\cos x\sinh y \tag{49}$$

由於上述函數滿足 (38) 中首兩個邊界條件 $D_xf(0,y)=0$ 和 $D_xf(\pi,y)=0$，可知上述函數是 (38) 的解。

阿多米安分解法也可用來求解微分／積分方程組，請看以下弗雷德霍姆積分方程組：

$$
\begin{cases}
f(x)-\int_{t=0}^{t=1}g(t)-x+\frac{1}{3}=0 \\
g(x)-\int_{t=0}^{t=1}f(t)-x^2+\frac{1}{2}=0
\end{cases}
\tag{50}
$$

把上式中的兩個方程都寫成 (1) 的形式並進行以下代入：

$$
\begin{cases}
f=f_0+f_1+f_2+\ldots \\
g=g_0+g_1+g_2+\ldots
\end{cases}
\tag{51}
$$

可得到以下方程組：

$$
\begin{cases}
f_0(x)+f_1(x)+f_2(x)+\ldots=x-\frac{1}{3}+\int_{t=0}^{t=1}(g_0(t)+g_1(t)+g_2(t)+\ldots) \\
g_0(x)+g_1(x)+g_2(x)+\ldots=x^2-\frac{1}{2}+\int_{t=0}^{t=1}(f_0(t)+f_1(t)+f_2(t)+\ldots)
\end{cases}
\tag{52}
$$

接下來要從上式推導一個遞推關係，如沿用前面的做法，應把積分符號以外的項全部歸入 $f_0(x)$ 和 $g_0(x)$，即設定 $f_0(x) = x - \frac{1}{3}$ 和 $g_0(x) = x^2 - \frac{1}{2}$。但這裡對前面的做法作一些修訂，把積分符號以外的項分為兩部分，一部分歸入 $f_0(x)$ 和 $g_0(x)$，另一部分則歸入 $f_1(x)$ 和 $g_1(x)$，經此修訂的求解方法稱為修訂阿多米安分解法(modified Adomian decomposition method)，而此一方法在某些情況下可大大簡化求解過程。根據上述討論，設定以下遞推關係：

$$\begin{cases} f_0(x) = x \\ g_0(x) = x^2 \\ f_1(x) = -\frac{1}{3} + \int_{t=0}^{t=1} g_0(t) \\ g_1(x) = -\frac{1}{2} + \int_{t=0}^{t=1} f_0(t) \\ f_n(x) = \int_{t=0}^{t=1} g_{n-1}(t), \quad n \geq 2 \\ g_n(x) = \int_{t=0}^{t=1} f_{n-1}(t), \quad n \geq 2 \end{cases} \qquad (53)$$

利用上述遞推關係，可以依次求得 $f_0(x)$、$g_0(x)$、$f_1(x)$、$g_1(x)$、... 如下：

$$\begin{array}{ll} f_0(x) & = x \\ g_0(x) & = x^2 \\ f_1(x) & = -\frac{1}{3} + \int_{t=0}^{t=1} g_0(t) = -\frac{1}{3} + \int_{t=0}^{t=1} t^2 = 0 \\ g_1(x) & = -\frac{1}{2} + \int_{t=0}^{t=1} f_0(t) = -\frac{1}{2} + \int_{t=0}^{t=1} t = 0 \\ f_2(x) & = \int_{t=0}^{t=1} g_1(t) = \int_{t=0}^{t=1} 0 = 0 \\ g_2(x) & = \int_{t=0}^{t=1} f_1(t) = \int_{t=0}^{t=1} 0 = 0 \\ & \vdots \end{array} \qquad (54)$$

從以上結果容易看到對 $n \geq 1$，必有 $f_n(x) = g_n(x) = 0$，由此根據 (51)，可知 (50) 的解是

$$f(x) = x, \quad g(x) = x^2 \qquad (55)$$

接著考慮以下 1 階偏微分方程組初值問題：

$$\begin{cases} D_y f(x,y) + D_x g(x,y) = 0 \\ D_x f(x,y) + D_y g(x,y) = 0, \end{cases}, \quad f(x,0) = e^x, g(x,0) = e^{-x} \qquad (56)$$

由於上述方程組提供了關於變項 y 的初始條件，所以以下先把上面兩個方程寫成以下形式：

$$\begin{cases} D_y f(x,y) = -D_x g(x,y) \\ D_y g(x,y) = -D_x f(x,y) \end{cases} \qquad (57)$$

接著用 $\int_0^y$ 抵消上面兩個方程中的 D_y。根據 (32)，我們有 $\int_0^y D_y f(x,y) = f(x,y) - f(x,0)$ 和 $\int_0^y D_y g(x,y) = g(x,y) - g(x,0)$。把 $\int_0^y$ 作用於上式中的

兩個方程並代入 (51)，可得到以下方程組：

$$\left\{\begin{array}{l} f_0(x,y)+f_1(x,y)+f_2(x,y)+\ldots \\ =e^x-\int_0^y D_x(g_0(x,y)+g_1(x,y)+g_2(x,y)+\ldots) \\ g_0(x,y)+g_1(x,y)+g_2(x,y)+\ldots \\ =e^{-x}-\int_0^y D_x(f_0(x,y)+f_1(x,y)+f_2(x,y)+\ldots) \end{array}\right. \tag{58}$$

從上式可得到以下遞推關係：

$$\left\{\begin{array}{l} f_0(x,y)=e^x \\ g_0(x,y)=e^{-x} \\ f_n(x,y)=-\int_0^y D_x g_{n-1}(x,y), \;\; n\geq 1 \\ g_n(x,y)=-\int_0^y D_x f_{n-1}(x,y), \;\; n\geq 1 \end{array}\right. \tag{59}$$

利用上述遞推關係，可以依次求得 $f_0(x,y)$、$g_0(x,y)$、$f_1(x,y)$、$g_1(x,y)$、...如下：

$$\begin{array}{ll} f_0(x,y) & =e^x \\ g_0(x,y) & =e^{-x} \\ f_1(x,y) & =-\int_0^y D_x g_0(x,y)=e^{-x}\int_0^y 1=ye^{-x} \\ g_1(x,y) & =-\int_0^y D_x f_0(x,y)=-e^x\int_0^y 1=-ye^x \\ f_2(x,y) & =-\int_0^y D_x g_1(x,y)=e^x\int_0^y y=\frac{1}{2!}y^2e^x \\ g_2(x,y) & =-\int_0^y D_x f_1(x,y)=e^{-x}\int_0^y y=\frac{1}{2!}y^2e^{-x} \\ f_3(x,y) & =-\int_0^y D_x g_2(x,y)=e^{-x}\int_0^y \frac{1}{2!}y^2=\frac{1}{3!}y^3e^{-x} \\ g_3(x,y) & =-\int_0^y D_x f_2(x,y)=-e^x\int_0^y \frac{1}{2!}y^2=-\frac{1}{3!}y^3e^x \\ & \vdots \end{array} \tag{60}$$

由此根據 (51)，可知 (56) 的解是

$$\left\{\begin{array}{ll} f(x,y) & =e^x\left(1+\frac{1}{2!}y^2+\ldots\right)+e^{-x}\left(y+\frac{1}{3!}y^3+\ldots\right) \\ & =e^x\cosh y+e^{-x}\sinh y, \\ g(x,y) & =e^{-x}\left(1+\frac{1}{2!}y^2+\ldots\right)-e^x\left(y+\frac{1}{3!}y^3+\ldots\right) \\ & =e^{-x}\cosh y-e^x\sinh y \end{array}\right. \tag{61}$$

阿多米安分解法似乎也可用來求解差分／和分方程，至少可以求解下列簡單方程。考慮以下沃爾泰拉和分方程：

$$f(x)+\sum_{t=0}^{t=x-1} f(t)-x-1=0 \tag{62}$$

類似積分方程的情況，先把上式寫成 (1) 的形式並代入 (2)，以得到下式：

$$f_0(x)+f_1(x)+f_2(x)+\ldots=1+x-\sum_{t=0}^{t=x-1}(f_0(t)+f_1(t)+f_2(t)+\ldots) \tag{63}$$

從上式可得到以下遞推關係[3]：

$$\begin{cases} f_0(x) = 1 + x \\ f_n(x) = -\sum_{t=0}^{t=x-1} f_{n-1}(t), \ \ n \geq 1 \end{cases} \qquad (64)$$

利用上述遞推關係，可以依次求得 $f_0(x)$、$f_1(x)$、... 如下：

$$\begin{aligned} f_0(x) \ &= 1 + x \\ f_1(x) \ &= -\sum_{t=0}^{t=x-1} f_0(t) = -\sum_{t=0}^{t=x-1}(1+t) = -x - \tfrac{1}{2!}x^2 \\ f_2(x) \ &= -\sum_{t=0}^{t=x-1} f_1(t) = -\sum_{t=0}^{t=x-1}\left(-t - \tfrac{1}{2!}t^2\right) = \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 \\ f_3(x) \ &= -\sum_{t=0}^{t=x-1} f_2(t) = -\sum_{t=0}^{t=x-1}\left(\tfrac{1}{2!}t^2 + \tfrac{1}{3!}t^3\right) = -\tfrac{1}{3!}x^3 - \tfrac{1}{4!}x^4 \\ &\ \vdots \end{aligned} \qquad (65)$$

以上結果顯示，對每對 n 和 $n+1$ ($n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$)，$f_n(x)$ 與 $f_{n+1}(x)$ 總有一對互相抵消的項，這些互相抵消的項在有關阿多米安分解法的理論中稱為噪聲項(noise term)。所有在某方程的解中出現的噪聲項都可略去，餘下的項便構成方程的解。從上述計算結果可見，除了 $f_0(x)$ 中的 1 外，所有其他項都是噪聲項，因此 (62) 的解是

$$f(x) = 1 \qquad (66)$$

接著考慮以下 1 階常差分方程初值問題：

$$Ef(x) - 3f(x) = 0, \ \ f(0) = 1 \qquad (67)$$

為方便接下來的運算，先用等式 $E = \Delta + I$ 把上式的方程寫成以下形式：

$$\Delta f(x) = 2f(x) \qquad (68)$$

為抵消上式左端的算子 Δ，可以採用和分算子 $\sum_0^{x-1}$。把這個算子作用於上式左端，並運用「差和分基本定理」，可得到：

$$\begin{aligned} \sum_0^{x-1} \Delta f(x) \ &= \ [f(t)]_{t=0}^{t=x} \\ &= \ f(x) - f(0) \qquad (69) \end{aligned}$$

由此可知把 $\sum_0^{x-1}$ 作用於 (68) 兩端的結果是

$$f(x) = 1 + \sum_0^{x-1} 2f(x) \qquad (70)$$

[3]讀者請自行驗證，如對上述方程採用「修訂阿多米安分解法」，把 $f_0(x)$ 和 $f_1(x)$ 分別定為 $f_0(x) = 1$ 和 $f_1(x) = x - \sum_{t=0}^{t=x-1} f_0(t)$，可更快求得 (62) 的解。

接著把 (2) 代入上式，從而得到下式：

$$f_0(x)+f_1(x)+f_2(x)+\ldots=1+\sum_{0}^{x-1}2(f_0(x)+f_1(x)+f_2(x)+\ldots) \tag{71}$$

從上式可得到以下遞推關係：

$$\begin{cases} f_0(x)=1 \\ f_n(x)=\sum_0^{x-1}2f_{n-1}(x),\ \ n\geq 1 \end{cases} \tag{72}$$

利用上述遞推關係，可以依次求得 $f_0(x)$、$f_1(x)$、... 如下：

$$\begin{array}{ll} f_0(x) & =1 \\ f_1(x) & =\sum_0^{x-1}2f_0(x)=\sum_0^{x-1}2=2x \\ f_2(x) & =\sum_0^{x-1}2f_1(x)=\sum_0^{x-1}4x=\frac{4x^{\underline{2}}}{2!} \\ f_3(x) & =\sum_0^{x-1}2f_2(x)=\sum_0^{x-1}4x^{\underline{2}}=\frac{8x^{\underline{3}}}{3!} \\ & \vdots \end{array} \tag{73}$$

由此根據 (2)，我們有

$$f(x)=1+2x+\frac{4x^{\underline{2}}}{2!}+\frac{8x^{\underline{3}}}{3!}+\ldots \tag{74}$$

上式右端看似無窮級數，而且並不具有泰勒級數的形式，似乎難以辨認它等於哪一函數的封閉形式。但由於 $x^{\underline{n}}=x(x-1)\ldots(x-n+1)$ 而 x 是非負整數，上式右端其實只包含 $x+1$ 個項 (可以證朗上式的第 $x+1$ 項是 $\frac{2^x x^{\underline{x}}}{x!}$，其後各項全是 0)。運用組合學中的等式 $C(x,n)=\frac{x!}{n!(x-n)!}$ 和 $(a+1)^x=\sum_{n=0}^{x}C(x,n)a^n$，可以把上式逐步改寫並最終得到 (67) 的解如下：

$$\begin{aligned} f(x) &= 1+2x+\frac{4x^{\underline{2}}}{2!}+\frac{8x^{\underline{3}}}{3!}+\ldots+\frac{2^x x^{\underline{x}}}{x!} \\ &= 2^0+2^1x+\frac{2^2x(x-1)}{2!}+\frac{2^3x(x-1)(x-2)}{3!}+\ldots+\frac{2^x x(x-1)\ldots(1)}{x!} \\ &= \frac{2^0x!}{0!(x-0)!}+\frac{2^1x!}{1!(x-1)!}+\frac{2^2x!}{2!(x-2)!}+\frac{2^3x!}{3!(x-3)!}+\ldots+\frac{2^x x!}{x!(x-x)!} \\ &= 2^0C(x,0)+2^1C(x,1)+2^2C(x,2)+2^3C(x,3)+\ldots+2^xC(x,x) \\ &= 3^x \qquad (75) \end{aligned}$$

由於學者鮮有討論用阿多米安分解法求解差分／和分方程的問題，本文只能提供以上兩個較簡單的例子。

連結至數學專題
連結至周家發網頁